Общая физика

УДК 538.9; 519.216

Случайные импульсные процессы в физике

Б.И. Якубович

Проанализированы случайные импульсные процессы, широко используемые для описания физических явлений. Вычислен в весьма общем виде спектр случайного телеграфного сигнала. Получено выражение для спектра трехуровневого случайного сигнала. Вычислен в весьма общем виде спектр случайной последовательности статистически связанных импульсов. Полученные результаты могут быть применены для анализа многочисленных процессов в физике и технике.

PACS: 05.40.— a; 72.70.+m
Ключевые слова: случайный, импульс, спектр, последовательность.

Введение

Многие физические процессы, протекающие в различных физических системах и технических устройствах, представляют собой случайные импульсные процессы. Существуют стохастические импульсные процессы, которые лежат в основе многочисленных явлений, имеющих различную физическую природу. Анализ таких процессов и вычисление их характеристик проводятся при исследованиях в различных областях физики и техники. Естественно, анализ проводится с учетом условий, свойственных конкретной физической или технической задаче, и его результаты применимы лишь для конкретных рассматриваемых случаев.

Представляет серьезный интерес рассмотреть случайные импульсные процессы, имеющие широкое распространение, и определить их характеристики в достаточно общем виде. Впоследствии эти результаты могут быть использованы при изучении физических явлений, связанных с такими процессами, в различных областях физики и техники. Важной и во многом определяющей характеристикой стохастического процесса является его спектр.

В данной статье представлены результаты вычисления спектров ряда наиболее значительных случайных импульсных процессов.

Якубович Борис Иосифович, ст. научный сотрудник.
Петербургский институт ядерной физики.
Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт».
Россия, 188300, Ленинградская обл., г. Гатчина, Орлова роща.
Тел.: 81371–4–64–92. E-mail: yakubovich@pnpi.spb.ru

Статья поступила в редакцию 28 ноября 2013 г.

Случайный телеграфный сигнал

Сначала вычислим спектр случайного телеграфного сигнала. Случайным телеграфным сигналом называется случайный сигнал, который может принимать одно из двух возможных значений. К случайному сигналу такого вида сводятся многие стохастические процессы, протекающие в различных физических системах. В связи с широким распространением стохастических процессов, имеющих вид случайного телеграфного сигнала, в физике и технике, а также принципиальной и практической важностью вычисления спектра такого сигнала во многих случаях анализируем его спектр в достаточно общем виде. Подобные вопросы ранее рассматривались автором в работах [1, 2].

Рассматриваем случайный сигнал, который может находиться в двух состояниях, т.е. амплитуда сигнала принимает одно из двух возможных значений. Вид сигнала определяется значениями амплитуд и распределениями времен нахождения сигнала в каждом состоянии. Вычислим спектр такого случайного сигнала. Не ограничивая общности, можно рассматривать случайный сигнал с нулевым средним значением. В этом случае $A\langle\tau\rangle - B\langle\theta\rangle = 0$, где A и B — значения амплитуд сигнала; $\langle\tau\rangle$ и $\langle\theta\rangle$ — соответствующие им средние времена нахождения сигнала в каждом состоянии, определяемые как $\langle\tau\rangle = \int_0^\infty \tau v(\tau)d\tau$, $\langle\theta\rangle = \int_0^\infty \theta w(\theta)d\theta$; $v(\tau), w(\theta)$ — плотности распределения времен. Рассматриваем весьма общий случай, а именно, вероятность перехода сигнала из одного состояния в другое зависит от времени нахождения сигнала в данном состоянии и не зависит от предшествующих событий. Другими словами, рассматривается случай произвольных статистических связей и, соответственно, произвольных распределений $v(\tau)$ и $w(\theta)$. Данный случайный сигнал представляет собой импульсный стохастический процесс. Вычислим его спектр, считая рассматриваемый стохастический процесс стационарным.

