ОБЩАЯ ФИЗИКА
GENERAL PHYSICS

УДК 538.945 PACS: 74.25.Ha
EDN: DYMDHT

Модифицированное уравнение Лондонов для проникновения переменного магнитного поля в сверхпроводник в мейснеровском состоянии

К. А. Осипов, А. Н. Варюхин, А. В. Гелиев, В. С. Захарченко

Впервые выведено модифицированное уравнение Лондонов для проникновения переменного магнитного поля в сверхпроводники I-го и II-го родов, находящихся в мейснеровском состоянии. В рамках данного уравнения получена зависимость глубины проникновения переменного магнитного поля λ_ω в сверхпроводник от частоты изменения магнитного поля и долей концентраций нормальных и сверхпроводящих электронов (α_s и α_n), т. е. фактически от температуры сверхпроводника. Получены выражения для глубины проникновения переменного магнитного поля с учетом тока смещения в уравнениях Максвелла и с учетом различия эффективных масс нормальных и сверхпроводящих электронов. Модифицированное уравнение Лондонов позволяет описывать нестационарные процессы в сверхпроводниках при индуцированном электрическом поле, которое возбуждает как сверхпроводящие, так и нормальные токи согласно двухжидкостной модели сверхпроводников.

Ключевые слова: сверхпроводимость, глубина проникновения переменного магнитного поля, двухжидкостная модель, нормальные электроны, сверхпроводящие электроны, модифицированное уравнение Лондонов, эффект Мейснера.

DOI: 10.51368/2307-4469-2024-12-1-5-17

Введение

При описании переходных процессов в сверхпроводниках обычно пользуются двухжидкостной моделью [1–4], согласно которой сверхпроводник состоит из нормальных и сверхпроводящих электронов. При переменных условиях в сверхпроводнике индуцируется электрическое поле, которое ускоряет два типа электронов. Так называемые «сверхпроводящие» электроны не рассеивают энергию посредством объединения в «куперовские» пары [5–8], поскольку данное состояние является более энергетически выгодным, а при движении нормальных электронов происходит диссипация энергии в виде джоулева тепла.

При выводе уравнения для проникновения магнитного поля в сверхпроводник в стационарных условиях обычно используют только уравнение движения для сверхпроводящих электронов, что логично, поскольку после выхода на стационарный режим электрическое поле в сверхпроводнике равно нулю, поскольку любое конечное значение электрического поля приводило бы к бесконечным токам, и

Осипов Константин Анатольевич, в.н.с., к.т.н.
E-mail: kaosipov@ciam.ru
Варюхин Антон Николаевич, зам. ген. директора – директор исследовательского центра, к.т.н.
Гелиев Александр Валикоевич, нач. отдела, к.ф.-м.н.
Захарченко Виктор Савельевич, нач. отдела, к.т.н.
ГНЦ, федеральное автономное учреждение «Центральный институт авиационного моторостроения имени П. И. Баранова».
Россия, 111116, Москва, ул. Авиамоторная, 2.

Статья поступила в редакцию 20.07.2023
После доработки 5.10.2023
Принята к публикации 26.10.2023

соответственно нормальные токи в сверхпроводнике после переходного процесса затухают, а сверхпроводящие электроны движутся по инерции. Коротко покажем один из возможных вариантов вывода уравнения Лондонов для глубины проникновения магнитного поля [9–12]. Из уравнения движения для сверхпроводящих электронов, предварительно умножив его на комбинацию $(-en_s/m)$, получим связь электрического поля с плотностью сверхпроводящего тока:

$$m\frac{\partial \boldsymbol{V}_s}{\partial t} = -e\boldsymbol{E} \Leftrightarrow \boldsymbol{E} = \frac{m}{e^2 n_s}\frac{\partial \boldsymbol{j}_s}{\partial t}, \qquad (1)$$

где под массой m следует иметь ввиду эффективную массу сверхпроводящего электрона m^* (или половину от массы куперовской пары), $\boldsymbol{V}_s$ – скорость сверхпроводящих электронов, e – электрический заряд электрона, n_s – концентрация сверхпроводящих электронов. Подставив выражение для электрического поля (1) в одно из уравнений Максвелла, описывающее закон электромагнитной индукции Фарадея $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m}{e^2 n_s}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{j}_s + \frac{1}{c}\boldsymbol{H}\right) = 0. \qquad (2)$$

Подставив в вышеприведенное уравнение (2) выражение для плотности тока сверхпроводящего тока $\boldsymbol{j}_s$ через магнитное поле (из другого уравнения Максвелла $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = (4\pi/c)\boldsymbol{j}_s$), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m}{e^2 n_s}\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} + \frac{1}{c}\boldsymbol{H}\right) = 0. \qquad (3)$$

Пользуясь формулой из векторного анализа и соленоидальностью магнитного поля $\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0$, получим $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} - \Delta\boldsymbol{H} = -\Delta\boldsymbol{H}$. Тогда справедливо следующее выражение:

$$\Delta\boldsymbol{H} - \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2}\boldsymbol{H} = f(\vec{\boldsymbol{r}}), \qquad (4)$$

где $f(\vec{\boldsymbol{r}})$ – произвольная функция координат. Привлекая экспериментальный факт о вытеснении магнитного поля из объема сверхпроводника, приходим к тому, что эта произвольная функция координат должна тождественно равняться нулю $f(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0$. Введя глубину проникновения магнитного поля $\lambda_s^2(T) = mc^2/4\pi n_s(T)e^2$, получим следующее уравнение:

$$\Delta\boldsymbol{H} - \frac{1}{\lambda_s^2}\boldsymbol{H} = 0. \qquad (5)$$

Выше был приведен один из возможных способов вывода уравнения для проникновения магнитного поля в объем сверхпроводника. В данной работе будем рассматривать процессы, изменяющиеся со временем. Получим модифицированное уравнение Лондонов с учетом возбуждения не только сверхпроводящих, но и нормальных электронов, зависимость глубины проникновения переменного магнитного поля от частоты его изменения (либо транспортного тока, протекающего через сверхпроводящий слой) и концентрации нормальных или сверхпроводящих электронов (т. е. фактически от температуры).

