УДК 537.213

Электростатический потенциал заряженного тора

М. К. Макуашев, Х.-М. Х. Байсиев

Рассмотрена задача об электростатическом потенциале заряженного тора. Решение задачи основано на представлении решения уравнения Пуассона в виде интеграла по поверхности тора. Потенциал тора выражен приближённо через эллиптические интегралы первого и второго рода.

PACS: 41.20.Cv
Ключевые слова: потенциал тора, заряженный тороид, тороидальные координаты, поверхностный интеграл, эллиптический интеграл.

Введение

Задача о потенциале заряженного проводящего кольца (тора) представляет большой интерес для ряда областей науки и техники [1–5]. Она излагается во многих курсах электродинамики [6–8]. Обычно решение задачи осуществляется в сферических координатах путем разложения решения по сферическим функциям или интегрированием по контуру тонкого кольца. В работах [4, 5] рассматривается аналогичная задача для гравитационного потенциала, причем решение задачи даётся в виде ряда Лапласа. Цилиндрическая система координат, используемая в [4, 5], не соответствует объекту задачи. Неудачный выбор системы координат приводит к ряду затруднений при решении задачи. Например, внешняя и внутренняя области тора определяются в [4, 5] относительно сферы, радиус которой равен радиусу большого круга тора. Ряды, найденные для потенциала, не стыкуются друг с другом, а именно, остаётся сферическая оболочка, внутри которой эти ряды не справедливы.

Целью данной работы является поиск решения задачи о потенциале заряженного тора в тороидальных координатах. В данном случае можно ожидать исчезновения вышеуказанных затруднений, так как в тороидальных координатах внешняя и внутренняя области определяются относительно поверхности основного тора

$$\tau_0 = \text{const}\left(0 < \tau \le \tau_0, \tau \ge \tau_0\right).$$

Макуашев Мусарби Киляниевич, ведущий научный сотрудник.
Байсиев Хаджи-Мурат Хасанович, заведующий лабораторией.
ФГБУ «Высокогорный геофизический институт».
Россия, 360030, КБР, г. Нальчик, пр. Ленина, 2.
Тел./факс: (8662) 40-24-84. E-mail: vgikbr@rambler.ru

Статья поступила в редакцию 15 февраля 2013 г.

Решение задачи

Решим эту задачу в тороидальных координатах. Рассмотрим тор, малый радиус которого равен *b*, а большой радиус равен *a*. Пусть на поверхности тора находится электрический заряд *Q*. Требуется найти потенциал тора *U* (x, y, z) = *U*(τ, φ, σ).

Потенциал заряженного проводящего тора определяется интегралом [6–8]:

$$U = \frac{Q}{16\pi^3\varepsilon_0 ab}\int_S \frac{ds}{r}, \qquad (1)$$

где ε_0 – электрическая постоянная. Требуется вычислить поверхностный интеграл в (1).

Введем тороидальные координаты [9]:

$$x = \frac{c\,\text{sh}\tau\cos\varphi}{\text{ch}\tau - \cos\sigma},$$
$$y = \frac{c\,\text{sh}\tau\sin\varphi}{\text{ch}\tau - \cos\sigma},$$
$$z = \frac{c\sin\sigma}{\text{ch}\tau - \cos\sigma}$$

$$(0 \le \tau < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\pi \le \sigma \le \pi) \qquad (2)$$

Здесь $c > 0$ — масштабный множитель, который необходимо фиксировать для выбора определённой тороидальной системы координат. Элемент площади в тороидальных координатах равен

$$ds = \frac{c^2}{(\text{ch}\tau - \cos\sigma)^2}\times$$
$$\times\sqrt{\text{sh}^2\tau(d\tau^2 + d\sigma^2)d\varphi^2 + (d\tau d\sigma)^2}.$$

Тороидальные координаты точки *P*, расположенной на поверхности тора, обозначим $\tau_0, \varphi_0, \sigma_0:\ P(\tau_0, \varphi_0, \sigma_0)$. Кольцо есть тор, у которого τ_0 = const; тогда элемент площади поверхности тора равен:

$$ds = \frac{c^2\text{sh}\tau_0\,d\varphi_0\,d\sigma_0}{(\text{ch}\tau_0 - \cos\sigma_0)^2}$$

