

УДК 550.388

Влияние электромагнитной волны на питч-угол электрона в геомагнитном поле

Н.Д. Наумов

На основе метода последовательных приближений получено выражение для оценки изменения питч-угла электрона после резонансного взаимодействия с электромагнитной волной типа свистящего атмосферика.

PACS: 94.20.wj

Ключевые слова: взаимодействие волн и частиц, питч-угол электрона, высыпание частиц.

Введение

Резонансное взаимодействие заряженных частиц и электромагнитных волн типа свистящих атмосфериков является одним из механизмов питч-углового рассеяния, приводящего к высыпанию частиц из радиационных поясов [1]. В настоящее время проводятся исследования по использованию особо низкочастотного (ОНЧ) излучения наземных передатчиков для контролируемого высыпания электронов из радиационных поясов [2-4], поэтому оценка влияния электромагнитных волн указанного типа на питч-углы электронов, захваченных магнитным полем Земли, представляет несомненный интерес.

Эта задача рассматривалась ранее в работе [5], где для питч-угла электрона получено дифференциальное уравнение, решение которого возможно лишь на основе численных методов. Целью данной работы является получение аналитического выражения для оценки изменения питч-угла в частном случае резонансного взаимодействия электрона с электромагнитной волной типа свистящего атмосферика. Речь идет о волне, распространяющейся вдоль силовой линии геомагнитного поля. Возможность волноводного распространения свистящих атмосфериков в магнитосфере обусловлена наличием в ней

неоднородностей концентрации плазмы, вытянутых вдоль силовых линий геомагнитного поля (т.н. дакты) [6].

Постановка задачи

Показатель преломления электромагнитной волны типа свистящего атмосферика определяется следующим выражением [7]:

$$n = \frac{\omega_p}{\sqrt{\omega(\omega_B - \omega)}}, \quad (1)$$

где ω – частота волны, ω_p – плазменная частота, $\omega_B = eB(\lambda)/mc$ – циклотронная частота электрона в геомагнитном поле $B(\lambda) = B_0 \sqrt{4 - 3 \cos^2 \lambda} / \cos^6 \lambda$, λ – геомагнитная широта. Здесь предполагается, что волна распространяется вдоль силовой линии геомагнитного поля $r = LR \cos^2 \lambda$, где $L = r_0/R$, r_0 – расстояние в плоскости геомагнитного экватора от центра Земли до силовой линии, R – радиус Земли, т.е. B_0 – величина магнитного поля в точке пересечения силовой линии с плоскостью геомагнитного экватора.

Влияние электромагнитной волны на питч-угол электрона наиболее заметно в условиях резонанса, т.е. когда частота волны с учетом доплеровского сдвига совпадает с частотой вращения электрона в геомагнитном поле. Из выражения (1) следует, что частота электромагнитной волны должна быть меньше циклотронной частоты электрона, поэтому условие резонансного взаимодействия частицы с волной может выполняться только при движении электрона навстречу волне:

$$\omega \left(1 + \frac{pn_r}{mc\gamma} \cos \alpha_r\right) = \Omega. \quad (2)$$

Наумов Николай Дмитриевич, ведущий научный сотрудник.

ФБУ “12 ЦНИИ МО РФ”.

Россия, 141307, Московская обл., г. Сергиев Посад-7.

Тел. (495) 993-09-62. E-mail: ndnaumov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 15 октября 2012 г.

© Наумов Н.Д., 2013

Здесь p – импульс электрона, $\gamma = (1 + p^2/m^2c^2)^{1/2}$ – релятивистский фактор, $\Omega = eB_r/mc\gamma$, e – заряд электрона, m – его масса, $B_r = B(\lambda_r)$, λ_r – геомагнитная широта точки резонанса, $n_r = n(\lambda_r)$, $\alpha_r = \alpha(\lambda_r)$ – коэффициент преломления волны и питч-угол электрона в этой точке.

Для анализа движения электрона вблизи точки резонансного взаимодействия можно пренебречь кривизной силовой линии и ввести декартову систему координат с началом в точке резонанса, при этом ось Oz направлена вдоль геомагнитного поля. В этом случае вблизи начала системы координат поле электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси Oz , запишется в следующем виде через свои компоненты:

$$\mathbf{b}(z, t) = A(\cos\varphi \sin\varphi \ 0),$$

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{A}{n_r}(\sin\varphi - \cos\varphi \ 0),$$

где A – амплитуда магнитного поля волны при $\lambda = \lambda_r$, $\varphi = \omega(t - \int ndz/c)$ – фаза волны.