Вывод модифицированного уравнения Лондонов для проникновения переменного магнитного поля в сверхпроводник в мейснеровском состоянии

Запишем уравнения движения для нормальных и сверхпроводящих электронов согласно двухжидкостной модели сверхпроводников под действием индуцированного электрического поля, возникающего при изменяющихся условиях:

$$\begin{cases} m\dfrac{d\boldsymbol{V}_n}{dt} = -\dfrac{m}{\tau}\boldsymbol{V}_n - e\boldsymbol{E}, \\ m\dfrac{d\boldsymbol{V}_s}{dt} = -e\boldsymbol{E} \end{cases}. \qquad (6)$$

На данном этапе не будем учитывать возможное различие эффективных масс сверхпроводящих и нормальных электронов вследствие взаимодействия электронов с периодическим потенциалом кристаллической решетки в сверхпроводящем материале. Первое уравнение в (6) описывает движение нормальных электронов, где слагаемое $-(m/\tau)\boldsymbol{V}_n$ отвечает за рассеяние энергии электронов вследствие взаимодействия с кристаллической решеткой, второе уравнение в (6) описывает движение сверхпроводящих электронов, из которого видно, что любое ненулевое значение электрического поля приводит к ускорению куперовских пар. Умножив первое уравнение в (6) на $(-en_n)$, а второе – на $(-en_s)$, где n_n и n_s – концентрации нормальных и сверхпроводящих электронов, и используя определение плотности соответствующих токов $\boldsymbol{j}_n = -en_n\boldsymbol{V}_n$, $\boldsymbol{j}_s = -en_s\boldsymbol{V}_s$, в результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \tau\dfrac{d\boldsymbol{j}_n}{dt} + \boldsymbol{j}_n = \alpha_n\sigma_0\boldsymbol{E}, \\ \tau\dfrac{d\boldsymbol{j}_s}{dt} = \alpha_s\sigma_0\boldsymbol{E} \end{cases} \qquad (7)$$

где τ – время релаксации нормальных электронов в сверхпроводнике, $\alpha_s = n_s/n$ и $\alpha_n = n_n/n$ – доли концентраций двух типов электронов, $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ – удельная проводимость сверхпроводника в нормальном состоянии, n – концентрация всех электронов проводимости, (сумма концентраций нормальных и сверхпроводящих электронов $n = n_n + n_s$).

Электрическое поле должно являться функцией координат, частоты при синусоидальном изменении внешних условий (магнитных полей) и времени. Если бы индуцированное электрическое поле не зависело от времени и не стремилось бы к нулю при выходе на стационарный режим, любое конечное значение напряженности электрического поля приводило бы к бесконечным значениям сверхпроводящих токов, что приводило бы к противоречию с точки зрения классической физики. Однако следует отметить, что с точки зрения квантовой механики сверхпроводящая лента не может через себя пропустить сколько угодно большой ток. Рост тока сопровождается увеличением скорости куперовских пар и одновременным уменьшением их концентрации, т. е. фактически при росте тока происходит распаривание куперовских пар, и сверхпроводящий материал потеряет свои сверхпроводящие свойства. Таким образом, даже гипотетическое конечное значение электрического поля не будет приводить к противоречиям.

Связь электрического поля с токами можно получить, если сложить два уравнения в (7) и воспользоваться $\alpha_s + \alpha_n = 1$:

$$\boldsymbol{j}_n + \tau\left(\frac{d\boldsymbol{j}_s}{dt} + \frac{d\boldsymbol{j}_n}{dt}\right) = \sigma_0\boldsymbol{E}. \qquad (8)$$

Приведем два уравнения из системы уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \approx \dfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \end{cases}. \qquad (9)$$

На данном этапе пренебрежем слагаемым для тока смещения $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}$ по сравнению с плотностью тока $\boldsymbol{j}$ во втором уравнении системы (9). Также следует иметь в виду, что суммарный ток состоит из нормального и сверхпроводящего токов $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_s + \boldsymbol{j}_n$. Взяв ротор от выражения (8) $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \dfrac{1}{\sigma_0}\left\{\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n + \tau\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}\right\}$ и воспользовавшись уравнением Максвелла, описывающим закон электромагнитной индукции Фарадея (9), получим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} + \frac{\tau}{\sigma_0}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sigma_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n = 0. \qquad (10)$$

Рассмотрим синусоидальное изменение внешний условий (магнитный полей или токов), т. е. в силу линейности вышеприведенных уравнений будет справедливо следующее: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0e^{i\omega t}$, $\boldsymbol{j}_s = \boldsymbol{j}_{s0}e^{i\omega t}$, $\boldsymbol{j}_n = \boldsymbol{j}_{n0}e^{i\omega t}$, $\boldsymbol{j} = \left(\boldsymbol{j}_{n0} + \boldsymbol{j}_{s0}\right)e^{i\omega t}$. Преобразуем выражение с ротором от плотности нормального тока в (10):

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sigma_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n = \frac{1}{\sigma_0}\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{j}_{n0}e^{i\omega t}\right) = \\ = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{\sigma_0}\frac{1}{i\omega}\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{j}_{n0}e^{i\omega t}\right)\right\} = \frac{-i}{\omega\sigma_0}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n. \end{gathered} \qquad (11)$$

Подставив (11) в (10), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{c}\boldsymbol{H}+\frac{\tau}{\sigma_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}+\frac{-i}{\omega\sigma_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n\right\}=0. \qquad (12)$$

Выражение в фигурных скобках в (12) должно равняться некоторой произвольной функции координат:

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{H}+\frac{\tau}{\sigma_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}+\frac{-i}{\omega\sigma_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n=f(\boldsymbol{r}). \qquad (13)$$

Аналогично взяв ротор от второго уравнения Максвелла в (9) и учитывая, что поле $\boldsymbol{H}$ соленоидально $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$, получим: $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{H}-\Delta\boldsymbol{H}=-\Delta\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}$. Подставив выражение для ротора плотности полного тока $\operatorname{rot}\boldsymbol{j}=-\frac{c}{4\pi}\Delta\boldsymbol{H}$ в (13), после математических преобразований получим:

$$\Delta\boldsymbol{H}-\frac{1}{\lambda_L^2}\boldsymbol{H}=-i\frac{4\pi}{c\omega\tau}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n-\frac{4\pi\sigma_0}{\tau c}f(\boldsymbol{r}), \qquad (14)$$

где введен квадрат лондоновской глубины проникновения магнитного поля $\lambda_L^2=mc^2/4\pi ne^2$, а n – полная концентрация всех свободных электронов. Левая часть уравнения (14) функционально похожа на уравнение Лондонов для глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник при стационарных условиях (5). Слагаемое $-(4\pi i/c\omega\tau)\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n$ в (14) представляет собой источниковый член за счет возбуждения нормальных электронов при нестационарных процессах, порождающий дополнительные магнитные поля в сверхпроводнике.

