УДК 621.371.34

Оценка поля электромагнитного импульса в параксиальной области

Н. Д. Наумов

Рассматривается задача о распространении в диспергирующей и поглощающей среде импульса, формируемого с помощью параболического рефлектора. Для описания пространственно-временной эволюции импульса используется метод параболического уравнения. Разработанный метод позволяет оценить для ближней и дальней зоны поле импульса в параксиальной области с учетом влияния эффекта дифракции и свойств среды. Получено аналитическое выражение для поля импульса на оси рефлектора. Показано, что для электромагнитного импульса в вакууме это выражение согласуется с известным результатом, что во временной области сигнал в зоне Фраунгофера соответствует производной исходного импульса. Проанализировано влияние поглощения на искажение акустического импульса. Рассмотрена модельная задача о компрессии электромагнитного импульса в холодной плазме без столкновений.

PACS: 41.20.Jb

Ключевые слова: акустический импульс, электромагнитный импульс, дифракция, дисперсия, поглощение волн.

Введение

Интерес к вопросам распространения импульсных сигналов обусловлен совершенствованием систем связи, локации и дистанционного зондирования [1]. Основными факторами, определяющими пространственно-временную эволюцию импульса, являются эффект дифракции, а также дисперсионные и поглощающие свойства среды. Полный учет всех этих факторов представляет собой довольно сложную задачу, решение которой требует применения численных методов. Аналитические результаты известны для зоны Фраунгофера, где эффект дифракции можно учесть введением сомножителя, обратно пропорционального расстоянию от излучателя, а для оценки влияния среды можно использовать результаты решения одномерной задачи.

В связи с этим несомненный интерес представляет разработка метода оценки поля импульса в ближней зоне.

Целью данной работы является решение задачи о распространении в диспергирующей и поглощающей среде импульса, формируемого с помощью параболического рефлектора, причем используется метод параболического уравнения. Это позволяет получить аналитические результаты для поля импульса в параксиальной области с учетом указанных выше факторов и неоднородности распределения поля на апертуре.

Наумов Николай Дмитриевич, ведущий научный сотрудник.
ФГКУ «12 ЦНИИ Минобороны России».
Россия, 141307, Московская обл., г. Сергиев Посад-7.
E-mail: ndnaumov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 23 декабря 2015 г.

© Наумов Н. Д., 2016

Метод оценки

Как известно [2], метод параболического уравнения позволяет описать распространение волнового пучка с узким угловым спектром, т. е. когда выполняется условие:

$$\omega >> 2\pi\frac{c}{a}, \tag{1}$$

где a — радиус апертуры (остальные обозначения — общепринятые в электродинамике). В этом случае для аксиально-симметричного волнового пучка приближенное решение уравнения Гельмгольца в слабопоглощающей среде имеет вид [3]:

$$u = A(\omega, r, z)\exp(iknz - \mu z) \tag{2}$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, $n = n(\omega)$ — показатель преломления среды, $\mu = \mu(\omega)$ — амплитудный коэффициент поглощения. Комплексная амплитуда A является решением параболического уравнения с мнимым коэффициентом диффузии:

$$2ikn\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} = 0. \tag{3}$$

В случае импульсного излучения условие (1) может не выполняться для низких частот. Тогда

выражение (2) будет приближенным решением уравнения Гельмгольца только в параксиальной области, т. е. когда выполняется соотношение:

$$\sqrt{r^2+z^2} \approx z+\frac{r^2}{2z},$$

что показано в [2] на примере точечного излучателя, для которого заведомо не выполняется условие (1).

Таким образом, если в плоскости $z = 0$ излучается импульс с неоднородным распределением поля на апертуре излучателя, т. е. $u(t, r, 0) = f(t)\varphi(r)$, то для оценки поля импульса в параксиальной области можно поступить следующим образом. Найдем решение уравнения (3), для которого начальное условие имеет вид:

$$A(\omega, r, 0) = f(\omega)\varphi(r),$$
$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(i\omega t)\,dt.$$

Исходя из полученного результата, можно затем вычислить поле импульса на расстоянии z от апертуры:

$$u(t, r, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega, r, z)U(\omega, t, z)\,d\omega,$$
$$U = \exp(iknz - i\omega t - \mu z). \qquad (4)$$

