УДК 533.9

Влияние холловских эффектов на устойчивость вращающейся плазмы.

Н.М. Горшунов, Е.П. Потанин

Исследуется устойчивость плазмы, вращающейся в пространстве между двумя круговыми цилиндрами в однородном осевом магнитном поле. Анализ выполнен в рамках локального подхода в случае конечной проводимости среды и в пренебрежении индуцированным магнитным полем. Изучено влияние холловских эффектов на устойчивость магнитогидродинамического потока. Показано существование неустойчивого режима в случае случае слабопроводящей среды, когда направление векторов угловой скорости среды $\vec{\Omega}$ и магнитного поля $\vec{B}$ противоположны.

PACS: 47.20.Qr.- d, 52.30.Cv
Ключевые слова: вращающаяся плазма, устойчивость, эффект Холла

Введение

Интерес к вращающейся плазме не ослабевает на протяжении последних 40 лет [1–10]. В первое время этот интерес в основном связывался с использованием вращающейся плазмы для накопления энергии [11] и разделения изотопов (плазменные ловушки и плазменные центрифуги [12–14]). В последние годы некоторые аспекты вращающейся плазмы стали интересны с точки зрения астрофизических приложений. При этом важное значение имеет устойчивость плазмы. Впервые на возможность существования неустойчивости, связанной со сдвигом окружной скорости и действием электромагнитных сил, было указано в работе [1]. По мнению ряда авторов, потеря устойчивости вращающейся плазмы может быть источником возбуждения и поддержания МГД-турбулентности в аккреционных дисках [4, 5]. В [6, 7] исследовалось влияние эффекта Холла на устойчивость вращения идеально проводящей среды в осевом магнитном поле.

Целью настоящей работы является изучение влияния холловских токов на устойчивость слабо проводящей вращающейся плазмы.

Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается устойчивость плазмы, приведенной во вращение внешними силами. Условимся считать плазму проводящей средой или жидкостью. Предположим, что вращение проводящей среды осуществляется в пространстве между двумя вращающимися концентрическими цилиндрами при наличии продольного однородного магнитного поля. Впоследствии эта неустойчивость была названа магнитовращательной. Предположим, что вращение проводящей жидкости в условиях наличия внешнего осевого магнитного поля **B** осуществляется в пространстве между цилиндрами с радиусами *R1* и R_2 и вызывается механическим воздействием со стороны цилиндров. Будем считать цилиндры абсолютно проводящими. Цилиндры могут вращаться с различными постоянными угловыми скоростями $\Omega_1 = \Omega(R_1)$ и $\Omega_2 = \Omega(R_2)$. В отсутствии внешнего магнитного поля имеем случай обычной непроводящей среды. Он достаточно хорошо исследован в литературе (обзор [10]) и известен как течение Тейлора-Куэтта, для которого Рэлеем получено достаточное условие устойчивости. При исследовании устойчивости такого течения по отношению к периодическим в пространстве и времени возмущениям основными силами являются различного рода силы «инерции» (кориолисовы и центробежные силы). В проводящей среде при наличии магнитного поля возмущения гидродинамических параметров вызывают электрические токи, взаимодействие которых с магнитным полем способствует появлению дополнительных сил. В настоящей работе мы рассмотрим устойчивость вращающейся плазмы в рамках магнитогидродинамического приближения, причем основное внимание уделим учету холловских эффектов.

Систему МГД-уравнений в общем случае проводящей жидкости запишем в форме [15]

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\tilde{n}}\nabla P + \nu\nabla^2\mathbf{V} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}, \quad (1)$$

Горшунов Николай Михайлович, ст. научн. сотр.
Потанин Евгений Петрович, вед. научн. сотр.
НИЦ «Курчатовский институт».
Россия, 123182, Москва, пл. Курчатова , 1.
Тел.: 8 499 196-77-28

Статья поступила в редакцию 20 декабря 2012 г.

$$\nabla \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \frac{1}{ì_0} \nabla \times \mathbf{B}, \quad (4)$$

$$\nabla \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

где **V** – скорость среды, *P* – давление, **j** – плотность электрического тока, **B** – индукция магнитного поля, **E** – напряженность магнитного поля, ∇ – векторный оператор набла, ν – коэффициент кинематической вязкости среды, ρ – ее массовая плотность.