Подставив плотность нормального тока в виде $\boldsymbol{j}_n=\boldsymbol{j}_{n0}e^{i\omega t}$ в первое уравнение системы (7) и взяв ротор, получим выражение:

$$(1+i\omega\tau)\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n=\alpha_n\sigma_0\operatorname{rot}\boldsymbol{E}. \qquad (15)$$

Используя уравнение Максвелла, вместо ротора электрического поля $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$ подставим $-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$ и получим

$$\frac{1}{\sigma_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n=-\frac{\alpha_n}{(1+i\omega\tau)}\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}. \qquad (16)$$

Подставим (16) в (10) и проведем некоторые математические преобразования:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\frac{\tau}{\sigma_0}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}-\frac{\alpha_n}{(1+i\omega\tau)}\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\boldsymbol{H}+\frac{\tau}{\sigma_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}-\frac{\alpha_n}{(1+i\omega\tau)}\frac{1}{c}\boldsymbol{H}\right)=0.$$

Вместо ротора плотности тока используем ранее полученное выражение $\operatorname{rot}\boldsymbol{j}=-\frac{c}{4\pi}\Delta\boldsymbol{H}$, тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\boldsymbol{H}-\frac{\tau c}{4\pi\sigma_0}\Delta\boldsymbol{H}-\frac{\alpha_n}{(1+i\omega\tau)}\frac{1}{c}\boldsymbol{H}\right)=0. \qquad (17)$$

Очевидно, что выражение в скобках в общем случае равняется произвольной функции координат

$$\Delta\boldsymbol{H}-\left(1-\frac{\alpha_n}{1+i\omega\tau}\right)\frac{1}{\lambda_L^2}\boldsymbol{H}=f(\boldsymbol{r}) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\;\Delta\boldsymbol{H}-\frac{\alpha_s+i\omega\tau}{1+i\omega\tau}\frac{1}{\lambda_L^2}\boldsymbol{H}=f(\boldsymbol{r}) \qquad (18)$$

где снова введена лондоновская глубина проникновения магнитного поля $\lambda_L^2=\frac{mc^2}{4\pi ne^2}$, n – полная концентрация всех электронов проводимости, $f(\boldsymbol{r})$ – произвольная функция координат, не зависящая от времени. По сути лондоновская глубина проникновения λ_L^2 показывает на какое расстояние проникает магнитное поле в сверхпроводник при нулевой температуре $T=0$ K, когда все электроны являются сверхпроводящими, и концентрация сверхпроводящих электронов равна концентрации всех электронов проводимости, т. е. $n_s=n$. Известно, что в мейснеровском состоянии магнитное поле вытесняется из массивного сверхпроводника [13], так что магнитная индукция внутри массивного сверхпроводника должна равняться нулю, поэтому эта функция координат должна тождественно равняться нулю $f(\boldsymbol{r})\equiv 0$. Тогда уравнение (18) можно привести к следующему более компактному виду:

$$\Delta\boldsymbol{H} - \frac{1}{\lambda_\omega^2}\boldsymbol{H} = 0, \qquad (19)$$

где введено следующее обозначение для квадрата глубины проникновения переменного магнитного поля λ_ω^2 при синусоидальном изменении поля:

$$\lambda_\omega^2 = \frac{1 + i\omega\tau}{\alpha_s + i\omega\tau}\lambda_L^2. \qquad (20)$$

Таким образом, глубина проникновения переменного магнитного поля в нестационарном случае зависит от доли концентрации сверхпроводящих электронов α_s и частоты ω изменения магнитного поля. Также глубину проникновения можно привести и к такому виду:

$$\lambda_\omega^2 = \frac{1 + i\omega\tau}{1 + \dfrac{i\omega\tau}{\alpha_s}}\lambda_s^2, \qquad (21)$$

где через λ_s обозначена глубина проникновения магнитного поля в зависимости от температуры как следующая конструкция $\lambda_s^2(T) = \dfrac{mc^2}{4\pi n_s(T)e^2}$. Выражение (21) можно также привести к следующему виду:

$$\lambda_\omega^2 = \frac{1 + i\omega\tau}{1 + \dfrac{i\omega\tau}{\alpha_s}}\lambda_s^2 = \sqrt{\frac{1 + (\omega\tau)^2}{1 + \left(\dfrac{\omega\tau}{\alpha_s}\right)^2}}\lambda_s^2 e^{i(\varphi - \psi)}, \qquad (22)$$

где сдвиги фаз определяются как $\varphi = \mathrm{arctg}\,\omega\tau$, $\psi = \mathrm{arctg}(\omega\tau/\alpha_s)$. Учтем, что доля концентрации сверхпроводящих электронов α_s зависит от температуры как $\alpha_s(T) = 1 - (T/T_c)^4$, где T_c – критическая температура:

$$\lambda_\omega^2 = \frac{(1 + i\omega\tau)}{(1 + i\omega\tau/\alpha_s)}\lambda_s^2 =$$
$$= \lambda_L^2 \frac{(1 + i\omega\tau)}{\left(1 + \dfrac{i\omega\tau}{1 - (T/T_c)^4}\right)} \frac{1}{\left(1 - (T/T_c)^4\right)}.$$

Таким образом, глубина проникновения переменного магнитного поля в нестационарном случае зависит как от температуры, так и частоты $\lambda_\omega^2 = \lambda_\omega^2(\omega, T)$ следующим образом:

$$\lambda_\omega^2(\omega, T) = \lambda_L^2 \frac{(1 + i\omega\tau)}{\left(1 - (T/T_c)^4 + i\omega\tau\right)}. \qquad (23)$$

При нулевой частоте $\omega = 0$ глубина проникновения переменного магнитного поля λ_ω^2 стремится к глубине проникновения λ_s^2, и модифицированное уравнение Лондонов (19) для переменного синусоидального магнитного поля переходит в обычное уравнение Лондонов (5) для стационарного процесса.

Рассмотрим различные асимптотические случаи по температуре и частоте. При нулевой температуре $T = 0\ [K]$, т. е. в случае, когда все электроны являются сверхпроводящими, λ_ω^2 переходит в лондоновскую глубину проникновения λ_L^2, т. е.

$$T \to 0[K] \;\Rightarrow\; \lambda_\omega^2 \to \lambda_L^2.$$

При критической температуре $T \to T_c$ и нулевой частоте $\omega \to 0$ глубина проникновения λ_ω^2 (выражение (23)) стремится к бесконечности $\lambda_\omega^2 \to \infty$, как и должно быть, поскольку при критической температуре и нулевой частоте сверхпроводник выходит из сверхпроводящего состояния, переходя в нормальное, и магнитное поле полностью проникает в сверхпроводящий материал, находящийся в нормальном состоянии.