Импульс процесса с длительностью $\tau+\theta$ имеет вид:

$$x(t)=\left.\begin{cases}A, & 0<t<\tau\\ -B, & \tau<t<\tau+\theta\end{cases}\right\}.$$

Рассматриваемый случайный процесс представляет собой случайную последовательность импульсов:

$$X(t)=\sum_{j=1}^{n} x(t-\tau_1-\theta_1 ... -\tau_{j-1}-\theta_{j-1},\tau_j+\theta_j).$$

Проведем преобразование Фурье:

$$F(f)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-2\pi ift}dt=$$
$$=\sum_{j=1}^{n} e^{-2\pi if(\tau_1+\theta_1+...+\tau_{j-1}+\theta_{j-1})}F_0(f,\tau_j+\theta_j),$$

здесь

$$F_0(f,\tau_j+\theta_j)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t,\tau_j+\theta_j)e^{-2\pi ift}dt.$$

Тогда

$$\left|F(f)\right|^2=\sum_{j=1}^{n}\left|F_0(f,\tau_j+\theta_j)\right|^2+$$
$$+2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j} e^{2\pi if(\tau_j+\theta_j+...+\tau_{j+i-1}+\theta_{j+i-1})}\times$$
$$\times F_0(f,\tau_j+\theta_j)F_0^*(f,\tau_{j+i}+\theta_{j+i}).$$

Рассчитываем среднее по ансамблю $\langle\left|F(f)\right|^2\rangle$, используя независимость параметров в рассматриваемой последовательности импульсов:

$$\langle\left|F(f)\right|^2\rangle=\sum_{j=1}^{n}\langle\left|F(f,\tau_j+\theta_j)\right|^2\rangle+$$
$$+2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j}\langle F_0^*(f,\tau_{j+i}+\theta_{j+i})\rangle\langle F_0(f,\tau_j+\theta_j)e^{2\pi if(\tau_j+\theta_j)}\rangle\times$$
$$\times\langle e^{2\pi if(\tau_{j+1}+\theta_{j+1})}\rangle...\langle e^{2\pi if(\tau_{j+i-1}+\theta_{j+i-1})}\rangle.$$

Вычисляем спектральную плотность рассматриваемого стохастического процесса, учитывая его стационарность:

$$S(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{\langle\left|F(f)\right|^2\rangle}{T}=\nu(\langle\left|F(f,\tau+\theta)\right|^2\rangle+2\operatorname{Re}\frac{\langle F_0^*(f,\tau+\theta)\rangle\langle F_0(f,\tau+\theta)e^{2\pi if(\tau+\theta)}\rangle}{1-\langle e^{2\pi if(\tau+\theta)}\rangle}),$$

где $\nu=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{n}{T}$ — среднее число импульсов в единицу времени. Очевидно, что $\nu=\dfrac{1}{\langle\tau\rangle+\langle\theta\rangle}$. Вычислим теперь преобразование Фурье одиночного импульса $F_0(f,\tau+\theta)$:

$$F_0(f,\tau+\theta)=\int_0^{\infty} x(t,\tau+\theta)e^{-2\pi ift}dt=$$
$$=A(\int_0^{\tau} e^{-2\pi ift}dt-\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\int_{\tau}^{\tau+\theta} e^{-2\pi ift}dt)=\frac{A}{-2\pi if}\left[\left(1+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\right)e^{-2\pi if\tau}-\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}e^{-2\pi if(\tau+\theta)}-1\right].$$

В итоге, получаем выражение для спектральной плотности случайного телеграфного сигнала следующего вида:

$$\begin{aligned}
S(f)&=\frac{A^2}{2\pi^2 f^2(\langle\tau\rangle+\langle\theta\rangle)}(G(f)+\operatorname{Re}H(f)),\\
G(f)&=1+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}+\frac{\langle\tau\rangle^2}{\langle\theta\rangle^2}-\left(1+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\right)\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\langle\cos 2\pi f\theta\rangle-\\
&-\left(1+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\right)\langle\cos 2\pi f\tau\rangle+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\langle\cos 2\pi f(\tau+\theta)\rangle,\\
H(f)&=\left[\left(1+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\right)\langle e^{2\pi if\theta}\rangle-\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}-\langle e^{2\pi if(\tau+\theta)}\rangle\right]\times\\
&\times\left[\left(1+\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\right)\langle e^{2\pi if\tau}\rangle-\frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\langle e^{2\pi if(\tau+\theta)}\rangle-1\right]\Big/\left(1-\langle e^{2\pi if(\tau+\theta)}\rangle\right).
\end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом, вычислен спектр случайного телеграфного сигнала в весьма общем случае. В более частных случаях, когда имеются конкретные плотности распределений времен в каждом состоянии, в результате их подстановки в полученную формулу выражение для спектральной плотности сигнала может быть значительно упрощено. В простом случае, когда вероятности переходов с одного уровня на другой распределены равномерно и соответственно времена распределены по экспоненциальному закону: $v(\tau)=\frac{1}{\langle\tau\rangle}e^{-\tau/\langle\tau\rangle}$, $w(\theta)=\frac{1}{\langle\theta\rangle}e^{-\theta/\langle\theta\rangle}$, полученное выражение для спектра сигнала приобретает вид:

$$S(f)=\frac{2A^2\langle\tau\rangle}{\langle\theta\rangle}\cdot\frac{\frac{1}{\langle\theta\rangle}+\frac{1}{\langle\tau\rangle}}{4\pi^2f^2+\left(\frac{1}{\langle\theta\rangle}+\frac{1}{\langle\tau\rangle}\right)^2}.$$

Такое выражение было получено Махлупом [3] для случая статистически независимых переходов. В более частной ситуации, когда средние времена нахождения в обоих состояниях одинаковы, т.е. $\langle\tau\rangle=\langle\theta\rangle$, спектр случайного телеграфного сигнала приобретает широко известный вид:

$$S(f)=\frac{A^2\langle\tau\rangle}{1+\pi^2f^2\langle\tau\rangle^2}.$$

Спектр для этого случая был вычислен Райсом [4] и часто называется лоренцевским спектром.

Таким образом, вычислен спектр случайного телеграфного сигнала в достаточно общем виде. Полученное выражение для спектра может быть использовано для анализа стохастических процессов, имеющих форму случайного телеграфного сигнала, причем независимо от их физической природы, а также при решении многих технических задач. Обобщая, можно сказать, что для широкой категории стохастических процессов, встречающихся в различных областях физики и во многих отраслях техники, не понадобится проводить вычисление спектра процесса, так как он может быть определен из полученной общей формулы (1).

Трехуровневый случайный сигнал

Многие стохастические процессы, протекающие в разнообразных физических системах, сводятся к случайному сигналу, который может принимать одно из нескольких возможных значений. При проведении исследований в различных областях физики и при решении многочисленных технических задач в большинстве случаев встречаются случайные сигналы данного вида, которые могут принимать одно из двух или трех возможных значений. Широкое распространение, а также во многих случаях принципиальная и практическая значимость стохастических процессов в физике и технике, приводящих к случайным сигналам указанного типа, делают важным проведение исследований спектров таких сигналов. Случайный сигнал, который может принимать одно из двух возможных значений, обычно называемый случайным телеграфным сигналом, рассмотрен в предыдущем разделе. В данном разделе вычисляем спектр трехуровневого случайного сигнала в достаточно общем виде. Такие вопросы рассматривались ранее автором в [5, 6].

Рассмотрим трехуровневый случайный сигнал, амплитуда которого может принимать значения: $a, 0, -b$. Изменения амплитуды происходят между ее соседними значениями. Введем следующие обозначения: τ_a,τ_0,τ_b — времена, в течение которых амплитуда сигнала принимает, соответственно, значения: $a, 0, -b$; $u(\tau_a), v(\tau_0), w(\tau_b)$ — плотности распределений этих времен. Рассмотрим случайный сигнал с нулевым средним значением как случайную последовательность прямоугольных импульсов с амплитудами a и $-b$, соответственно, с длительностями импульсов τ_a и τ_b и интервалами между импульсами τ_0. Анализируем весьма общий случай, а именно, распределения параметров импульса заданы в общем виде, параметры импульса статистически связаны, параметры различных импульсов независимы, распределение интервалов между импульсами задано в общем виде. Считаем случайную последовательность стационарной.

