

УДК 548.232.4

Кинетика роста вершины дендрита в глубоко переохлажденном расплаве Часть II. Аналитическая структура возмущений линии роста

О.Н. Шабловский

Получены закономерности появления неустойчивостей на вершине двумерного дендрита при кристаллизации из переохлажденного однокомпонентного расплава. Дано аналитическое описание режимов роста, для которых наблюдаются расщепление вершины, предвестник складки, стоячая волна возмущения кривизны вершины. Изучена корреляция «кривизна фазовой границы — скорость роста кристалла».

PACS: 64.70 Dv.

Ключевые слова: высокоскоростная кристаллизация; морфологическая неустойчивость линии роста; кривизна фазовой границы.

Введение

Экспериментальные и теоретические исследования высокоскоростного затвердевания расплавов направлены на решение проблемы создания конструкционных материалов с повышенными эксплуатационными свойствами.

В первой части статьи [1] представлены результаты теоретического исследования кинетики роста вершины дендрита при закритическом переохлаждении однокомпонентного чистого расплава. Дан вывод системы уравнений, определяющих скорость и кривизну плоской двумерной фазовой границы кристаллизации. Получена связь возмущения кривизны с возмущениями скорости, ускорения и другими параметрами линии роста.

Цель второй части статьи — продолжить исследование уравнения фазовой границы кристаллизации (ФГК), полученного в первой части статьи, а также изучить эволюционные свойства возмущений двумерной линии роста, в т.ч. определить корреляции «кривизна — скорость» и «кривизна — скорость — ускорение» на вершине дендрита.

Эволюция возмущений ФГК

Малые возмущения линии роста вершины дендрита подчиняются уравнению

$$(f_{tt} - \alpha_0 f_{yy})_t + \alpha_1 f_t + \alpha_2 f_{tt} = \alpha_3 f_{yy}; \quad (1)$$

Шабловский Олег Никифорович, профессор.
Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого.
Беларусь, 246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.
E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 20 октября 2013 г.

© Шабловский О.Н., 2014

$$v = f_t, \quad \kappa = f_{yy}.$$

Этот результат был получен в [1] после линеаризации уравнения ФГК на точном решении стационарной формы. Здесь $f(y,t)$ — малая добавка к основному решению; $v(y,t)$, $\kappa(y,t)$ — малые возмущения скорости и кривизны фазовой границы. Процедуру вывода уравнения ФГК иллюстрируют рис. 1 и 2; необходимые пояснения изложены в первой части данной статьи. Подробные выражения для $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ содержатся в записи уравнения (26) из [1]. Уравнение (1) имеет точное решение

$$f = f_1 \exp(tb_1 \sqrt{\alpha_0})(E + E^{-1}), \quad E = \exp(yb_1), \quad (2)$$

$$b_1 = \alpha_1 \sqrt{\alpha_0} / (\alpha_3 - \alpha_2 \alpha_0) > 0, \quad f_1 < 0.$$

Выбором постоянной $|f_1|$ можно сделать это возмущение как угодно малым при $t=0$ в окрестности вершины $y=0$.

Решение (2) имеет следующее физическое истолкование. Пусть ФГК является квазиплоской,