Глубина проникновения переменного магнитного поля λ_ω^2 с учетом тока смещения в уравнении Максвелла

Учтем в уравнении Максвелла, связывающего плотность тока с ротором магнитного поля, слагаемое с током смещения $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$, которым ранее было пренебрежено. Получим какую поправку даст данное слагаемое в зависимость глубины проникновения переменного магнитного поля от частоты λ_ω^2. Пусть справедливо соотношение $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$, где ε – диэлектрическая проницаемость материала. Возьмем ротор от уравнения Максвелла $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$, получим:

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{H} - \Delta \boldsymbol{H} = \\ = -\Delta \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{rot} \boldsymbol{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \operatorname{rot} \boldsymbol{E}}{\partial t}.\end{gathered} \tag{24}$$

Выразив отсюда $\operatorname{rot} \boldsymbol{j}$ и подставим другое уравнение Максвелла, описывающее закон электромагнитной индукции, в (24) получим:

$$\begin{gathered}\operatorname{rot} \boldsymbol{j} = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \operatorname{rot} \boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{c}{4\pi}\Delta \boldsymbol{H} = \\ = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{1}{c}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \frac{c}{4\pi}\Delta \boldsymbol{H}.\end{gathered} \tag{25}$$

Подставим выражение (25) для $\operatorname{rot} \boldsymbol{j}$ в (10):

$$\begin{gathered}\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \frac{\tau}{\sigma_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{1}{c}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \frac{c}{4\pi}\Delta \boldsymbol{H}\right) + \\ + \frac{1}{\sigma_0}\operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n = 0.\end{gathered} \tag{26}$$

Для ротора плотности нормального тока в (26) будем использовать уравнение (16):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\begin{gathered}\frac{1}{c}\boldsymbol{H} + \frac{\tau}{\sigma_0}\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{1}{c}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \\ - \frac{\tau}{\sigma_0}\frac{c}{4\pi}\Delta \boldsymbol{H} - \frac{\alpha_n}{(1+i\omega\tau)}\frac{1}{c}\boldsymbol{H}\end{gathered}\right) = 0. \tag{27}$$

Очевидно, что выражение в скобках должно равнять произвольной функции координат, тогда:

$$\begin{gathered}-\frac{\varepsilon}{4\pi n e^2 / m}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \frac{m c^2}{4\pi n e^2}\Delta \boldsymbol{H} + \\ + \frac{\alpha_s + i\omega\tau}{(1+i\omega\tau)}\boldsymbol{H} = f(\boldsymbol{r}).\end{gathered} \tag{28}$$

Вместо магнитного поля подставим следующее выражение $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i\omega t}$:

$$-\varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \boldsymbol{H} - \lambda_L^2 \Delta \boldsymbol{H} + \frac{\alpha_s + i\omega\tau}{(1+i\omega\tau)}\boldsymbol{H} = f(\boldsymbol{r}), \tag{29}$$

где введена плазменная частота $\omega_p = 4\pi n e^2 / m$. По аналогичным причинам функция $f(\boldsymbol{r})$ также должна тождественно равняться нулю. Получим уравнение для проникновения переменного магнитного поля для рассматриваемого случая:

$$\Delta \boldsymbol{H} - \left(\frac{\alpha_s + i\omega\tau}{(1+i\omega\tau)} - \varepsilon\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2\right)\frac{1}{\lambda_L^2}\boldsymbol{H} = 0. \tag{30}$$

Если ввести квадрат глубины магнитного поля λ_ω^2 при гармоническом изменении магнитного поля с учетом слагаемого, описывающего ток смещения, то уравнение (30) сведется к модифицированному уравнению Лондонов (19):

$$\lambda_\omega^2 = \frac{\lambda_L^2}{1 - \frac{\alpha_n}{(1+i\omega\tau)} - \varepsilon\frac{\omega^2}{\omega_p^2}}. \tag{31}$$

Таким образом, слагаемое $\varepsilon(\omega/\omega_p)^2$ в (31) будет играть роль при достаточно больших частотах по сравнению с плазменной частотой ω_p.

На первый взгляд может показаться, что слагаемым $\varepsilon(\omega/\omega_p)^2$ в (31) можно пренебречь. Однако следует заметить, что, например, данное слагаемое может дать вклад в задачах исследования динамики вихрей Абрикосова [14–21] в сверхпроводниках II рода с достаточно сильным пиннингом на сверхвысоких частотах, поскольку данная поправка в глубину проникновения магнитного поля вероятно будет вносить вклад в распределение транспортного тока по сечению сверхпроводника, что в свою очередь должно повлиять на силу Лоренца, действующую на вихревую решетку, со стороны транспортного тока. Исследуя динамику вихревой решетки при гармоническом изменении тока при достаточно больших частотах (в радиочастотном и микроволновом диапазонах) посредством изменения комплексного электродинамического отклика образца, можно извлечь важную информацию о диссипативных процессах в сверхпроводниках, которая не может быть получена при резистивных измерениях на постоянном токе для сверхпроводящих образцов с достаточно сильным пиннингом.

Глубина проникновения переменного магнитного поля с учетом различия эффективных масс для сверхпроводящих и нормальных электронов

Ранее было пренебрежено возможным различием эффективных масс нормальных и сверхпроводящих электронов. Обозначим их как m_n^* и m_s^* соответственно. Учтем различие эффективных масс электронов, т. е. будем считать, что $m_s^* \neq m_n^*$. Тензор эффективных масс нормальных электронов в сверхпроводящем материале, находящемся в нормальном состоянии, следует вычислять из дисперсионного соотношения $m_{ij}^{-1} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 E}{\partial k_i \partial k_j}$. Для изотропного случая эффективная масса электронов, как правило, находится в диапазоне $m_n^*/m_e \sim 0{,}01-2$, где m_e – масса электрона. В общем случае безусловно необходимо учитывать кристаллическую структуру материала. Эффективную массу сверхпроводящих электронов m_s^* можно оценить из выражения для глубины проникновения магнитного поля $m_s^* = \frac{4\pi n_s e^2 \lambda^2}{c^2}$, где n_s – концентрация сверхпроводящих электронов при заданной температуре, предварительно измерив $\lambda(T)$ для различных сверхпроводящих материалов. Следует отметить, что высокотемпературные сверхпроводники имеют анизотропную структуру, поэтому эффективные массы в различных плоскостях (*ab* и *c*) для одного и того же материала различаются друг от друга достаточно сильно, как правило, $m_\perp \gg m_\parallel \sim m_e$.