Уравнение движения электрона в геомагнитном поле при воздействии поля электромагнитного волны имеет вид:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{e}{mc\gamma} [\mathbf{p}(\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(z, t))] - e\mathbf{E}(z, t), \quad (3)$$

где точкой обозначается дифференцирование по времени. Направление перемещения частицы противоположно направлению оси Oz , поэтому $p_z = -p\cos\alpha$. Дифференцируя это соотношение по времени и исключая \dot{p} с помощью уравнения (3), в результате найдем следующее уравнение для питч-угла электрона:

$$\dot{\alpha} = \frac{e}{p\sin\alpha} \left\{ \frac{1}{mc\gamma} [\mathbf{p}(\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(z, t))]_z - \frac{1}{p} \mathbf{pE}(z, t)\cos\alpha \right\}. \quad (4)$$

Применение метода

последовательных приближений

Показатель преломления рассматриваемых электромагнитных волн в магнитосфере имеет значение ~ 10 , поэтому определяющим является воздействие магнитного поля волны. Это означает, что электромагнитную волну можно считать слабой, если магнитное поле волны значительно меньше геомагнитного

поля. В этом случае для решения уравнения (4) можно использовать метод последовательных приближений, т.е. $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots$. Очевидно, что в качестве основного приближения следует взять движение электрона в геомагнитном поле, т.е. его перемещение вдоль силовой линии по спирали с переменным шагом. При таком движении питч-угол электрона в любой точке силовой линии можно найти с помощью известного адиабатического инварианта:

$$\frac{\sin^2 \alpha_0}{B} = \text{const}. \quad (5)$$

Это изменение питч-угла происходит достаточно медленно, поэтому в основном приближении для характеристик движения частицы в окрестности начала системы координат можно считать $\alpha_0 = \alpha_r$:

$$p_x = p\sin\alpha_r\cos\psi, \quad p_y = p\sin\alpha_r\sin\psi,$$

$$\dot{\psi} = \frac{eB(z)}{mc\gamma}, \quad z = -ut, \quad u = \frac{p}{m\gamma} \cos\alpha_r.$$

Учитывая резонансное условие (2), из уравнения (4) для поправки первого приближения получим:

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{eA}{mc\gamma} \Gamma \sin(\psi - \varphi), \quad \Gamma = 1 + \frac{\omega \cos^2 \alpha_r}{\Omega - \omega}, \quad (6)$$

Для вычисления разности фаз поперечного вращения частицы вокруг силовой линии ψ и фазы волны φ используем разложение геомагнитного поля и показателя преломления вблизи начала системы координат; при $\lambda_r \neq 0$ можно ограничиться линейными членами:

$$B = B_r + z \left. \frac{dB}{dz} \right|_{z=0}, \quad n = n_r + \zeta f, \quad f = \left. \frac{dn}{d\zeta} \right|_{\zeta=0},$$

где $\zeta = z/LR$. Основные члены разложения не дают вклада в силу условия (2), поэтому уравнение (6) запишется в следующем виде:

$$\dot{\alpha}_1 = \Gamma \Omega_0 \frac{A}{B_0} \sin\left(\eta - \frac{\pi}{2} \tau^2\right), \quad (7)$$

где η – начальное значение разности фаз, а также введены обозначения:

$$\tau = \rho \Omega_0 t, \quad \Omega_0 = \frac{eB_0}{mc\gamma}, \quad \rho = \left[\frac{\mu}{\pi} (9\Lambda - \nu f) \right]^{1/2},$$

$$\Lambda = \frac{\sin \lambda_r (3 + 5 \sin^2 \lambda_r)}{3 \cos^8 \lambda_r (1 + 3 \sin^2 \lambda_r)}, \mu = \frac{u}{LR \Omega_0},$$

$$v = \frac{u \omega}{c \Omega_0}.$$

Решение уравнения (7) выражается через интегралы Френеля $C(x)$ и $S(x)$ [8]. Для изменения питч-угла электрона после резонансного взаимодействия с волной найдем:

$$\Delta \alpha = \frac{A \Gamma}{\rho B_0} (U \sin \eta - V \cos \eta). \quad (8)$$

Здесь $U = C(\tau_2) - C(\tau_1)$, $V = S(\tau_2) - S(\tau_1)$, $\tau_1 = \rho \Omega_0 t_1$, $\tau_2 = \rho \Omega_0 t_2$, $\Delta t = t_2 - t_1$ – длительность резонансного взаимодействия. Графики функций $C(x)$ и $S(x)$ представлены на рис. 1, из которых следует, что $t_1 \sim -1/\rho \Omega_0$, $t_2 \sim 1/\rho \Omega_0$.