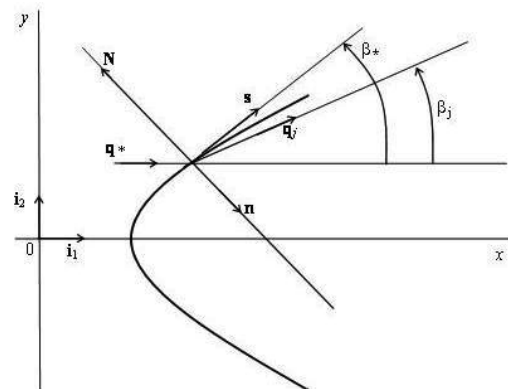


Рис. 1. Геометрические параметры линии роста дендрита

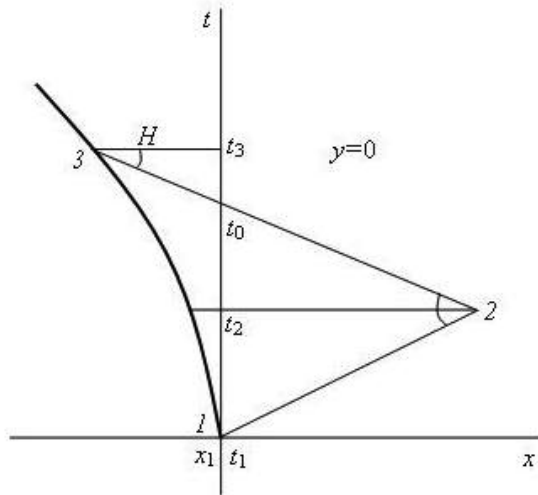


Рис. 2. Взаимодействие линии роста с догоняющими ее характеристиками

т.е. ее кривизна $K_0 = -2(1 + b_2^2)b_1^2 f_1$ есть величина 1-го порядка малости. Линия роста возмущенной ФГК имеет точку перегиба, координата которой $y = y_f(t)$ определяется соотношением $K_0 + f_{yy} = 0$, т.е.

$$f_1 b_1^2 \exp(t b_1 \sqrt{\alpha_0}) = (-K_0) / (E_f + E_f^{-1}),$$

$$E_f = E(y_f).$$

В начальный момент времени $t = 0$ точка перегиба расположена на малом расстоянии $y_f(0) > 0$ от вершины: $2b_2^2 = (E_f^0 - 1)^2 / E_f^0$, $E_f^0 = E(y_f(0)) > 1$. Априорное задание малой константы b_2^2 эквивалентно выбору начального значения $y_f(0)$. Точка перегиба движется вниз, к оси дендрита со скоростью

$$dy_f / dt = (1 + E_f^2) \sqrt{\alpha_0} / (1 - E_f^2) < 0. \quad (3)$$

Решение (2) имеет физический смысл при $y \in [0, y_f]$ в течение конечного интервала времени $t \in [0, t_1]$, где $t_1 b_1 \sqrt{\alpha_0} = \ln(1 + b_2^2)$. При $t = t_1$ точка перегиба приходит на вершину, имея неограниченно большую скорость, т.е. $dy_f / dt \rightarrow \infty$. Эта особенность решения связана с тем, что в конечном состоянии $t = t_1$ происходит стягивание «носика» дендрита. А именно,

$$f(t = t_1; y = 0) = 2f_1(1 + b_2^2) < 2f_1 = f(t = 0; y = 0) < 0.$$

Таким образом, решение (2), (3) дает пример расщепления вершины квазиплоской ФГК, содержащей точку перегиба в своем начальном ($t = 0$) состоянии. Этот случай является дополнением к другим возможным вариантам расщепления вершины дендрита, изученным в [2].

Уравнение (1) допускает существование возмущения, неоднородного по координате и обладающего аperiodической устойчивостью по времени:

$$f(y, t) = f_1 \exp(-rt) \cos ky,$$

$$t \geq 0, y \in [0, y_1], \quad (4)$$

$$k^2 = (r^3 - \alpha_2 r^2 + \alpha_1 r) / (\alpha_3 - \alpha_0 r),$$

$$\alpha_2 < r < (\alpha_3 / \alpha_0). \quad (5)$$

Параметр затухания $r > 0$ должен находиться во внутренних точках интервала устойчивости (5), причем на конечном удалении от его левой и правой границ. Именно это требование обеспечивает устойчивость решения (4). Рассмотрим координату $y = y_f$, для которой $\cos ky_f = 0$. Уравнение (1) и его решение (4) определены в малой окрестности вершины $[0, y_1]$. Если $y_f = \pi / 2k \gg y_1$ то локальное по y решение (4) имеет знакостоянную производную f_{yy} и описывает аperiodически устойчивое затухание возмущения. Если же $y_f \in (0, y_1)$, то возмущение кривизны $f_{yy} = -k^2 f$ является знакопеременным, и решение (4) говорит о том, что в начальном ($t = 0$) состоянии в окрестности вершины ФГК располагается предвестник складки. Существенно и то, что возмущение кривизны зависит от параметра k по резонансному типу: $f_{yy} \sim k^2 \cos ky$. Из формулы (5) следует, что если $\alpha_0 r$ стремится к α_3 со стороны меньших значений $[\alpha_0 r = \alpha_3 - 0]$, т.е. если $r = \alpha_2 + 0 = (\alpha_3 / \alpha_0) - 0$, то $k^2 \rightarrow \infty$, и предвестник складки находится в малой окрестности вершины дендрита: $y_f = +0$. Значит, алгебраическое соотношение $\alpha_3 = \alpha_0 \alpha_2$ дает возможность вычислить верхнюю границу K_f значений кривизны, для которых не возникает складка в окрестности вершины: $K_0 < K_f$, т.е. имеем

$$K_f = \frac{1}{U_2} \left(\frac{3cN_0}{\mu} - \frac{L}{2} - L_* \right) - \frac{L\gamma}{2U_2^2} \left(N_0 L_* - \frac{cN_0^2}{\mu} \right). \quad (6)$$

Своеобразие данного режима возмущений в том, что параметр затухания r принимает большие числовые значения, поэтому даже если предвестник складки существует, то он быстро затухает за короткое время $t_r < \gamma$. Числовые расчеты показывают, что для наблюдавшихся в экспериментах [3–5] процессов роста верхняя граница K_f не достигается: аperiodический режим (4) в этих случаях устойчивый.

Продольные колебания вершины дендрита

Уравнение (1) имеет точное решение:

$$f(y, t) = f_1 \cos ky \sin mt,$$

$$t \geq 0, y \in [0, y_1], \quad (7)$$

$$f_1 \equiv \text{const}, \quad k^2 = \alpha_1 \alpha_2 / (\alpha_3 - \alpha_0 \alpha_2), \quad (8)$$

$$m^2 = \alpha_1 \alpha_3 / (\alpha_3 - \alpha_0 \alpha_2).$$

Сначала обсудим режим роста, для которого параметры k^2 , m^2 — конечные величины, и в изучаемой малой окрестности вершины $[0, y_1)$ выполнены неравенства $0 < \cos ky < (1-0)$, т.е. $y_f = (\pi/2k) \gg y_1$. Ясно, что это относится к дендритам, кривизна которых не достигает верхней границы (6): $K_0 < K_f$; см. анализ решения (4), (5), которое тоже содержит функцию вида $\cos ky$. Возмущение кривизны равно $f_{yy} = -k^2 f$, поэтому знаки возмущений f , f_{yy} в каждый момент времени противоположны друг другу. Функции f , f_{yy} имеют одинаковую фазу колебаний во времени. Пусть, например, $f_1 < 0$. Тогда возмущение $f(y, t)$ идет из начального ($t = 0$) состояния в сторону роста: происходит вытягивание «носика» дендрита, а кривизна $f_{yy} > 0$ возрастает, достигает максимума при $mt = \pi/2$, а затем уменьшается. При $mt = \pi$ возмущения f , f_{yy} обращаются в ноль; далее знак f_{yy} становится отрицательным, начинается стадия расщепления вершины: происходит втягивание «носика». При $f_1 > 0$ процесс роста идет в обратной последовательности.