Запишем уравнения движения двух типов электронов с учетом различия эффективных масс электронов:

$$\begin{cases} m_s^* \dfrac{d\boldsymbol{V}_s}{dt} = -e\boldsymbol{E}, \\ m_n^* \dfrac{d\boldsymbol{V}_n}{dt} = -\dfrac{m_n^*}{\tau}\boldsymbol{V}_n - e\boldsymbol{E} \end{cases}. \tag{32}$$

Воспользовавшись определением плотностей токов, умножив систему уравнений (32) на соответствующие величины, получим систему для плотностей нормальных и сверхпроводящих токов под действием индуцированного электрического поля:

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{j}_s}{dt} = \alpha_s \left(\dfrac{m_n^*}{m_s^*}\right)\dfrac{\sigma_0}{\tau}\boldsymbol{E}, \\ \tau\dfrac{d\boldsymbol{j}_n}{dt} + \boldsymbol{j}_n = \alpha_n \sigma_0 \boldsymbol{E} \end{cases} \tag{33}$$

где $\sigma_0 = ne^2\tau/m_n^*$ – удельная проводимость сверхпроводящего материала в нормальном состоянии (τ – характерное время релаксации нормальных электронов в сверхпроводящем материале). Введем коэффициент асимметрии эффективных масс электронов $\varepsilon_m^2 = m_n^*/m_s^*$, тогда

$$\begin{cases} \tau\dfrac{d\boldsymbol{j}_s}{dt} = \alpha_s \varepsilon_m^2 \sigma_0 \boldsymbol{E}, \\ \tau\dfrac{d\boldsymbol{j}_n}{dt} + \boldsymbol{j}_n = \alpha_n \sigma_0 \boldsymbol{E} \end{cases}. \tag{34}$$

Сложив два уравнения в (34), получим связь электрического поля с плотностями токов:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\sigma_0(\alpha_n + \varepsilon_m^2 \alpha_s)}\left\{\tau\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + \boldsymbol{j}_n\right\}, \tag{35}$$

где $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_s + \boldsymbol{j}_n$. Взяв ротор от обоих частей вышеприведенного соотношения, подставим выражение (35) в уравнение Максвелла для электромагнитной индукции $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma_0\left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)}\left\{\tau\frac{\partial \operatorname{rot}\boldsymbol{j}}{\partial t} + \operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n\right\} = 0.$$

Вместо $\operatorname{rot}\boldsymbol{j}$ подставим выражение $\operatorname{rot}\boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = -\frac{c}{4\pi}\Delta\boldsymbol{H}$, тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{c}\boldsymbol{H} - \frac{c\tau}{4\pi\sigma_0\left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)}\Delta\boldsymbol{H}\right\} + \\ + \frac{1}{\sigma_0\left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n = 0. \tag{36}$$

С учетом того, что $\boldsymbol{j}_n = \boldsymbol{j}_{n0} e^{i\omega t}$, преобразуем слагаемое с плотностью нормального тока так, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n = \frac{-i}{\omega} \frac{\partial \operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n}{\partial t}$, и подставив в (36), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\begin{matrix} \frac{1}{c}\boldsymbol{H} - \frac{c\tau}{4\pi\sigma_0\left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)}\Delta\boldsymbol{H} - \\ -\frac{i}{\omega\sigma_0\left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n \end{matrix}\right\} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\boldsymbol{H} - \frac{c\tau}{4\pi\sigma_0\left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)}\Delta\boldsymbol{H} = \\ &= \frac{i}{\omega\sigma_0\left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n, \end{aligned} \tag{37}$$

где по вышеприведенным причинам положено равенство нулю произвольной функции координат в силу экспериментального факта о вытеснении магнитного поля из объема сверхпроводников в мейснеровском состоянии. Подставив $\boldsymbol{j}_n = \boldsymbol{j}_n e^{i\omega t}$ в (34), получим плотность тока $\boldsymbol{j}_n = \alpha_n\sigma_0\boldsymbol{E} / \left(1 + i\omega\tau\right)$. Взяв ротор от этого выражения и преобразуя его, используя уравнение Максвелла и $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = i\omega\boldsymbol{H}$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n = \frac{\alpha_n\sigma_0}{\left(1+i\omega\tau\right)}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \\ &= \frac{\alpha_n\sigma_0}{\left(1+i\omega\tau\right)}\left(-\frac{1}{c}\right)\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\alpha_n\sigma_0}{\left(1+i\omega\tau\right)}\left(i\omega\boldsymbol{H}\right). \end{aligned} \tag{38}$$

Подставим (38) в (37):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c}\boldsymbol{H} - \frac{c\tau}{4\pi\sigma_0\left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)}\Delta\boldsymbol{H} = \\ &= \frac{i}{\omega\sigma_0\left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)}\frac{\left(-i\right)\omega\alpha_n\sigma_0}{c\left(1+i\omega\tau\right)}\boldsymbol{H} = \\ &= \frac{\alpha_n}{c\left(1+i\omega\tau\right)}\frac{1}{\left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)}\boldsymbol{H}. \end{aligned} \tag{39}$$

Отметим, что $c^2\tau / 4\pi\sigma_0 = \varepsilon_m^2\lambda_L^2$, тогда после преобразований (39) снова получим модифицированное уравнение Лондонов (19), где глубина проникновения переменного магнитного поля будет определяться следующим выражением:

$$\lambda_\omega^2 = \frac{\varepsilon_m^2\left(1+i\omega\tau\right)}{\varepsilon_m^2\alpha_s\left(1+i\omega\tau\right) + i\omega\tau\alpha_n}\lambda_L^2. \tag{40}$$

Видно, что при отсутствии асимметрии эффективных масс $\varepsilon_m^2 = 1$, выражение для глубины проникновения (40) переходит в следующее $\lambda_\omega^2 = \frac{1+i\omega\tau}{\alpha_s + i\omega\tau}\lambda_L^2$, что согласуется с формулой (20).

Проникновение переменного магнитного поля в сверхпроводящее полупространство

Исследуем вопросы проникновения переменного магнитного поля в сверхпроводник с помощью полученного модифицированного уравнения Лондонов. Для простоты будем использовать уравнение (19) с выражением для глубины проникновения переменного магнитного поля в виде (20). Рассмотрим сверхпроводящее полупространство $x > 0$. Пусть поверхность сверхпроводящего материала будет совпадать с плоскостью $x = 0$. В силу линейности полученных уравнений справедливо $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})e^{i\omega t}$. В направлении оси z наложено внешнее магнитное поле $\boldsymbol{H}_0 e^{i\omega t}$, изменяющееся синусоидальным образом. Тогда $\hat{H}_z\left(x,t\right) = \hat{H}_{z0}\left(x\right)e^{i\omega t}$. В силу симметрии задачи получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2\hat{H}_{z0}(x)}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_\omega^2}\hat{H}_{z0}(x) = 0. \tag{41}$$