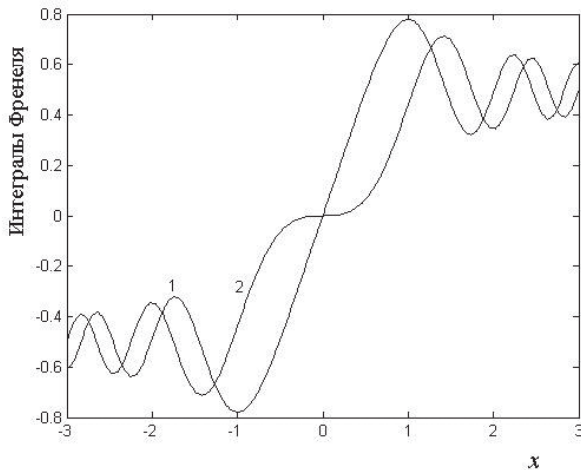


Рис. 1. Графики интегралов Френеля: кривая 1 – $C(x)$, кривая 2 – $S(x)$

Резонанс вблизи плоскости геомагнитного экватора

Полученный выше результат (8) оказывается неприменимым в плоскости геомагнитного экватора, т.к. при $\lambda_r = 0$ линейные члены разложения равны нулю, поэтому в этом случае нужно удерживать члены второго порядка. Для геомагнитного поля и показателя преломления вблизи экваториальной плоскости имеем:

$$B = B_0 \left(1 + \frac{9}{2} \lambda^2\right), n = n_0 + \frac{1}{2} g \lambda^2, g = \left. \frac{d^2 n}{d \lambda^2} \right|_{\lambda=0},$$

где n_0 – значение показателя преломления в точке пересечения силовой линии с плоскостью геомагнитного экватора, т.е. в данном случае $B_r = B_0(1 + 4,5 \lambda_r^2)$, $n_r = n_0 + 0,5 g \lambda_r^2$.

Аналогичным образом найдем, что при резонансе вблизи плоскости геомагнитного экватора поправка первого приближения описывается следующим уравнением:

$$\dot{\alpha}_1 = \Gamma \Omega_0 \frac{A}{B_0} \sin \left[\eta + \frac{\pi}{2} (\theta^3 - a \theta^2) \right], \quad (9)$$

где введены обозначения:

$$\theta = \sigma \Omega_0 t, \sigma = \left[\frac{\mu^2}{3\pi} (9 - v g) \right]^{1/3}, a = 3 \lambda_r \frac{\sigma}{\mu}.$$

Из уравнения (9) для изменения питч-угла электрона после резонансного взаимодействия получим:

$$\Delta \alpha = \frac{A \Gamma}{\sigma B_0} \{ [F(\theta_2) - F(\theta_1)] \sin \eta + [G(\theta_2) - G(\theta_1)] \cos \eta \}, \quad (10)$$

где $\theta_1 = \sigma \Omega_0 t_1$, $\theta_2 = \sigma \Omega_0 t_2$. Входящие в это выражение функции $F(x)$ и $G(x)$ определяются следующим образом:

$$F(x) = \int_0^x \cos \left[\frac{\pi}{2} (\xi^3 - a \xi^2) \right] d\xi,$$

$$G(x) = \int_0^x \sin \left[\frac{\pi}{2} (\xi^3 - a \xi^2) \right] d\xi.$$

Графики функций $F(x)$ и $G(x)$ для резонанса в плоскости геомагнитного экватора, т.е. при $a = 0$, представлены на рис. 2. Эти графики позволяют сделать вывод, что длительность резонансного взаимодействия в плоскости экватора $\Delta t \sim 2/\sigma \Omega_0$.