Используем обобщенный закон Ома с учетом холловского эффекта

$$\mathbf{j} = \sigma[\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \beta\mu_0(\mathbf{j} \times \mathbf{B})]. \quad (6)$$

Здесь $\beta = 1/(ne)$– постоянная Холла, *n* – плотность плазмы, μ_0 – магнитная постоянная (в системе СИ). Из (3)–(6) получим уравнение индукции:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} - \beta[\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad (7)$$

где $\eta = 1/(\mu_0\sigma)$ – коэффициент магнитной вязкости, σ – проводимость жидкости вдоль магнитного поля.

Линейный анализ устойчивости вращающейся проводящей среды в пространстве между вращающимися цилиндрами

Вектор $\mathbf{B}_0$ направим вдоль положительной оси *z*. Будем первоначально считать, что основное магнитное поле $\mathbf{B}_0$ совпадает по направлению с вектором угловой скорости вращения цилиндров, а следовательно и угловой скорости плазмы $\mathbf{\Omega}(r)$.

При отсутствии возмущений, а также электрических токов, профиль окружной скорости основного потока характеризуется известной функцией радиуса $V_{\varphi 0}(r) = r\Omega(r)$ [1, 3], остальные компоненты скорости, а именно, радиальная V_{r0} и осевая V_{z0} отсутствуют, радиальный градиент давления уравновешивается центробежной силой $\rho\Omega^2 r = \frac{dp_0}{dr}$, электрические токи $\mathbf{J}_0$ отсутствуют в силу разомкнутости внешней цепи, а невозмущенное радиальное электрическое поле «уравновешивается» лоренцевым членом

$$E_{r0} = -\Omega(r) r B_z, \quad (8)$$

В такой постановке задачи величина Ω>0, а основное радиальное электрическое поле $\vec{E}_{r0}$ направлено к оси вращения. Отметим, что на торцах системы происходит торможение азимутального потока и образуются пограничные слои [16] , вносящие возмущение в основной азимутальный поток. В [17] показано, что это воздействие в общем случае может оказаться значительным. По этой причине при постановке задачи предположим, что длина цилиндров *L* значительно превышает расстояние между ними $R_2 - R_1$ и можно пренебречь влиянием торцов.

Будем исследовать устойчивость невозмущенного течения по отношению к осесимметричным возмущениям, пренебрегая зависимостью компонент скорости и магнитного поля от координаты φ в пренебрежении сжимаемостью плазмы. Рассмотрим случай слабопроводящей среды, когда можно не учитывать индуцированного магнитного поля ($B_z = B_0$, $B_r = B_\phi = 0$), а следовательно, оказывается излишним уравнение (7). Кроме того, будем пренебрегать вязкостью среды, полагая малым магнитное число Прандтля $Pm = \frac{\nu}{\eta}$. Скорости среды и давление зададим в виде следующих выражений:

$$v_r = u(r,z,t), \; v_\varphi = \Omega(r) r + v(r,z,t),$$

$$V_z = w(r,z,t), \; P = p_0(r) + p(r,z,t) \quad (9)$$

Добавки к основным величинам в (9) будем считать малыми. При этом компоненты плотности электрического тока рассчитываются непосредственно из обобщенного закона Ома (6):

$$j_r = \sigma \frac{vB_z}{1+\chi^2} + \frac{\chi\sigma B_0 u}{1+\chi^2}, \quad (11)$$

$$j_\varphi = -\frac{\sigma u B_z}{1+\chi^2} + \frac{\chi\sigma B_0 v}{1+\chi^2}, \quad (10)$$

где $\chi = \beta\sigma B_0$ – параметр Холла.

Тогда линеаризованная система МГД-уравнений в проекциях на оси *r*, φ и z принимает вид

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} - 2\rho\Omega v = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\sigma u B_0^2}{1+\chi^2} + \frac{\sigma v B_0^2 \chi}{1+\chi^2}, \quad (11)$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho u\left(2\Omega + r\frac{d\Omega}{dr}\right) = -\frac{\sigma v B_0^2}{1+\chi^2} - \frac{\sigma u B_0^2 \chi}{1+\chi^2}, \quad (12)$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (14)$$

Будем искать соответствующие возмущенные величины в следующей форме:

$$v = v(r)\exp(i(\omega t + kz)),\quad u = u(r)\exp(i(\omega t + kz)),$$

$$w = w(r)\exp(i(\omega t + kz)),$$

$$p = p(r)\exp(i(\omega t + kz)), \tag{15}$$

где k – продольное волновое число.