Напомним, что квадрат глубины переменного магнитного поля при переменных процессах является комплексной величиной. Решением уравнения (41) для амплитуды напряженности магнитного поля $\hat{H}_{z0}(x)$ является следующая зависимость:

$$\hat{H}_{z0}(x) = C_1 e^{x/\lambda_\omega} + C_2 e^{-x/\lambda_\omega}.$$

Комплексное выражение для магнитного поля в зависимости от координаты x и времени t представляется как:

$$\hat{H}_z(x,t) = C_1 e^{x/\lambda_\omega} e^{i\omega t} + C_2 e^{-x/\lambda_\omega} e^{i\omega t}. \tag{42}$$

Обозначим $\nu = \omega\tau$ и преобразуем выражение для квадрата глубины проникновения переменного магнитного поля (20), введя сдвиг фаз:

$$\begin{cases} \lambda_\omega^2 = \dfrac{1+i\nu}{\alpha_s + i\nu}\lambda_L^2 = \lambda_L^2 \dfrac{\sqrt{\left(\alpha_s+\nu^2\right)^2 + \left(\alpha_n\nu\right)^2}}{\alpha_s^2+\nu^2} e^{-i\xi} \\ \operatorname{tg}\xi = \dfrac{\alpha_n \nu}{\alpha_s + \nu^2} \end{cases}. \quad (43)$$

Отсюда выразим выражение для глубины проникновения λ_ω переменного магнитного поля:

$$\lambda_\omega = \lambda_L \frac{\left(\left(\alpha_s+\nu^2\right)^2 + \left(\alpha_n\nu\right)^2\right)^{1/4}}{\sqrt{\alpha_s^2+\nu^2}} e^{-i\xi/2}. \quad (44)$$

Для уменьшения громоздкости дальнейших выкладок введем безразмерную координату:

$$\bar{x} = \frac{x}{|\lambda_\omega|} = \frac{x}{\lambda_L} \frac{\sqrt{\alpha_s^2+\nu^2}}{\sqrt[4]{\left(\alpha_s+\nu^2\right)^2 + \left(\alpha_n\nu\right)^2}}. \quad (45)$$

Подставив выражение для λ_ω (44) в (42), получим:

$$\begin{aligned} \hat{H}_z(\bar{x},t) &= C_1 e^{\bar{x}(\cos\xi/2 + i\sin\xi/2)} e^{i\omega t} + \\ &+ C_2 e^{-\bar{x}(\cos\xi/2 + i\sin\xi/2)} e^{i\omega t} = \\ &= C_1 e^{\bar{x}\cos\xi/2} e^{i(\omega t + \bar{x}\sin\xi/2)} + C_2 e^{-\bar{x}\cos\xi/2} e^{i(\omega t - \bar{x}\sin\xi/2)}. \end{aligned} \quad (46)$$

При $\bar{x} \to \infty$ магнитное поле в полубесконечном сверхпроводнике в мейснеровском состоянии в силу вытеснения магнитного поля должно стремиться к нулю $H_z(x,t) \to 0$, поэтому константа интегрирования C_1 должна равняться нулю ($C_1 = 0$), чтобы не было расходимостей в выражении (46):

$$\hat{H}_z(x,t) = C_2 e^{-\bar{x}\cos\xi/2} e^{i(\omega t - \bar{x}\sin\xi/2)}. \quad (47)$$

При $\bar{x} = 0$ магнитное поле изменяется синусоидально, поэтому должно выполняться следующее граничное условие $\hat{H}_z(x=0,t) = H_0 e^{i\omega t}$, поэтому $C_2 = H_0$. Таким образом, магнитное поле в полубесконечном сверхпроводнике с учетом возбуждения нормальных электронов будет изменяться по следующему закону:

$$\hat{H}_z(x,t) = H_0 e^{-\bar{x}\cos\xi/2} e^{i(\omega t - \bar{x}\sin\xi/2)}. \quad (48)$$

Прежде чем рассматривать различные предельные случаи как по температуре, так и частоте, приведем зависимости долей концентраций нормальных и сверхпроводящих электронов от температуры, зная эмпирическую формулу для глубины проникновения магнитного поля в стационарных условиях в зависимости от температуры [22, 23]:

$$\lambda_s^2(T) = \frac{\lambda_L^2}{1-\left(T/T_c\right)^4}, \quad (49)$$

где λ_L^2 – квадрат лондоновской глубины проникновения магнитного поля, которая определяется как $\lambda_L^2 = \dfrac{mc^2}{4\pi ne^2}$, причем n – полная концентрация электронов проводимости в сверхпроводящем материале. Отсюда легко получить зависимости для долей концентраций двух типов электронов от температуры, графики которых представлены на рис. 1:

$$\alpha_n(T) = \frac{n_n}{n} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^4 \quad \alpha_s(T) = \frac{n_s}{n} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4. \quad (50)$$

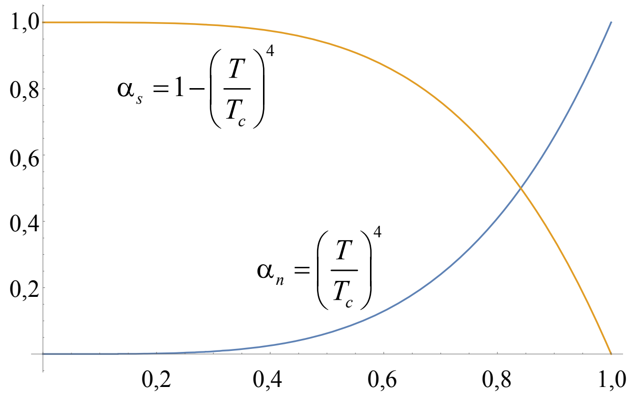

***Рис. 1.** Зависимости долей концентрации нормальных и сверхпроводящих электронов α_n и α_s от температуры T*

При нулевой температуре $T = 0\ [K]$ доля концентрации нормальных электронов равна нулю $\alpha_n(T = 0) = 0$, т. е. все электроны являются сверхпроводящими. В этом случае сдвиг фаз будет равен $\operatorname{tg}\xi = 0$, тогда проникновение магнитного поля в сверхпроводник будет описываться следующей зависимостью $\hat{H}_z(x,t) = H_0 e^{i\omega t} e^{-\bar{x}}$. При температурах около критической $T \sim T_c$ доли концентраций двух типов электронов приблизительно равны $\alpha_n \approx 1$ и $\alpha_s \approx 0$. Тогда сдвиг фаз будет определяться только частотой $\operatorname{tg}\xi \approx 1/\nu$. При больших частотах таких, что $\nu = \omega\tau \gg 1$ снова придем к случаю $\hat{H}_z(x,t) = H_0 e^{i\omega t} e^{-\bar{x}}$. При небольших частотах $\nu = \omega\tau \ll 1$ сдвиг фаз будет определяться из выражения $\operatorname{tg}\xi \to \infty$, тогда тригонометрические функции будут стремиться к $\cos\xi/2 \to 1/\sqrt{2}$, $\sin\xi/2 \to 1/\sqrt{2}$, в этом случае магнитное поле в сверхпроводнике будет следующим образом зависеть от времени и безразмерной координаты $\bar{x}$:

$$\hat{H}_z(\bar{x},t) = H_0 e^{-\bar{x}/\sqrt{2}} e^{i\left(\omega t - \bar{x}/\sqrt{2}\right)} = H_0 e^{-\bar{x}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}} e^{i\omega t}.$$