Вычислим спектр трехуровневого случайного сигнала. Для этого найдем спектр случайной последовательности импульсов с указанными выше свойствами. Случайную последовательность импульсов можно записать в следующем виде:

$$X(t)=\sum_{j=1}^{n}D_jx(t-\tau_1-\theta_1\ldots-\tau_{j-1}-\theta_{j-1},\tau_j),$$

где $x(t)$ — функция, описывающая форму импульса, D — амплитуда, τ — длительность импульса, θ — временной интервал между импульсами, n — число импульсов в последовательности продолжительностью T. Проведем преобразование Фурье случайной последовательности импульсов:

$$F(f)=\int_{-\infty}^{\infty}X(t)e^{-2\pi ift}dt=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}D_je^{-2\pi if(\tau_1+\theta_1\ldots+\tau_{j-1}+\theta_{j-1})}F_0(f,\tau_j),$$

здесь

$$F_0(f,\tau_j)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t,\tau_j)e^{-2\pi ift}dt.$$

Тогда

$$\left|F(f)\right|^2=\sum_{j=1}^{n}D_j^2\left|F_0(f,\tau_j)\right|^2+$$
$$+2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j}D_jD_{j+i}e^{2\pi if(\tau_j+\theta_j\ldots+\tau_{j+i-1}+\theta_{j+i-1})}\cdot F_0(f,\tau_j)F_0^*(f,\tau_{j+i}).$$

Используя независимость параметров различных импульсов, рассчитываем среднее по ансамблю $\langle |F(f)|^2 \rangle$ и получаем следующее выражение:

$$\langle |F(f)|^2 \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle D_j^2 |F(f,\tau_j)|^2 \rangle +$$
$$+2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j} \langle D_j F_0(f,\tau_j) e^{2\pi i f \tau_j} \rangle \langle D_{j+i} F_0^*(f,\tau_{j+i}) \rangle \times$$
$$\times \langle e^{2\pi i f \theta_j} \rangle \langle e^{2\pi i f \tau_{j+1}} \rangle \langle e^{2\pi i f \theta_{j+1}} \rangle ... \langle e^{2\pi i f \tau_{j+i-1}} \rangle \langle e^{2\pi i f \theta_{j+i-1}} \rangle.$$

Вычисляем спектральную плотность случайной последовательности импульсов, определяемую соотношением:

$$S(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{\langle |F(f)|^2 \rangle}{T}.$$

Учитывая стационарность рассматриваемого случайного процесса, получаем следующее выражение:

$$S(f) = \nu_0 \{ \langle D^2 |F_0(f,\tau)|^2 \rangle +$$
$$+2\mathrm{Re} \langle DF_0(f,\tau) e^{2\pi i f \tau} \rangle \langle DF_0^*(f,\tau) \rangle \frac{\langle e^{2\pi i f \theta} \rangle}{1 - \langle e^{2\pi i f \tau} \rangle \langle e^{2\pi i f \theta} \rangle} \},$$

где $\nu_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{n}{T}$ — среднее число импульсов в единицу времени. Для случайной последовательности, состоящей из импульсов прямоугольной формы, $F_0(f,\tau)$ имеет вид:

$$F_0(f,\tau) = \int_0^\tau x(t) e^{-2\pi i f t} dt = \frac{e^{-\pi i f \tau} \sin \pi f t}{\pi f}.$$

Подставляя данное соотношение в формулу (18), получаем выражение для спектра случайной последовательности прямоугольных импульсов:

$$S(f) = \frac{\nu_0}{\pi^2 f^2} \{ \langle D^2 \sin^2 \pi f \tau \rangle + 2\mathrm{Re} \frac{\langle D e^{\pi i f \tau} \sin \pi f \tau \rangle^2 \langle e^{2\pi i f \theta} \rangle}{1 - \langle e^{2\pi i f \tau} \rangle \langle e^{2\pi i f \theta} \rangle} \}.$$