Подставляя (15) в (11)–(14) и исключая $p(r)$, $v(r)$ и $w(r)$, получим дисперсионное соотношение:

$$\omega^2 - 2i\frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+\chi^2)}\omega - 2\Omega(2\Omega + r\frac{d\Omega}{dr}) -$$

$$-\frac{\sigma B_0^2}{\rho}\frac{\chi}{1+\chi^2}(2\Omega + r\frac{d\Omega}{dr}) - \frac{\sigma^2 B_0^4}{\rho^2(1+\chi^2)}$$

$$-\frac{2\Omega\sigma B_0^2\chi}{\rho(1+\chi^2)}\frac{\chi^2}{(1+\chi^2)}\frac{\sigma^2 B_o^4}{\rho^2} = \tag{16}$$

$$= \omega(\omega - i\frac{\sigma B_0^2}{(1+\chi^2)\rho})\frac{1}{uk^2}(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r})$$

Локальный критерий неустойчивости

В рамках локального подхода [4, 5, 7, 8, 18] имеем:

$$\omega^2 - 2i\frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+\chi^2)}\omega - 2\Omega(2\Omega + r\frac{d\Omega}{dr}) -$$

$$-\frac{\sigma B_0^2}{\rho}\frac{\chi}{1+\chi^2}(2\Omega + r\frac{d\Omega}{dr}) - \frac{\sigma^2 B_0^4}{\rho^2(1+\chi^2)} -, \tag{17}$$

$$-\frac{2\Omega\sigma B_0^2\chi}{\rho(1+\chi^2)} - \frac{\chi^2}{(1+\chi^2)}\frac{\sigma^2 B_o^4}{\rho^2} = 0,$$

Локальное дисперсионное соотношение позволяет провести качественный анализ устойчивости. Условие неустойчивости связано с наличием отрицательных мнимых корней уравнения (17). При отсутствии магнитного поля налицо известный локальный критерий неустойчивости Рэлея

$$2\Omega\left(2\Omega + r\frac{d\Omega}{dr}\right) < 0 \tag{18}$$

При наличии магнитного поля и в пренебрежении эффектом Холла ($\chi = 0$) получим

$$\omega^2 - 2i\frac{\sigma B_0^2}{\rho}\omega - 2\Omega(2\Omega + r\frac{d\Omega}{dr}) - \frac{\sigma^2 B_0^4}{\rho^2} = 0 \tag{19}$$

Критерий неустойчивости в этом случае определяется из решения уравнения (19)

$$2\Omega\left(2\Omega + r\frac{d\Omega}{dr}\right) \leftarrow \frac{\sigma^2 B_0^4}{\rho^2}$$

Следовательно, магнитное поле в рассматриваемом пределе слабой проводимости оказывает стабилизирующее влияние на течение.

Обратимся снова к уравнению (17), которое учитывает холловские эффекты. В случае идеально проводящей жидкости влияние холловских токов исследовалось в [6, 7, 18]. Отметим, что в [6, 7] при теоретическом исследовании течения сильно проводящей среды отмечалось изменение характера устойчивости при изменении знака угловой скорости вращения Ω. В настоящем рассмотрении исследуем устойчивость в случае слабопроводящей среды. Рассмотрим сначала ситуацию, когда отсутствует сдвиг скорости ($\frac{d\Omega}{dr} = 0$), т.е.

$$\omega^2 - 2i\frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+\chi^2)}\omega - 4\Omega^2 - 4\frac{\sigma B_0^2}{\rho}\frac{\chi}{1+\chi^2}\Omega -$$

$$-\frac{\sigma^2 B_0^4}{\rho^2(1+\chi^2)} = 0 \tag{20}$$

Решение уравнения (20) имеет два корня:

$$\omega_{1,2} = i\frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+\chi^2)} \pm (2\Omega + \frac{\chi}{1+\chi^2}\frac{\sigma B_0^2}{\rho}) \tag{21}$$

Таким образом, независимо от направления вращения жидкости течение устойчиво всегда, так как мнимая часть ω неотрицательна.