Будем считать, что для формирования импульса используется параболический рефлектор. Тогда распределение амплитуды поля на апертуре может быть задано в виде «параболы на пьедестале» [4], т. е. функция $\varphi(r)$ в начальном условии для уравнения (3) имеет вид:

$$\varphi(r) = u_0\left[1-(1-h)\xi^2\right]H(1-\xi),$$

где $\xi = r/a$, h — постоянная (высота пьедестала), $H(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Используя известное выражение для функции Грина рассматриваемой краевой задачи, найдем решение уравнения (3):

$$A(\omega, r, z) = -2i\eta u_0 f(\omega)\exp\left(i\eta\xi^2\right)\times$$
$$\times\int_0^1\left[1-(1-h)x^2\right]\exp\left(i\eta x^2\right)J_0(2\eta\xi x)\,x\,dx, \qquad (5)$$

где $\eta = knb$, $b = a^2/2z$, $J_0(x)$ — функция Бесселя.

Выражения (4), (5) позволяют оценить поле импульса в параксиальной области с учетом влияния среды и эффекта дифракции. Для вычисления фигурирующих в этих выражениях интегралов необходимо использовать численные методы. Продвинуться в аналитических вычислениях можно для поля на оси рефлектора, т. к. при $r = 0$ выражение (5) существенно упрощается:

$$A(\omega, 0, z) =$$
$$= u_0 f(\omega)\left[1-h\exp(i\eta)-\frac{i}{\eta}(1-h)\{1-\exp(i\eta)\}\right].$$

Подставляя этот результат в выражение (4), для поля на оси найдем:

$$u(t, 0, z) = u_0\Big[\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)V(\omega, t, z)\,d\omega -$$
$$-i(1-h)\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)W(\omega, t, z)\,d\omega\Big]. \qquad (6)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$V = U\left[1-h\exp(i\eta)\right],$$
$$W = \frac{U}{\eta}\left[1-\exp(i\eta)\right].$$

Электромагнитный импульс в вакууме

Наиболее простой является задача о распространении электромагнитного импульса в вакууме, т. е. когда $n = 1$, $\mu = 0$. В этом случае искажение импульса обусловлено только эффектом дифракции. Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию нулевого значения спектральной функции $f(\omega)$ на нулевой частоте $\omega = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0,$$

то из (6) для поля на оси Oz получается следующий результат:

$$u(t, 0, z) =$$
$$= u_0\left\{f(t_1) - hf(t_2) - (1-h)\left[F(t_1)-F(t_2)\right]\right\}, \qquad (7)$$

где введены обозначения:

$$t_1 = t-\frac{z}{c},\ \ t_2 = t_1-\frac{b}{c},\ \ F(t) = \frac{c}{b}\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx.$$

В качестве примера рассмотрим волновой пакет:

$$f(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{4T^2}\right)\sin\Omega t, \qquad (8)$$

где T, Ω — постоянные. В этом случае функция $F(t)$ имеет следующий вид:

$$F(t)=i\frac{cT}{2b}\sqrt{\pi}\exp\left(-\Gamma^2\right)\left[\operatorname{erf}\left(\frac{\tau}{2}+i\Gamma\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{\tau}{2}-i\Gamma\right)\right],$$

где $\tau = t/T$, $\Gamma = \Omega T$, $\operatorname{erf}(x)$ — интеграл вероятностей [7]. Отметим, что полуширина частотного спектра импульса (9) вблизи точек экстремума $\omega = \pm\Omega$ по уровню e^{-1} равна $1/T$.

Влияние дифракции на распространение импульса характеризуется параметром $D = a^2/2ct_p$ [5], где t_p — длительность импульса. При выполнении условия $z >> D$ выражение (7) можно представить в более простом виде:

$$u(t,0,z)=u_0(1+h)\frac{b}{2c}\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=t_1}. \qquad (9)$$

Выражение (9) согласуется с известным результатом, что во временной области сигнал в зоне Фраунгофера соответствует производной исходного импульса [6].