Расстояние r между точкой $M(\tau, \varphi, \sigma)$, расположенной во внешней области тора, и точкой P $(\tau_0,\varphi_0,\sigma_0)$ в тороидальных координатах выражается в виде [10]:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{c\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\mathrm{ch}\tau-\cos\sigma}\sqrt{\mathrm{ch}\tau_0-\cos\sigma_0}}{\sqrt{\mu-\cos(\sigma-\sigma_0)}} \quad (3)$$

где $\mu=\mathrm{ch}\tau\mathrm{ch}\tau_0-\mathrm{sh}\tau\mathrm{sh}\tau_0\cos(\varphi-\varphi_0)>0$. Тогда из (1) для потенциала тора получаем следующее выражение:

$$U=\frac{Qc\,\mathrm{sh}\tau_0\sqrt{\mathrm{ch}\tau-\cos\sigma}}{16\sqrt{2}\pi^3\varepsilon_0 ab}\times$$

$$\times\int_0^{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\sqrt{A-B\cos(\varphi_0-\varphi)}}\frac{d\varphi_0 d\sigma_0}{(\mathrm{ch}\tau_0-\cos\sigma_0)^{\frac{3}{2}}},$$

где $A=\mathrm{ch}\tau\,\mathrm{ch}\tau_0-\cos(\sigma-\sigma_0)$, $B=\mathrm{sh}\tau\mathrm{sh}\tau_0$, $0<\tau\leq\tau_0$. Введя новую переменную $\psi=\varphi_0-\varphi$, преды-ду-щее выражение представляем в виде:

$$U=\frac{Qc\,\mathrm{sh}\tau_0\sqrt{\mathrm{ch}\tau-\cos\sigma}}{16\sqrt{2}\pi^3\varepsilon_0 ab}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\sigma_0}{(\mathrm{ch}\tau_0-\cos\sigma_0)^{3/2}}\int_{-\upsilon}^{2\pi-\upsilon}\frac{d\psi}{\sqrt{A-B\cos\psi}}.$$

Если подынтегральная функция является периодической, то имеет место формула [11]

$$\int_\alpha^{\omega+\alpha}f(x)dx=\int_0^\omega f(x)dx,$$

где ω – период функции. Затем заменой $\psi = \psi - \pi$ приведём предыдущее выражение к виду:

$$U=\frac{Qc\,\mathrm{sh}\tau_0\sqrt{\mathrm{ch}\tau-\cos\sigma}}{8\sqrt{2}\pi^3\varepsilon_0 ab}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\sigma_0}{(\mathrm{ch}\tau_0-\cos\sigma_0)^{3/2}}\int_0^\pi\frac{d\psi}{\sqrt{A+B\cos\psi}}.$$

Интеграл по ψ выражается через эллиптический интеграл [12]:

$$\int_0^\pi\frac{d\psi}{\sqrt{A+B\cos\psi}}=\frac{2}{\sqrt{A+B}}K\left(\sqrt{\frac{2B}{A+B}}\right),$$

$$(A>B>0)$$

где K – полный эллиптический интеграл первого рода. Тогда для потенциала тора находим:

$$U=\frac{Qc\,\mathrm{sh}\tau_0\sqrt{\mathrm{ch}\tau-\cos\sigma}}{8\sqrt{2}\pi^3\varepsilon_0 ab}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{+\pi}K\left(\sqrt{\frac{2B}{A+B}}\right)\frac{d\sigma_0}{\sqrt{A+B}\cdot(\mathrm{ch}\tau_0-\cos\sigma_0)^{3/2}}. \quad 4)$$

Сумму $A+B$ можно представить в виде $A+B=\mathrm{ch}(\tau+\tau_0)-\cos(\sigma_0-\sigma)$. Интеграл в этом выражении мы возьмём приближённо, для чего воспользуемся тем, что $\mathrm{ch}(\tau+\tau_0)>\cos(\sigma_0-\sigma)$:

$$U=\frac{Qc\,\mathrm{sh}\tau_0\sqrt{\mathrm{ch}\tau-\cos\sigma}}{8\sqrt{2}\pi^3\varepsilon_0 ab}\times$$

$$\times\frac{K\left(\sqrt{\frac{2B}{A+B}}\right)}{\sqrt{A+B}}\cdot\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\sigma_0}{(\mathrm{ch}\tau_0-\cos\sigma_0)^{3/2}}. \quad (5)$$

