УДК 537.52

Расчет температурного поля в движущемся газе с внутренним источником тепла

А.В. Герасимов, А.П. Кирпичников, Л.А. Рачевский

Рассмотрено движение газа в цилиндрическом канале и последовательно проходящем через три зоны: входную z < 0, внутреннего тепловыделения 0 ≤ z ≤ 1 и выходную z > 1. Получены аналитические решения, позволяющие учитывать влияние на тепловой баланс ограниченности источников тепла по осевой координате и интенсивности обдува в этом направлении.

PACS: 52.80.Pi

Ключевые слова: конвективный теплообмен, движущийся газ, внутренний источник, температура, краевая, задача

Введение

Конвективный теплообмен в движущемся газе с внутренним источником тепла теоретически исследовался в ряде работ, например [1-3]. Обычно при этом решение для уравнения баланса энергии получали только для зоны с внутренним тепловыделением, считая ее неограниченной в направлении течения газа. Однако такой подход может дать значительную ошибку в определении температуры газа, особенно в случае сравнительно короткой по длине зоны внутреннего тепловыделения.

Целью данной работы являлось получение аналитических решений для указанной задачи в случае ограниченной зоны внутреннего тепловыделения.

Исходные уравнения

Рассмотрим газ, который движется в цилиндрическом канале с радиусом *R* и последовательно про ходит через три зоны: входную z < 0, внутреннего тепловыделения $0 \le z \le l$ и выходную z > l.

В случае небольших энерговкладов, в первом приближении, физические свойства газа можно считать постоянными и равными некоторым средним для рассматриваемого интервала температур величинам. Газ считается одноатомным, что позволяет не рассматривать процессы колебательной релаксации. Осесимметричное распределение внутренних источников тепла в канале описывается функцией *E(r, z)*:

$$E(r,z)=\begin{cases}0 & z<0, z>l\\ F(r) & 0\le z\le l\end{cases}$$

В расчетах используется среднее значение осевой скорости *U*, которое получается усреднением по радиальной координате осредненной по времени осевой компоненты вектора скорости.

С учетом сделанных допущений процесс конвективного теплообмена в рассматриваемой системе описывается дифференциальными уравнениями

$$Pe\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2};\ z<0,\quad z>\frac{l}{R};$$

$$Pe\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+\frac{q_V R^2}{\lambda}F(r);$$

$$0<z\le\frac{l}{R}.$$

Герасимов Александр Викторович, профессор.
Кирпичников Александр Петрович, зав. кафедрой.
Рачевский Леонид Александрович, доцент.
Казанский национальный исследовательский технологический университет.
Россия, 420015, г. Казань, ул. Карла Маркса, 68.
Тел.: (843) 2314188**.** E-mail: gerasimov@kstu.ru

Статья поступила в редакцию 1 ноября 2012 г.

Здесь $Pe = \dfrac{UR}{\alpha}$ – число Пекле; $\theta = T - T_W$, где T_W – температура на стенке; α и λ – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности, соответственно; q_V – плотность мощности внутреннего тепловыделения на оси канала; U – скорость газа. Температура газа на стенке T_W считается постоянной, а ее профиль в радиальном направлении в радиальном направлении симметричным.

Кроме этого накладываются условия непрерывности для величин T и $\dfrac{\partial T}{\partial z}$ на границе зоны внутреннего тепловыделения.

Метод решения

Остановимся подробно на решении краевой задачи относительно θ.

Используем тот факт, что произвольная функция источника *F(r)* может быть разложена в ряд Фурье-Бесселя по функциям $J_0(\mu_i r)$, $0 \le r \le 1$, где μ_i – *i*-ый корень уравнения $J_0(x) = 0$.

Другими словами

$$F(r) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_0(\mu_i r),$$

где

$$a_i = \frac{1}{J_1^2(\mu_i)} \int_0^1 F(r) J_0(\mu_i r) r dr$$

Отыскиваем функцию распределения избыточной температуры $\theta(r, z)$ в виде

$$\theta(r, z) = \sum_{i=1} f_i(z) J_0(\mu_i r).$$

Для решения краевой задачи используем метод Канторовича-Галеркина [4], который редуцирует указанную краевую задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений путем ортогональности невязки к базисным функциям $J_0(\mu_i r)$.

Скалярное произведение, как легко понять, представляет собой

$$(F, G) = \int_0^1 F(r) G(r) r dr$$

Заметим, что

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial J_0(\mu_i r)}{\partial r} \right) = \mu_i^2 J_0^{/}(\mu_i r) + \frac{1}{\mu_i r}\mu_i^2 J_0^{/}(\mu_i r)$$

Так как $J_0(\mu_r r)$ является решением уравнений Бесселя нулевого порядка, то

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial J_0(\mu_i r)}{\partial r} \right) = -\mu_i^2 J_0(\mu_i r)$$