Введем среднюю частоту изменений амплитуды сигнала ν. Очевидно, что $\nu = 2\nu_0$. Обозначим p вероятность изменения амплитуды сигнала из $D=0$ в $D=-b$, и $(1-p)$ — вероятность изменения амплитуды сигнала из $D=0$ в $D=a$. Учитывая указанные выше значения, которые может принимать амплитуда трехуровневого случайного сигнала, и соответствующие им распределения времен, находим выражение для спектра трехуровневого случайного сигнала:

$$S(f) = \frac{\nu}{2\pi^2 f^2} \left[G(f) + 2\mathrm{Re} \frac{\Phi(f)}{\Psi(f)} \right], \quad (2)$$

где

$$G(f) = b^2 p \int_0^\infty \sin^2 \pi f \tau_b \cdot w(\tau_b) d\tau_b + a^2 (1-p) \int_0^\infty \sin^2 \pi f \tau_a \cdot u(\tau_a) d\tau_a,$$

$$\Phi(f) = [-pb \int_0^\infty e^{\pi i f \tau_b} \sin \pi f \tau_b \cdot w(\tau_b) d\tau_b +$$
$$+(1-p) a \int_0^\infty e^{\pi i f \tau_a} \sin \pi f \tau_a \cdot u(\tau_a) d\tau_a]^2 \cdot \int_0^\infty e^{2\pi i f \tau_0} \cdot v(\tau_0) d\tau_0,$$

$$\Psi(f) = 1 - p \int_0^\infty e^{2\pi i f \tau_b} \cdot w(\tau_b) d\tau_b \cdot \int_0^\infty e^{2\pi i f \tau_0} \cdot v(\tau_0) d\tau_0 -$$
$$-(1-p) \int_0^\infty e^{2\pi i f \tau_a} \cdot u(\tau_a) d\tau_a \cdot \int_0^\infty e^{2\pi i f \tau_0} \cdot v(\tau_0) d\tau_0.$$

В итоге вычислено выражение общего вида для спектра трехуровневого случайного сигнала. Функции распределения времен, в течение которых амплитуда сигнала принимает каждое из возможных значений, и распределение вероятностей этих значений заданы в общем виде.

Таким образом, проанализирован трехуровневый случайный сигнал. К сигналу такого вида сводятся многие стохастические процессы, встречающиеся в различных областях физики и техники. Трехуровневый случайный сигнал рассмотрен в весьма общем случае: существуют статистические связи между параметрами сигнала, функции распределения параметров заданы в общем виде. Вычислено выражение общего вида для спектра трехуровневого случайного сигнала.

Полученное выражение может быть использовано для анализа многочисленных стохастических процессов, имеющих такую форму, причем независимо от их физической природы. Очевидно, что для подобных стохастических процессов, имеющих место в различных физических объектах и многих технических устройствах, теперь не понадобится проводить вычисление спектра процесса, так как он может быть определен из полученной общей формулы (2).

Случайная последовательность статистически связанных импульсов

Как уже отмечено выше, многие физические процессы, протекающие в различных объектах и системах, представляют собой стохастические импульсные процессы. Они наблюдаются в разных областях физики и имеют вид случайной последовательности импульсов. Анализ таких процессов и вычисление их характеристик широко проводятся для конкретных задач. В связи с большим количеством подобных задач представляется целесообразным проанализировать случайную последовательность импульсов в достаточно общем виде и найти универсальное выражение для ее спектра. Оно могло бы быть использовано для непосредственного определения спектра импульсных процессов в многочисленных частных случаях для решения широкого класса физических задач. Вычислим спектр случайной последовательности импульсов. Подобные вопросы анализировались ранее автором в [6—8].

Рассматриваем следующую случайную последовательность импульсов. Импульсы статистически связаны, т.е. амплитуда импульса статистически связана с амплитудой и длительностью предшествовавшего импульса. Параметры импульса (длительность и амплитуда) статистически связаны. Статистические связи и распределения параметров заданы в общем виде. Импульсы имеют произвольную форму. Рассматриваемый стохастический процесс считаем стационарным. Таким образом, рассматриваемая случайная последовательность импульсов задана в весьма общем виде. Ее можно записать следующим образом:

$$Y = \sum_{j=1}^{n} A_j y(t-\theta_1 \ldots - \theta_{j-1}, \theta_j),$$

где n — число импульсов в последовательности продолжительностью T, $y(t)$ — функция, описывающая форму импульса, A_j — амплитуда, θ_j — длительность импульса. Проведем преобразование Фурье:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} A_j y(t-\theta_1 \ldots - \theta_{j-1}, \theta_j) e^{-2\pi i f t} dt = \sum_{j=1}^{n} A_j e^{-2\pi i f(\theta_1 + \ldots + \theta_{j-1})} F_0(f, \theta_j),$$