В общем случае ($\frac{d\Omega}{dr} \neq 0$) решение уравнения (17) имеет вид:

$$\omega_{1,2} = \frac{i\sigma B_0^2}{\rho(1+\chi^2)} \pm \tag{22}$$

$$\pm\sqrt{\left(2\Omega + \frac{\chi}{1+\chi^2}\frac{\sigma B_0^2}{\rho}\right)\left(2\Omega + \frac{\chi}{1+\chi^2}\frac{\sigma B_0^2}{\rho} + r\frac{d\Omega}{dr}\right)}$$

При $\mathbf{\Omega} \uparrow\uparrow \mathbf{B}_0$, $\Omega > 0$ и для положительного градиента угловой скорости ($\frac{d\Omega}{dr} > 0$) подкоренное выражение положительно и неустойчивость отсутствует. В случае $\frac{d\Omega}{dr} < 0$ возможны варианты. Если величина $2\Omega + \frac{\chi}{1+\chi^2}\frac{\sigma B_0^2}{\rho} + r\frac{d\Omega}{dr} > 0$, течение также устойчиво. Если же $2\Omega + \frac{\chi}{1+\chi^2}\frac{\sigma B_0^2}{\rho} + r\frac{d\Omega}{dr} < 0$, течение неустойчиво по Рэлею, причем холловский член оказывает стабилизирующее воздействие.

В случае $\mathbf{\Omega} \uparrow\downarrow \mathbf{B}_0$, $\Omega > 0$ и ситуация усложняется. Пусть $r\frac{d\Omega}{dr} > 0$. При выполнении условия $2\Omega + \frac{\chi}{1+\chi^2}\frac{\sigma B_0^2}{\rho} > 0$, величина $2\Omega + \frac{\chi}{1+\chi^2}\frac{\sigma B_0^2}{\rho} + r\frac{d\Omega}{dr} > 0$ и течение устойчиво.

Если же $2\Omega + \frac{\chi}{1+\chi^2}\frac{\sigma B_0^2}{\rho} < 0$, то член

$2\Omega + \frac{\chi}{1+\chi^2}\frac{\sigma B_0^2}{\rho} + r\frac{d\Omega}{dr}$ может быть как меньше нуля, так и больше нуля. В последнем случае подкоренное выражение отрицательно и возможно развитие неустойчивости. Физическая причина развития неустойчивости связана с действием холловской части электромагнитной силы (второй член в правой части (12)), которая усиливает возмущение азимутальной скорости жидкости и, тем самым, приводит при отрицательной величине Ω к дестабилизирующему направлению кориолисовой силы в уравнении (11). В этом случае выражение для инкремента неустойчивости $\gamma = i\omega$ принимает вид:

$$\gamma = -\frac{\sigma B_0^2}{\rho(1+\chi^2)} +$$

$$+\sqrt{\left(2|\Omega| - \frac{\chi}{1+\chi^2}\frac{\sigma B_0^2}{\rho}\right)\left(2\Omega + \frac{\chi}{1+\chi^2}\frac{\sigma B_0^2}{\rho} + r\frac{d\Omega}{dr}\right)}$$

Простые выражения для критериев неустойчивости и максимальных инкрементов получатся в случае $\chi >> 1$:

$$-\left(\Omega + \frac{r}{2}\frac{d\Omega}{dr}\right) > \frac{\sigma B_0^2}{2\rho\chi} \quad \gamma_{\max} = -\frac{\sigma B_0^2}{\rho\chi^2} - \frac{r}{2}\frac{d\Omega}{dr}$$

при $\mathbf{\Omega} \uparrow\uparrow \mathbf{B}_0$

$$-\Omega > \frac{\sigma B_0^2}{2\rho\chi} \quad \gamma_{\max} = -\frac{\sigma B_0^2}{\rho\chi^2} + \frac{r}{2}\frac{d\Omega}{dr}$$