Акустический импульс

Для акустического импульса во многих случаях можно пренебречь влиянием дисперсии и ограничиться только учетом поглощения. Если $n = 1$, $\mu = \alpha\omega^2$, то из (6) для нечетной функции $f(t)$ получается аналогичное (7) выражение:

$$u(t,0,z)=u_0\times$$
$$\times\left\{g(t_1,z)-hg(t_2,z)-(1-h)\left[G(t_1,z)-G(t_2,z)\right]\right\},$$

$$g(t,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega f(\omega)\exp\left(-\alpha z\omega^2-i\omega t\right),$$
$$G(t,z)=\frac{c}{b}\int_{-\infty}^{t}g(x,z)dx. \qquad (10)$$

В частности, для импульса (8) фигурирующие в выражении (10) функции имеют вид:

$$g(t,z)=\frac{1}{\sqrt{1+\beta}}\exp\left[-\frac{\tau^2+4\beta\Gamma^2}{4(1+\beta)}\right]\sin\frac{\Omega t}{1+\beta},$$

$$G(t,z)=i\frac{cT}{2b}\sqrt{\pi}\exp\left(-\Gamma^2\right)\times$$
$$\times\left[\operatorname{erf}\left(\frac{\tau+2i\Gamma}{2\sqrt{1+\beta}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{\tau-2i\Gamma}{2\sqrt{1+\beta}}\right)\right],$$

где $\beta=\alpha z/T^2$. Этот пример показывает, что, кроме эффекта затухания, поглощение приводит к прогрессирующему уширению импульса, а также к постепенному уменьшению несущей частоты.

Электромагнитный импульс в плазме

Для электромагнитных волн плазма является диспергирующей средой. Групповая скорость в плазме зависит от частоты, поэтому можно получить пространственно-временную фокусировку импульса, если мгновенная частота возрастает в течение импульса. Для иллюстрации эффекта компрессии была рассмотрена модельная задача о распространении в холодной плазме без столкновений двух электромагнитных импульсов:

$$f_1(t)=\Phi(t)\sin\Omega(t)t,$$
$$f_2(t)=\Phi(t)\sin\Omega_0 t$$

в случае однородно возбужденной апертуры, т. е. в выражении (6) имеем следующие значения:

$$h=1,\quad n(\omega)=\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}},\quad \mu=0.$$

Здесь огибающая $\Phi(t)$ представляет собой функцию трапецеидального вида, длительность которой на полувысоте равна $10T$, где T — длительность нарастания и спада импульса, а частота следующим образом зависит от времени на отрезке $0 \le t \le t_p$:

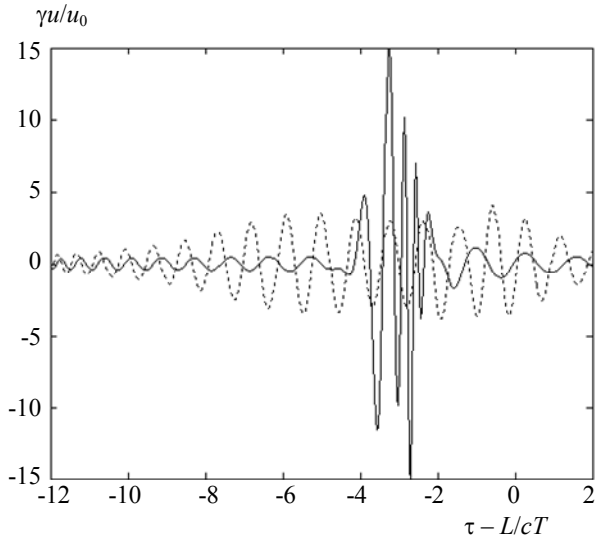
$$\Omega(t)=\omega_p\left[1-\left(\frac{n_1n_2t_p}{n_2t_p-t(n_2-n_1)}\right)^2\right]^{-1/2}, \qquad (11)$$

где введены обозначения $n_1 = n(\Omega_1)$, $n_2 = n(\Omega_2)$, Ω_1 — частота в начале импульса, $\Omega_1 < \Omega_2$ — частота в конце импульса, $\Omega_0 = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$.