Здесь $A+B\approx\mathrm{ch}(\tau+\tau_0)$. Интеграл в (5) выражается через эллиптический интеграл [12]:

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(\alpha-\beta\cos x)^3}}=\frac{2}{(\alpha-\beta)\sqrt{\alpha+\beta}}E(\psi,k)$$

$$(\alpha\succ\beta\succ0,\ 0\leq x\leq\pi)$$

где $\psi=\arcsin\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)(1-\cos x)}{2(\alpha+\beta\cos x)}}$, $\quad k=\sqrt{\frac{2\beta}{\alpha+\beta}}$;

$E(\psi,k)$ – неполный эллиптический интеграл второго рода. Тогда для потенциала заряженного тора получаем:

$$U=\frac{cQ}{4\sqrt{2}\pi^3\varepsilon_0 ab}\times$$

$$\frac{\mathrm{sh}\tau_0\sqrt{ch\tau-\cos\sigma}}{(\mathrm{ch}\tau_0-1)\sqrt{\mathrm{ch}\tau_0+1}}\frac{1}{\sqrt{A+B}}\times$$

$$\times K\left(\sqrt{\frac{2B}{A+B}}\right)E\left(\sqrt{\frac{2}{\mathrm{ch}\tau_0+1}}\right), \quad (6)$$

где $E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

Заранее заданы большой и малый радиусы тора. Необходимо через них выразить тороидальную координату τ_0 заданного тора. Для этого поступаем следующим образом. Как известно, тор получается вследствие вращения вокруг оси z окружности [13, 14]

$$(y-c\,\mathrm{cth}\tau_0)^2+z^2=\frac{c^2}{\mathrm{sh}^2\tau_0}.$$

Следовательно, большой и малый радиусы тора равны $a=c\,\mathrm{cth}\tau_0,\ b=\frac{c}{\mathrm{sh}\tau_0}$.

Тогда получаем, что на поверхности тора тороидальная координата τ_0 равна $\tau_0=\mathrm{Arch}\frac{a}{b}$.

Потенциал на поверхности тора равен:

$$U_0=\frac{cQ}{4\sqrt{2}\pi^3\varepsilon_0 ab}\times$$

$$\frac{\mathrm{sh}\tau_0}{(\mathrm{ch}\tau_0-1)\sqrt{\mathrm{ch}\tau_0+1}}\frac{\sqrt{\mathrm{ch}\tau_0-\cos\sigma}}{\sqrt{\mathrm{ch}2\tau_0}}\times$$

$$\times K\left(\sqrt{\frac{2\mathrm{sh}^2\tau_0}{\mathrm{ch}2\tau_0}}\right)E\left(\sqrt{\frac{2}{\mathrm{ch}\tau_0+1}}\right).$$

Отношение потенциалов равно:

$$\frac{U}{U_0}=\sqrt{\frac{\mathrm{ch}2\tau_0}{\mathrm{ch}(\tau+\tau_0)}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\mathrm{ch}\tau-\cos\sigma}{\mathrm{ch}\tau_0-\cos\sigma}}\times\frac{K\left(\sqrt{\dfrac{2B}{A+B}}\right)}{K\left(\dfrac{\sqrt{2}\mathrm{sh}\tau_0}{\sqrt{\mathrm{ch}(\tau+\tau_0)}}\right)}.$$

На рис. 1 и 2 приведены графики зависимости внешнего потенциала заряженного тора от координаты τ ($0<\tau\le\tau_0$), которые были построены при следующих значениях исходных параметров: a = 0,3 м, 1,5 м, b = 0,2 м. Рис. 1 и 2 построены при фиксированной координате $\sigma=\pi$. Координата $\sigma=\pi$ соответствует направлению к центру кольца. Так как потенциал не зависит от тороидальной координаты φ, то на этих рисунках представлено распределение потенциала над плоскостью большого круга тора. Это распределение симметрично относительно указанной плоскости.