Физический смысл имеет только действительная часть от комплексного выражения:

$$H_z(\bar{x},t) = H_0 e^{-\bar{x}/\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \bar{x}/\sqrt{2}\right). \qquad (51)$$

Графики функции (51) для распределения напряженности магнитного поля от безразмерной координаты в различные моменты времени представлены на рис. 2. Из рис. 2 видно, что вследствие возбуждения нормальных электронов при $T \sim T_c$ и $\nu = \omega\tau \ll 1$ в выражении (51) есть запаздывание и соответствующий сдвиг фаз, т. е. магнитное поле на некотором расстоянии от границы будет направлено в сторону противоположную внешнему магнитному полю.

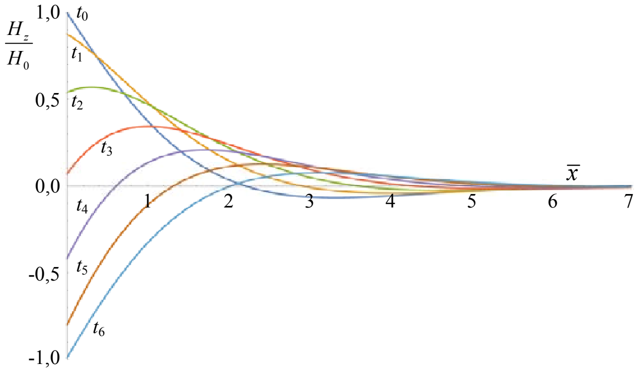

Рис. 2. График магнитного поля $H_z(\bar{x},t) = H_0 e^{-\bar{x}/\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \bar{x}/\sqrt{2}\right)$ в зависимости от безразмерной координаты $\bar{x}$ в различные моменты времени ($t_0 < t_1 < \ldots < t_6$)

Получим выражение для плотности суммарного тока, который состоит из нормального и сверхпроводящего составляющих тока, зная зависимость магнитного поля из уравнения Максвелла $\boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}$. В рассматриваемой плоской геометрии задачи имеем $\hat{j}(\bar{x},t) = \frac{c}{4\pi|\lambda_\omega|} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \bar{x}}$, тогда

$$\hat{j}(\bar{x},t) = \frac{c}{4\pi|\lambda_\omega|} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \bar{x}} = -\frac{cH_0}{4\pi|\lambda_\omega|} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} e^{-\bar{x}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}} e^{i\omega t} = -\frac{cH_0}{4\pi|\lambda_\omega|} e^{-\bar{x}/\sqrt{2}} \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} e^{i\left(\omega t - \bar{x}/\sqrt{2}\right)} =$$
$$= -\frac{cH_0}{4\pi|\lambda_\omega|} e^{-\bar{x}/\sqrt{2}} \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \left(\omega t - \bar{x}/\sqrt{2}\right)\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \omega t - \bar{x}/\sqrt{2}\right) \right\}.$$

Таким образом, распределение плотности суммарного тока определяется как:

$$j(\bar{x},t) = -\frac{cH_0}{4\pi|\lambda_\omega|} e^{-\bar{x}/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \left(\omega t - \bar{x}/\sqrt{2}\right)\right). \quad (52)$$

Плотность тока $j(\bar{x},t)$ также как и напряженность магнитного поля (51) в поверхностном слое сверхпроводника будет менять направление на противоположное.

Заключение

При переменных условиях (магнитных полях и токах) в сверхпроводниках индуцируется переменное электрическое поле, которое возбуждает движение сверхпроводящих и нормальных электронов согласно двухжидкостной модели сверхпроводников. Возбуждение нормальных электронов дает поправку в характер проникновения переменного магнитного поля в сверхпроводник в мейснеровском состоянии.

В работе впервые выведено модифицированное уравнение Лондонов для проникновения переменного магнитного поля в сверхпроводник, находящегося в мейснеровском состоянии. Из полученного уравнения вытекает характер зависимости глубины проникновения переменного магнитного поля от частоты изменения поля и долей концентраций нормальных и сверхпроводящих электронов, т. е. фактически от температуры.

Также в работе получены более уточненные зависимости для глубины проникновения переменного магнитного поля с учетом слагаемого, описывающего ток смещения в уравнениях Максвелла, и различия в значениях эффективных масс нормальных и сверхпроводящих электронов, которые по своей сути учитывают характер взаимодействия электронов с периодическим потенциалом кристаллической решетки сверхпроводящего материала.

Следует заметить, что полученные уравнения для проникновения магнитного поля и выражения для глубины проникновения переменного магнитного поля получены из классических представлений, где не учитывались нестационарные процессы в поведении волновой функции куперовских пар, для чего необходимо было бы решать нестационарное нелинейное уравнение Гинзбурга-Ландау при ненулевой температуре сверхпроводника (т. е. с учетом возбуждения нормальных электронов). В свою очередь стационарная теория Гинзбурга-Ландау является приближенной и справедливой при температурах вблизи критической.

Тем не менее при выводе модифицированного уравнения Лондонов привлекались дополнительная информация, вытекающая из многочисленных экспериментальных данных о вытеснении магнитного поля в мейснеровском состоянии, а также некоторые представления о двухжидкостной природе сверхпроводников при переменных условиях.

В силу того, что квадрат глубины проникновения переменного магнитного поля представляет собой комплексную величину, при решении модифицированного уравнения Лондонов для полубесконечного пространства получено, что переменные магнитное поле и плотность токов в сверхпроводнике меняют свое направление на противоположное вследствие возбуждения нормальных токов и соответствующего сдвига фаз.

Отметим, что полученное модифицированное уравнение Лондонов и глубина проникновения переменного магнитного поля при нестационарных процессах в дальнейшем будет использоваться для интерпретации экспериментальных данных при переменном токе в высокотемпературных сверхпроводящих лентах для анализа вольт-амперных характеристик и тепловыделения вследствие динамики вихревой решетки при наличии внешнего магнитного поля.