Отсюда следует, что краевая задача с учетом предложенной аппроксимации, принимает вид

$$Pe \sum_{j=1} J_0(\mu_i r) f_i^{/}(z) = -\sum_{i=1} \mu_i^2 J_0(\mu_i r) f_i(z) + + \sum_{j=1} J_0(\mu_i r) f_i^{/}(z),$$

$$z < 0, \quad z > \frac{l}{R};$$

$$Pe \sum_{j=1} J_0(\mu_i r) f_i^{/}(z) = -\sum_{i=1} \mu_i^2 J_0(\mu_i r) f_i(z) + + \sum_{j=1} J_0(\mu_i r) f_i^{/}(z) + \frac{q_V}{\lambda} R^2 \sum_{i=1} a_i J_0(\mu_i r),$$

$$0 \le z \le \frac{l}{R}$$

или, после ряда скалярных умножений:

$$Pe f'(z) = -\mu_i^2 f_i(z) + f_i^{/}(z); \; z < 0, \quad z > \frac{l}{R};$$

$$Pe f'(z) = -\mu_i^2 f_i(z) + f_i^{/}(z) + \frac{q_V R^2}{\lambda} a_i;$$

$$0 \le z \le \frac{l}{R};$$

Анализ результатов

Решение этой системы дифференциальных уравнений (с учетом условий сшивания f_i и $f_i^{/}$ на границах $z = 0$, $z = l$) дает следующие формулы для этих величин:

$$f_i(z) = \frac{q_V R^2}{\lambda \mu_i^2} \begin{cases} \dfrac{A_i^- e^{A_i^+ z} e^{-\frac{l}{R} A_i^+} - 1}{A_i^+ - A_i^-}; & z < 0 \\ 1 + \dfrac{A_i^- e^{(z - \frac{l}{R}) A_i^+} - A_i e^{z A_i^+}}{A_i^+ - A_i^-}; & 0 \le z \dfrac{l}{R} \\ \dfrac{A_i^+ e^{A_i^- z} e^{-\frac{l}{R} A_i^-} - 1}{A_i^+ - A_i^-}; & z > \dfrac{l}{R} \end{cases}$$

Здесь $A_i^+ = \dfrac{Pe + \sqrt{Pe^2 + 4\mu_i^2}}{2}$;

$$A_i^- = \frac{Pe - \sqrt{Pe^2 + 4\mu_i^2}}{2}$$

Последние соотношения окончательно решают поставленную задачу.

Как следует из полученных соотношений, в отсутствии потока газа ($Pe = 0$) осевой профиль температуры симметричен относительно $z = 2R$. При достаточно большой величине l/R ($\frac{l}{R} \approx 4-5$) θ достигает предельного значения, причем тем быстрее, чем больше эта (l/R) величина.

В зоне внутреннего тепловыделения θ уменьшается почти вдвое по сравнению со своим предельным значением, вследствие выноса тепла с помощью механизма теплопроводности в осевом направлении. В коротких каналах ($l/R > 3$) влияние этого процесса распространяется на всю длину зоны внутреннего тепловыделения.

При наличии потока газа ($Pe \neq 0$) профиль температуры теряет симметрии. Величина θ уменьшается в любой точке зоны внутреннего тепловыделения, длина переходного участка увеличивается.

Влияние зоны $z > l/R$ приводит к тому, что при увеличении числа Pe от нуля до некоторого значения $Pe_к$, зависящего от l/R, θ в конце зоны $0 \le z \le \frac{l}{R}$ повышается. Этот эффект связан с тем, что влияние зоны максимально в отсутствии потока газа и с ростом Pe убывает.

Заметим, что при достаточно больших значениях числа Pe , зависящих от l/R, расчеты θ в зоне $0 \le z \le \frac{l}{R}$ с точностью до 3 % можно проводить без учета влияния зоны $z > l/R$.

В достаточно протяженной по длине зоне внутреннего тепловыделения ($l/R > 30$) с увеличением числа Pe от нуля до некоторого значения температура в канале этой зоны увеличивается, достигая предельного значения. Поток газа здесь как бы снимает влияние выходной зоны, в то время как фронт охлаждения газа еще не достиг правой границы зоны внутреннего тепловыделения. С дальнейшим ростом Pe этот фронт приблизится к ней, и температура начнет убывать.

Заключение

Рассмотренный метод не единственный, с помощью которого можно оценить температурный профиль. В работе [5] предложен также аналитический метод, позволяющий определить температуру тяжелых частиц в канале плазмотрона, используя обширный материал с распределением электронной температуры.

Полученные в данной работе формулы позволяют рассчитать локальный и интегральный баланс энергии газа как при ламинарном, так и при турбулентном режиме течения в цилиндрическом канале.

Литература

1. *Слетери Дж. С.* Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах. – М.: Энергия, 1978.

2. *Сергеев В. Л.* // Генераторы низкотемпературной плазмы. – Минск, 1986.

3. *Жуков М. Ф. и др.* Электродуговые нагреватели газа. – Новосибирск: Наука, 1973.

4. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.-Л.: Гостехиздат. 1949.

5. *Кирпичников А. П., Рачевский Л. А.*// Известия вузов. Физика. 1989. № 8. С. 85.

Calculation of a temperature field in the moving gas with an internal source of heat

A.V. Gerasimov, A.P. Kirpichnikov, and L.A. Rachevsky

Kazan National Research Technological University
68 Karl Marx str., Kazan, 420015, Russia
E-mail: gerasimov@kstu.ru

Movement of gas in the cylindrical channel and consistently taking place through three zones is considered. These are zones: input $z < 0$, an internal heat generation $0 \le z \le 1$ and output. The analytical decisions are received, which allow to take into account influence on thermal balance of limitation of sources of heat on axial coordinate and intensity blower in this direction.

PACS: 52.80.Pi
Keywords: convective, heat transfer, moving gas, internal source, temperature, boundary problem.

Bibliography – 5 references *Received November 1, 2012*