С помощью лучевой кинематики [8] нетрудно убедиться в том, что для импульса с зависящей от времени частотой (11) точка компрессии находится от апертуры на расстоянии:

$$L=ct_p\frac{n_1n_2}{n_2-n_1}.$$

Результаты численных расчетов при $\omega_p = \pi/T$, $\Omega_1 = 1{,}5\omega_p$, $\Omega_2 = 3\omega_p$, $cT/a = 6$ представлены на рисунке, где $\gamma = cTL/a^2$. Сплошная кривая соответствует импульсу с зависящей от времени частотой, пунктирная кривая — импульсу с неизменной частотой.



Компрессия электромагнитного импульса в плазме.

Заключение

Полученные результаты позволяют для параксиальной области оценить поле импульса, формируемого с помощью параболического рефлектора, что представляет интерес для различных практических задач. Кроме этого, нужно отметить следующее обстоятельство. При $h = 1$ из (7) для поля на оси Oz найдем:

$$u(t, 0, z) = u_0\left[f(t_1) - f(t_2)\right]. \qquad (12)$$

Точное выражение для поля импульса на оси в случае однородно возбужденной круглой апертуры имеет следующий вид [9]:

$$u(t, 0, z) = \\ = u_0\left[f(t_1) - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} f\left(t - \frac{1}{c}\sqrt{z^2 + a^2}\right)\right]. \qquad (13)$$

Приближенный результат (12) получается из выражения (13) при $z >> a$. Таким образом, получаемые с помощью метода параболического уравнения результаты для поля импульса применимы, если расстояние от апертуры значительно больше радиуса апертуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф.* // Радиофизика и радиоастрономия. 2008. Т. 13. № 4. С. 270.

2. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн. — М.: Наука, 1990.

3. *Белорозов А. В., Кудряшов А. С., Наумов Н. Д.* // Прикладная физика. 2012. № 5. С. 11.

4. *Кочержевский Г. Н.* Антенно-фидерные устройства. — М., Радио и связь, 1981.

5. *Балакирев В. А., Гладков В. С., Сидельников Г. Л.* // Электромагнитные явления. 1998. Т. 1. № 4. С. 522.

6. *Астанин Л. Ю., Костылев А. А.* Основы сверхширокополосных радиолокационных измерений. — М.: Радио и связь, 1989.

7. Справочник по специальным функциям, под ред. *М. Абрамовица* и *И. Стиган*.— М.: Наука, 1979.

8. *Вайнштейн Л. А.* // УФН. 1976. Т. 118. Вып. 2. С. 339.

9. *Кирьяшкин В. В., Чубинский Н. П.* // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. № 1. С. 24.

Pulse field estimation for a paraxial region

N. D. Naumov

12-th Central Research Institute
Sergiev Posad-7, Moscow Region, 141300, Russia
E-mail: ndnaumov@mail.ru

Received December 23, 2015

On the basis of the parabolic equation, a technique of the pulse field estimation for paraxial region is developed. The approach proposed takes into account diffraction, dispersion and wave absorption by medium.

PACS: 41.20.Jb

Keywords: acoustical pulse, electromagnetic pulse, diffraction, dispersion, wave absorption.

REFERENCES

1. O. V. Lazarenko and L. F. Chernogor, Radiofizika i Radioastrinomiya **13** (4), 270 (2008).

2. M. B. Vinogradova, O. V. Rudenko, and A. P. Sukhorukov, *Theory of Waves* (Nauka, Moscow, 1990) [in Russian].

3. A. V. Belorozov, A. S. Kudryashov, and N. D. Naumov, Prilkladnaya Fizika, No. 5, 11 (2012).

4. G. N. Kocherzhevskii, *Antenna-Feeder Devices* (Radio Svyaz', Moscow, 1981) [in Russian].

5. V. A. Balakirev, V. S. Gladkov, and G. L. Sidei'nikov, Elekromagnitnye Yavleniya **1** (4), 522 (1998).

6. L. Yu. Astanin and A. A. Kostylev, *Foundations of Superbroadband Radar Measurements* (Radio Svyaz', Moscow, 1989) [in Russian].

7. *Handbook on Special Functions*. Ed. by M. Abromovits and I. Stigan. (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].

8. L. A. Vainshtein, Phys, Usp. **118,** 339 (1976).

9. V. V. Kir'yashkin and N. P. Chubinskii, J. Commun. Technol. Electron. **47,** 24 (2002).