Результат вычисления с помощью выражения (8) оказывается примерно одинаковым с результатом, который получается из выра-

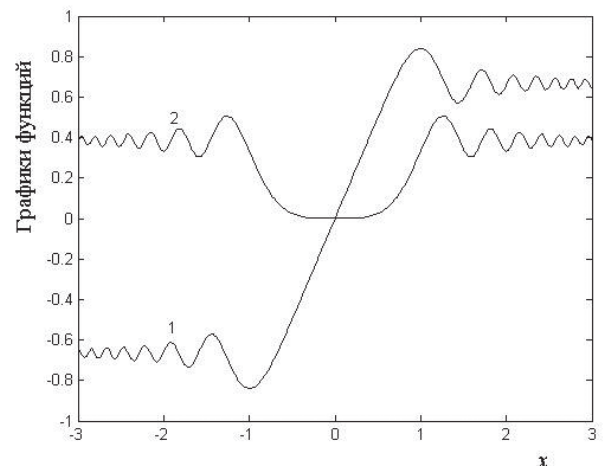


Рис. 2. Графики функций $F(x)$ (кривая 1) и $G(x)$ (кривая 2) при $a = 0$

жения (10) при $a = 2$. Это означает, что для оценки изменения питч-угла электрона при $\lambda_r < 2\mu/3\sigma$ следует использовать выражение (10), а для других положений точки резонанса – выражение (8).

Заключение

Полученные результаты показывают, что воздействие слабой электромагнитной волны приводит к небольшим колебаниям питч-угла электрона, т.е. до попадания в резонансную область волна не оказывает влияния на усредненное по периоду волны значение питч-угла, которое плавно изменяется в соответствии с адиабатическим инвариантом (5). Резонансное взаимодействие частицы с волной приводит к практически скачкообразному изменению среднего значения ее питч-угла.

Как видно из выражений (8), (10), в результате воздействия электромагнитной волны приращение питч-угла электрона может быть положительным или отрицательным в зависимости от начального значения разности фаз. Будем считать, что частицы, удовлетворяющие резонансному условию (2), равномерно распределены по начальным значениям разности фаз. Тогда, записывая выражение (8) в следующем виде:

$$\Delta\alpha = \frac{A\Gamma}{\rho B_0} \sqrt{U^2 + V^2} \sin(\eta - \chi),$$

где $\text{tg}\chi = V/U$, найдем, что после резонансного взаимодействия у половины электронов происходит увеличение питч-угла в среднем на величину $\Delta\alpha \approx 2\sqrt{2} A\Gamma/\pi\rho B_0$, а у другой половины – такое же уменьшение питч-угла.

Аналогичная картина имеет место и для резонанса вблизи плоскости геомагнитного экватора, однако изменение среднего значения питч-угла будет другим; в частности, из выражения (10) следует, что в плоскости экватора $\Delta\alpha \approx 2,6A\Gamma/\pi\sigma B_0$.

Литература

1. Хесс В. Радиационный пояс и магнитосфера. – М.: Атомиздат, 1972.
2. Inan U.S., Golkowski M., Casey M.K. et al. // Geophys. Res. Lett. 2007. V. 34. N. L02106, doi:10.1029/2006GL028494.
3. Kulkarni P., Inan U.S., Bell T.F., Bortnik J. // J. Geophys. Res. 2008. V. 113. N. A07214, doi:10.1029/2007JA012569.
4. Marshall R.A., Newsome R.T., Lehtinen N.G. et al. // J. Geophys. Res. 2010. V. 115. N. A08206, doi:10.1029/2010JA015394.
5. Bell T.F. // J. Geophys. Res. 1984. V. 89. N. A2. P. 905.
6. Распопов О.М., Клейменова Н.Г. Возмущения электромагнитного поля Земли, ч. 3. ОНЧ-излучения. – Л.: Изд-во Лен. ун-та, 1977.
7. Гершман Б.Н., Угаров В.А. // УФН. 1960. Т. 72. Вып. 2. С. 235.
8. Справочник по специальным функциям, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979.

The influence of electromagnetic wave on the electron pitch-angle in geomagnetic field

N.D. Naumov

12-th Central Research Institute, Sergiev Posad-7, Moscow region, 141300, Russia

E-mail: ndnaumov@mail.ru

An analytical expression for the electron pitch-angle modification during resonant inter-action with the whistler-mode electromagnetic wave is obtained on the basis of successive ap-proximations technique.

PACS: 94.20.wj

Keywords: interaction of waves and particles, electron pitch-angle, particle precipitation.

Bibliography – 8 references

Received October 15, 2012