где $F_0(f,\theta_j) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t,\theta_j) e^{-2\pi i f t} dt.$

Соответственно,

$$\left|F(f)\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} A_j^2 \left|F_0(f,\theta_j)\right|^2 + 2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} A_j A_{j+i} e^{2\pi i f(\theta_j + \ldots + \theta_{j+i-1})} \cdot F_0(f,\theta_j) F_0^*(f,\theta_{j+i}).$$

Рассчитываем среднее по ансамблю $\langle \left|F(f)\right|^2 \rangle$, используя независимость ряда параметров в рассматриваемой последовательности импульсов,

$$\langle \left|F(f)\right|^2 \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle A_j^2 \left|F_0(f,\theta_j)\right|^2 \rangle + +2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n-1} \langle A_j A_{j+1} e^{2\pi i f \theta_j} F_0(f,\theta_j) F_0^*(f,\theta_{j+1}) \rangle +$$
$$+2\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{i=2}^{n-j} \langle A_j e^{2\pi i f \theta_j} F_0(f,\theta_j) \rangle \cdot \langle A_{j+i} e^{2\pi i f \theta_{j+i-1}} F_0^*(f,\theta_{j+i}) \rangle \langle e^{2\pi i f \theta_{j+1}} \rangle \ldots \langle e^{2\pi i f \theta_{j+i-2}} \rangle.$$

Вычисляем спектр случайной последовательности импульсов:

$$S(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{\langle \left|F(f)\right|^2 \rangle}{T}.$$

Принимая во внимание стационарность рассматриваемой импульсной последовательности, получаем спектр следующего вида:

$$S(f) = \nu \{ \langle A^2 \left|F_0(f,\theta)\right|^2 \rangle + 2\operatorname{Re} \langle A_j A_{j+1} e^{2\pi i f \theta_j} F_0(f,\theta_j) F_0^*(f,\theta_{j+1}) \rangle +$$
$$+2\operatorname{Re} \langle A_j e^{2\pi i f \theta_{j-1}} F_0^*(f,\theta_j) \rangle \frac{\langle A e^{2\pi i f \theta} F_0(f,\theta) \rangle}{1 - \langle e^{2\pi i f \theta} \rangle} \}, \quad (3)$$

здесь ν — средняя частота импульсов. Отметим, что $\nu = 1/\langle\theta\rangle$. Полученная формула (3) представляет собой выражение общего вида для спектра случайной последовательности импульсов. Она дает более общее описание спектра стохастического импульсного процесса, чем имевшиеся ранее результаты.

Далее рассмотрим различные частные случаи. Проведем последовательное упрощение случайной последовательности импульсов. Для случайной последовательности со статистически независимыми импульсами из формулы (3) получаем следующее выражение для спектра:

$$S(f) = \nu\{\langle A^2 \left|F_0(f,\theta)\right|^2\rangle + 2\mathrm{Re}\langle Ae^{2\pi i f\theta}F_0(f,\theta)\rangle\langle AF_0^*(f,\theta)\rangle \frac{1}{1-\langle e^{2\pi i f\theta}\rangle}\}. \quad (4)$$

В случае, когда параметры импульса (длительность и амплитуда) статистически независимы, выражение (4) приобретает следующий вид:

$$S(f) = \nu\{\langle A^2\rangle\langle\left|F_0(f,\theta)\right|^2\rangle + 2\langle A\rangle^2\,\mathrm{Re}\langle e^{2\pi i f\theta}F_0(f,\theta)\rangle\langle F_0^*(f,\theta)\rangle \frac{1}{1-\langle e^{2\pi i f\theta}\rangle}\}.$$