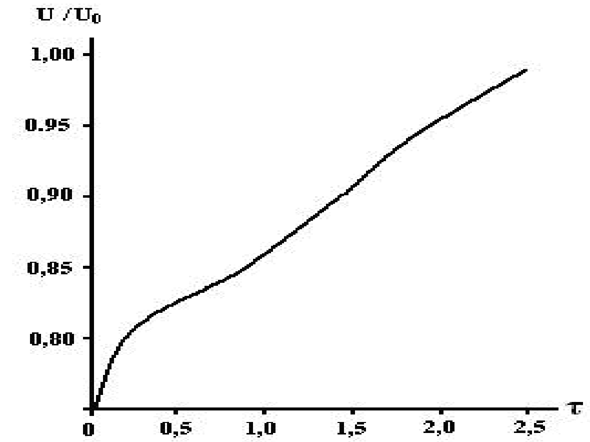

Рис. 1. Зависимость относительного потенциала U/U_0 от координаты τ (b = 0,2 м, a = 1,5 м, τ_0 =2,703507).

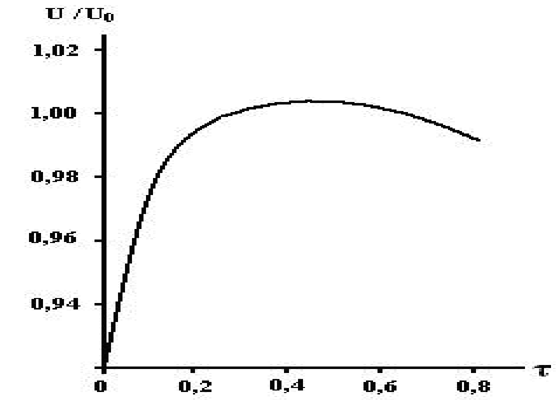

Рис.2. Зависимость относительного потенциала U/U_0 от координаты τ (b = 0,2 м, a = 0,3 м, τ_0 = 1,7627).

Заключение

Как показано в работе, в тороидальных координатах потенциал заряженного тора удаётся приближённо выразить через полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Так как потенциал симметричен относительно оси z, то из приведенных графиков видно, что внутри кольца образуется «потенциальная яма».

Для вычисления потенциала тора можно воспользоваться известным разложением обратного расстояния по тороидальным функциям [10]. Но оно довольно громоздкое, и интегралы по σ и φ, которые встречаются в этом случае, также громоздкие; при всём этом результат получается малопригодным для практического применения. В то же время полученный выше результат достаточно компактен и легко применим в практических целях.

Литература

1. *Шушкевич Г.Ч.* // ЖТФ. 1997. Т. 67. № 4. С. 123
2. *Шушкевич Г.Ч.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. № 7. С. 1
3. *Шушкевич Г.Ч.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 5. С. 20.
4. *Кондратьев Б.П., Дубровский А.С., Трубицына Н.Г., Мухаметшина Э.Ш.* // ЖТФ. 2009. Т.79. № 2. С. 17.
5. *Кондратьев Б.П., Трубицына Н.Г.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. № 1. С. 23
6. *Пановский В.,Филипс М.* Классическая электродинамика. - М.: Физматгиз, 1963.
7. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика - М.: Мир, 1965.
8. *Топтыгин И.Н.* Современная электродинамика. ч.1.-Москва – Ижевск, 2002.
9. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1968.
10. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: Издатинлит, 1952.
11. *Фихтенгольц И.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – т. II. – М.: Физматгиз., 1959.
12. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – М.: Наука, 1981.
13. *Бермант А.Ф.* Отображения. Криволинейные координаты. Преобразования. Формулы Грина. – М.: Физматгиз, 1958.
14. Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1985.

Electrostatic potential of charged torus

M.K. Makuashev and Kh.-M. Kh. Baysiev

High Mountain Geophysical Institute,
2 Lenin's av., Nalchik, 360030, Russia
E- mail: vgikbr@rambler.ru

The problem for an electrostatic potential of the charged torus is considered. The decision of a problem is based on representation of the decision of the Poisson equation in the form of integral on a torus surface. The torus potential is expressed approximately through elliptic integrals of the first and second sort.

PACS numbers: 41.20.Cv
Keywords: torus potential, charged torus, toroidal coordinates, superficial integral, elliptic integral.

Bibliography –14 references *Received February 15, 2013*