при $\mathbf{\Omega} \uparrow\downarrow \mathbf{B}_0$

Заключение

В рамках магнитогидродинамического приближения и локального подхода к анализу устойчивости получено уравнение, описывающее развитие неустойчивости во вращающейся в магнитном поле невязкой среде при учете конечной проводимости и эффекта Холла. Анализ дисперсионного уравнения выполнен для случаев параллельного ($\mathbf{\Omega} \uparrow\uparrow \mathbf{B}_0$) и антипараллельного ($\mathbf{\Omega} \uparrow\downarrow \mathbf{B}_0$) направлений угловой скорости вращения среды и внешнего магнитного поля. Получены выражения для критерия неустойчивости и инкремента, характеризующего нарастание неустойчивости.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-02-12020 офи_м.

Литература

1. *Велихов Е.П.*// ЖЭТФ. 1959. Т. 36 С. 1398.
2. *Веденов А.А., Велихов Е.П. Сагдеев Р.З.*// УФН. 1961. Т. 73. № 4. С. 593.
3. *Chandrasekhar S.* Hydrodinamic and Hydromagnetic Stability. –Oxford: Clarendon Press,1961.
4. *Balbus S.A., Hawley J.F.*// Astrophys. J. 1991. V. 376. P. 214.
5. *Balbus S.A., Hawley J.F.*// Rev. of Mod. Phys. 1998. V. 70. No. 1. P. 1.
6. *Balbus S.A. and Terquem C.*// Astrophys. J. 2001. V. 552. P. 235
7. *Ebrahimi F., Lefebvre B., Forest C.B. and Bhattachrjee* // Phys. Plasmas. 2011. V. 18. P. 062904.
8. *Михайловский А.Б., Ломинадзе Дж.Г., Чуриков А.П. и др.* // Физика плазмы, 2008. Т. 34. № 10. С. 908.
9. *Noguchi K, Pariev V.I., Colgate S.A. et al.* Preprint typeset LATEX styleemulateapj, v.14/09/00, February 1, 2008
10. *Шалыбков Д.А.*// УФН, 2009. Т. 179. № 9. С. 971
11. *Anderson O., Baker W. R., Bratenahl A., et al.* // J. Appl. Phys. 1959. V. **30.** P. 188.
12. *Волосов В.И., Деменев В.В., Стешов А.Г., Чуркин И.Н.* //Прикладная физика. 2000. № 4. С. 22
13. *Карчевский А. И.,. Потанин Е. П, Жданов В. М.* // Письма в ЖТФ. 1978. Т. 4. № 9. С. 507.
14. *Карчевский А.И.,Потанин Е.П.* «Плазменные центрифуги, ИЗОТОПЫ, Свойства, получение, применение», *под редакцией В.Ю. Баранова*. М, ФИЗМАТЛИТ, 2005.
15. *Куликовский А.Г., Любимов Г.А.* Магнитная гидродинамика. - М.: Логос, 2011.
16. *Горбачев Л.П., Потанин Е.П.* // Магнитная гидродинамика. 1969. № 2. С. 93
17. *Потанин Е.П.* // МЖГ. 2013. № 1. С.78.
18. *Велихов Е.П, Ильгисонис В.И., Иванов А.А. и др.* / Труды 34 Межд.конф. по физике плазмы и УТС. Звенигород, 2007.
19. *Desch S. J.*// Astrophys. J. 2004. V. 608. No. 10. P. 509.

Influence of the Hall effects on stability of rotating plasma

N.M. Gorshunov and E.P. Potanin

Kurchatov Institute National Research Centre
1 Kurchatov sq., Moscow, 123182, Russia
Phone: +7 499 196-77-28

Stability of plasma rotating in a space between two circular cylinders in a uniform axial magnetic field is investigated. The analysis is made within local approach in case of finite conductivity of the medium at neglecting of the induced magnetic field. Influence of the Hall effects on stability of a magnetohydrodynamic flow is studied. Existence of an unstable mode is shown in case of the weakly conductive plasma when directions of vectors of the angular speed of the medium and of the magnetic field are opposite.

PACS: 47.20.Qr. - d, 52.30.Cv
Keywords: otating plasma, stability, the Hall effect

Bibliography – 19 references *Received December 20, 2013*