Проведем дальнейшие упрощения случайной последовательности импульсов. Для симметричного распределения амплитуд импульсов $\langle A\rangle = 0$, и, следовательно, спектр определяется так:

$$S(f) = \nu\langle A^2\rangle\langle\left|F_0(f,\theta)\right|^2\rangle.$$

В случае, когда импульсы одинаковы по форме и длительности, выражение для спектра случайной последовательности импульсов имеет вид:

$$S(f) = \nu\langle A^2\rangle\left|F_0(f,\theta)\right|^2. \quad (5)$$

Полученное соотношение (5) представляет собой известную теорему Карсона [9]. Таким образом, вычисленное общее выражение для случайной последовательности импульсов (3) переходит в теорему Карсона в следующем частном случае: импульсы в случайной последовательности статистически независимы, параметры импульса статистически независимы, амплитуды импульсов распределены симметрично, импульсы одинаковы по форме и длительности.

Заключение

Наиболее значительные результаты таковы. Проанализирована случайная последовательность статистически связанных импульсов со следующими свойствами: имеются статистические связи между параметрами последовательных импульсов, параметры импульса статистически связаны, статистические связи и функции распределения параметров заданы в общем виде, импульсы имеют произвольную форму. Вычислено в весьма общем виде выражение для спектра случайной последовательности импульсов.

Полученное выражение может быть применено для определения спектров многочисленных стохастических процессов в различных областях физики, имеющих вид данной случайной последовательности или ее многих частных случаев. Из вычисленного общего выражения возможен переход к различным частным случаям и, в том числе, к известным ранее формулам.

В результате последовательного упрощения случайной последовательности импульсов получены формулы для спектров в следующих случаях: случайная последовательность со статистически независимыми импульсами; случайная последовательность со статистически независимыми импульсами и параметрами импульса; случайная последовательность со статистически независимыми импульсами и параметрами импульса и симметричным распределением амплитуд импульсов. При дальнейшем упрощении: импульсы статистически не связаны, параметры импульса статистически независимы, амплитуды импульсов распределены симметрично, импульсы имеют одинаковую форму и длительность; полученное общее выражение переходит в теорему Карсона.

Рассмотренная случайная последовательность импульсов, заданная в весьма общем виде, может быть использована для описания многочисленных стохастических импульсных процессов, протекающих в различных физических объектах и системах. Таким образом, полученные выражения могут быть применены для определения и анализа спектров стохастических импульсных процессов при решении многих физических и технических задач.

Литература

1. *Якубович Б.И.* // Письма ЖТФ. 1995. Т. 21. № 24. С. 10.
2. *Якубович Б.И.* Электрические флуктуации в неметаллах.— СПб.: Энергоатомиздат, 1999.
3. *Machlup S.* // J. Appl. Phys. 1954. V. 25. No. 3. P. 341.
4. *Rise S.* // Bell Syst.Tech. J. 1945. V. 24. No. 1. P. 46.
5. *Якубович Б.И.*// Успехи современной радиоэлектроники. 2011. № 6. С. 56.
6. *Якубович Б.И.* Электрические флуктуации в твердых телах.— Germany: AV Akademikerverlag, 2013.
7. *Якубович Б.И.* // Нелинейный мир. 2010. Т. 8. № 12. С. 782.
8. *Якубович Б.И.* Электрический шум и дефекты структуры твердых тел.— Germany: LAP Lambert Academic Publishing, 2012.
9. *Carson J.R.* // Bell Syst.Tech. J. 1931. V. 10. No. 3. P. 374.

Stochastic pulse processes in physics

B.I. Yakubovich

Petersburg Nuclear Physics Institute,
Gatchina, Leningrad district, 188300, Russia.
E-mail: yakubovich@pnpi.spb.ru

The stochastic pulse processes which are widely used for the description of the physical phenomena are analysed. The spectrum of random telegraph signal is calculated in general form. Expression for spectrum of three-level random signal is obtained. The spectrum of stochastic sequence statistically connected pulses is calculated in general form. The obtained results can be applied to the analysis of numerous processes in physics and technics.

PACS: 05.40.— a; 72.70.+m
Keywords: stochastic, pulse, spectrum, sequence.

Bibliography ─ 9 references *Received November 28, 2013*