Полученные выражения для глубины проникновения переменного магнитного поля будут влиять на распределение транспортного тока по сечению сверхпроводника, что в свою очередь внесет вклад в силу Лоренца, действующую на вихри Абрикосова, и это скажется на резистивных характеристиках сверхпроводников II рода при нестационарных процессах. По этой причине рассмотренная задача имеет не только теоретический характер, но и имеет важное практическое значение для предсказания вольт-амперных, нестационарных характеристик и тепловыделения в высокотемпературных сверхпроводниках с пиннингом вихрей при переменных процессах (токах и магнитных полях).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bardeen J.* / Phys. Rev. Let. 1958. Vol. 1. № 11. P. 399–400.

2. *London F.* Superfluids. – New York: John Wiley and Sons, 1954. Vol. 1 and 2.

3. *Gorter C. J.* Progress in Low-Temperature Physics. – North Holland Publishing Company, 1955, Chap. 1.

4. *Landau L. D.* / J. Phys. U.S.S.R. 1941. Vol. 5. P. 71.

5. *Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R.* / Phys. Rev. 1957. Vol. 106. P. 162; Vol. 108. P. 1175.

6. *Боголюбов Н. Н.* / ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58; Nuovo cim. 1958. Vol. 7. P. 794.

7. *Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В.* Новый метод в теории сверхпроводимости. – М.: Наука, 1958.

8. *Бардин Дж., Купер Л., Шриффер Дж.* Теория сверхпроводимости. – М.: ИЛ, 1960. С. 103.

9. *London F., London H.* / Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. A149. P. 71.

10. *London F.* / Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. A512. P. 24; Phys. Rev. 1948. Vol. 74. P. 562.

11. *London F.* / Physica. 1936. Vol. 3. P. 450.

12. *London F.* Une conception nouvelle de la supraconductibilite. – Paris, 1937.

13. *Meissner W., Ochsenfeld R.* / Naturwiss. 1933. Vol. 21. P. 787.

14. *Абрикосов А. А.* Основы теории металлов. – М.: Наука, 1987.

15. *Абрикосов А. А.* / ДАН СССР. 1952. Т. 86. С. 489.

16. *Абрикосов А. А.* / ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 1442.

17. *Abrikosov A. A.* / Journal of Physics and Chemistry of Solids. 1957. Vol. 2. Iss. 3. P. 199–208.

18. *Cribier D., Jacrot B., Rao L. M., Farnoux B.* / Phys. Lett. 1964. Vol. 9. P. 106.

19. *Stephen M. J., Bardeen J.* / Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 14. № 4. P. 112–113.

20. *Bardeen J., Stephen M. J.* / Phys. Rev. 1965. Vol. 140. P. 1197.

21. *Bardeen J., Stephen M. J.* / Phys. Rev. 1965. Vol. 140. № 4A.

22. *Ципенюк Ю. М.* Физические основы сверхпроводимости: учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во МФТИ, 2002.

23. *Шмидт В. В.* Введение в физику сверхпроводников. – М.: МЦНМО, 2000.

PACS: 74.25.Ha

The modified London equation for the penetration of an alternating magnetic field into a superconductor in the Meissner state

K. A. Osipov, A. N. Varyukhin, A. V. Geliev and V. S. Zakharchenko

Central Institute of Aviation Motors named after P. I. Baranov
2 Aviamotornaya st., Moscow, 111116, Russia
E-mail: kaosipov@ciam.ru

Received 20.07.2023; revised 5.10.2023; accepted 26.10.2023

For the first time a modified London equation for the penetration of an alternating magnetic field into superconductors of the first and second types in the Meissner state was derived. Within the framework of this equation the dependence of the penetration depth of the alternating magnetic field into the superconductor on the frequency of changes in the magnetic field and the fractions of concentrations of normal and superconducting electrons (α_s и α_n), i.e., in fact, on the temperature of the superconductor, is obtained. Expressions for the penetration depth of an alternating magnetic field are also obtained, taking into account the displacement current in Maxwell's equations and the difference in the effective masses of normal and superconducting electrons. The modified London equation makes it possible to describe unsteady processes in superconductors under an induced electric field that excites both superconducting and normal currents according to the two-fluid model of superconductors.

Keywords: superconductivity, penetration depth of alternating magnetic field, two-fluid model, normal electrons, superconducting electrons, modified London equation, Meissner effect.

REFERENCES

1. Bardeen J., Phys. Rev. Let. **1** (11), 399–400 (1958).

2. London F., Superfluids. John Wiley and Sons, New York, 1954, Vol. 1 and 2.

3. Gorter C. J., Progress in Low-Temperature Physics, North Holland Publishing Company, 1955, Chap. 1.

4. Landau L. D., J. Phys. U.S.S.R. **5**, 71 (1941).

5. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R. Phys. Rev. **106**, 162 (1957); **108**, 1175 (1957).

6. Bogolyubov N. N., ZhETF **34**, 58 (1958); Nuovo cim. **7**, 794 (1958).

7. Bogolyubov N. N., Tolmachev V. V. and Shirkov D. V., A new method in the theory of superconductivity, Moscow, Nauka, 1958.

8. Bardeen J., Cooper L. and Schrieffer J., Theory of superconductivity, Moscow, IL, 1960, p. 103.

9. London F. and London H., Proc. Roy. Soc. **A149**, 71 (1935).

10. London F., Proc. Roy. Soc. **A512**, 24 (1935); Phys. Rev. **74**, 562 (1948).

11. London F., Physica **3**, 450 (1936).

12. London F., Une conception nouvelle de la supraconductibilite, Paris, 1937.

13. Meissner W. and Ochsenfeld R., Naturwiss. **21**, 787 (1933).

14. Abrikosov A. A., Fundamentals of metals, Moscow, Nauka, 1987.

15. Abrikosov A. A., Reports of the Academy of Sciences USSR **86**, 489 (1952).

16. Abrikosov A. A., ZhETF **32**, 1442 (1957).

17. Abrikosov A. A., Journal of Physics and Chemistry of Solids **2** (3), 199–208 (1957).

18. Cribier D., Jacrot B., Rao L. M. and Farnoux B., Phys. Lett. **9**, 106 (1964).

19. Stephen M. J. and Bardeen J., Phys. Rev. Lett. **14** (4), 112–113 (1965).

20. Bardeen J. and Stephen M. J., Phys. Rev. **140**, 1197 (1965).

21. Bardeen J. and Stephen M. J., Phys. Rev. **140** (4A), (1965).

22. Tsipenyuk Yu. M., Physical foundations of superconductivity: Textbook: For universities, Moscow, MIPT Publishing House, 2002.

23. Schmidt V. V., Introduction to the physics of superconductors, Moscow, ICNMO, 2000.