Гармоническое решение (7) является частным случаем более общего варианта, учитывающего затухание:

$$f(y, t) = f_1 \cos ky \exp(-rt) \sin mt, \quad (9)$$

$$k^2 = H_1 / H_0, \quad m^2 = H_2 / H_0,$$

$$H_0 = \alpha_3 - \alpha_0 \alpha_2 + 2\alpha_0 r,$$

$$H_1 = 9\alpha_2 r^2 + \alpha_1 \alpha_2 - r(3\alpha_1 + 9r^2 + 2\alpha_2^2),$$

$$H_2 = \alpha_1 \alpha_3 + r[r(\alpha_0 \alpha_2 + 3\alpha_3) - 2\alpha_0 r^2 - 2\alpha_2 \alpha_3].$$

При $r = 0$ решение (9) дает (7). При $r < 0$ процесс роста неустойчивый: $f \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$. Физически содержательное устойчивое во времени решение имеем при положительных значениях r , взятых из малой правой окрестности нуля, $r = +0$. Условия $k^2 > 0$, $m^2 > 0$ выполнены при $r = \pm 0$. Возмущение скорости f_t имеет сдвиг фазы колебаний $\beta_1 = (\pi/2) + \arctg \beta$, $\beta = r/m$ по отношению к фазе колебаний возмущения кривизны. Для возмущения ускорения f_{tt} аналогичный сдвиг фазы равен $\beta_2 = \arctg[2\beta/(\beta^2 - 1)]$. Возмущение кривизны f_{yy} имеет локальные экстремумы по отношению к аргументу t : $\partial(f_{yy})/\partial t = 0$, $mt = \arctg(m/r) + \pi n_0$, где $n_0 = 0, 1, 2, \dots$ — целое число. Именно в эти моменты времени равно нулю возмущение скорости. В момент времени $t = t^1$, когда появляется первый

экстремум, имеем: $n_0 = 0$, $mt^1 < (\pi/2)$ при $r = +0$; $n_0 = 1$, $mt^1 > (\pi/2)$ при $r = -0$.

Рассмотрим на вершине относительную величину возмущения кривизны, взяв

$$\bar{f}_{yy} = f_{yy}(y=0, t=t^1) / f_{yy}(y=0, mt = (\pi/2)).$$

Здесь в знаменатели дроби стоит возмущение кривизны в предшествующий/последующий момент времени по отношению к времени $t = t^1$ достижения экстремума в неустойчивом/устойчивом процессе роста. Тогда получаем

$$\bar{f}_{yy} = \pm \exp B(\beta) / (1 + \beta^2)^{1/2},$$

$$B(\beta) = \beta[(\pi/2) - \arctg(1/\beta)].$$

Значение $r = 0$, т.е. режим незатухающих колебаний (7) на вершине, является порогом, разделяющим состояния «устойчивость — неустойчивость». Зависимость \bar{f}_{yy} от β имеет экстремум именно при $r = 0$: $\partial(\bar{f}_{yy})/\partial \beta = 0$, $\beta = 0$. Этот порог естественным образом связан с относительной величиной возмущения кривизны \bar{f}_{yy} . Разложим функцию $B(\beta)$ в ряд Тейлора вблизи $\beta = 0$ и в линейном приближении оценим остаточный член ряда с учетом того, что $d^2 B/d\beta^2 = 2$ при $\beta = \pm 0$. Тогда оказывается, что для неустойчивого процесса роста ($r = -0$) относительная величина заострения вершины не достигает единицы: $|\bar{f}_{yy}| < 1$. В случае устойчивого периодического режима затухания ($r = +0$) имеем $|\bar{f}_{yy}| > 1$.

Вернемся к решению (7). Если кривизна дендрита приближается слева к верхней границе (6), $K_0 = K_f - 0$, т.е. $\alpha_0 \alpha_2 = \alpha_3 - 0$, то $k \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$. Это значит, что в малой окрестности вершины существует предвестник складки $[y_f \in (0, y_1), \cos(ky_f) = 0]$, функция $\cos ky$ становится знакопеременной. Возникновение этого предвестника сопровождается неограниченно большой частотой колебаний m по времени. Данный результат можно сформулировать в терминах теории стоячих волн. Решение (7) есть сумма двух встречных бегущих волн вида $\sin(ky \pm mt)$, поэтому вблизи вершины предвестником складки является асимптотически близкая к нулю длина волны $2\pi/k = +0$. Квадрат фазовой скорости волны равен $\chi_0^2 = \alpha_3/\alpha_2$ и убывает по мере заострения вершины дендрита, $\partial(\chi_0^2)/\partial K_0 < 0$. Простые расчеты дают качественную оценку:

$$\chi_0^2 / N_0^2 \sim [L_* / (L + L_*)] < 1.$$

Различие между аperiодическим (4) и гармоническим (7) режимами обусловлено величиной параметра k , т.е. местоположением предвестника складки. Режим роста, при котором $y_f = \pi/(2k)$

определяется значениями $k^2(r)$ из интервала (5), сопровождается аperiодической устойчивостью возмущения во времени. Гармоническому режиму колебаний соответствует параметр k , который определяется формулой (8). Здесь важно то, что при $r = \alpha_2 + 0$ функция (5) для $k^2(r)$ асимптотически приближается к значению k^2 в (8), но не совпадает с ним. Расчеты показывают, что $k^2(r = \alpha_2 + 0) > k^2(r = \alpha_2)$, т.е. для гармонического режима колебаний предвестник складки расположен дальше от вершины, чем в ангармоническом случае.

Уравнение (1) имеет приближенное решение:

$$f(y,t) = f_1 \exp(-l_1 y^2) \cos(m_1 t - l_2 y^2), \quad (10)$$

которое справедливо в окрестности вершины с точностью до членов $O(y^2)$.

Здесь

$$0 < m_1^2 < \alpha_1 \alpha_3 / (\alpha_3 - \alpha_0 \alpha_2) \equiv m^2, \quad (11)$$

$$l_1 = [m_1^2 (\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_0 \alpha_1) + \alpha_0 m_1^4] / (2l_0),$$

$$l_2 = [m_1^3 (\alpha_3 - \alpha_0 \alpha_2) - m_1 \alpha_1 \alpha_3],$$

$$l_0 = \alpha_3^2 + \alpha_0^2 m_1^2.$$

В данном классе возмущений линии роста частота колебаний m_1 не превосходит частоту m гармонического решения, а именно, интервал частот находится слева от частоты m режима стоячей волны (7). Числовое значение m_1 зависит от внешних по отношению к дендриту условий роста. Ограничение (11) есть следствие неравенства $m_1 l_2 < 0$, которое означает, что в структуре решения (10) отсутствует линия $y^2 = (-tm_1 / l_2)$, существование которой противоречило бы физической сущности задачи. Специфика решения (10) в том, что даже для асимптотического варианта $\alpha_3 = \alpha_0 \alpha_2 + 0$ параметр l_1 положителен, т.е. решение (10) — устойчивое. Значит, если частота колебаний m_1 на вершине не является слишком большой [см. оценку (11)], то процесс роста остается устойчивым и при кривизне $K_0 = K_f - 0$, асимптотически приближающейся к верхней границе (6).

Корреляция «кривизна — скорость»

Присоединим к дифференциальным уравнениям (22), (23) из [1] дополнительную связь

$$K \equiv K(A, N) = \tilde{K}(N) + AP(N), \quad (12)$$

$$A \equiv N_t$$

и рассмотрим переопределенную систему трех уравнений для двух неизвестных функций

$K(y,t)$, $N(y,t)$. Зависимость (12) между скоростью и кривизной содержит явно ускорение ФГК, и в этом смысле является нелокальной по скорости. После подстановки (12) в УФГ [см. (22) из [1]] и выделения двух групп слагаемых, содержащих A и A^2 , получаем следующие выражения:

$$2U_2 N \frac{dP}{dN} = U_2 N^2 P^2 + P(NL\gamma - U_2); \quad (13)$$

$$2U_2 N \frac{d\tilde{K}}{dN} = \frac{3c}{\mu} N + P(2U_2 N^2 \tilde{K} + N^2 L_* - \frac{U_2}{\gamma} N - \frac{c}{\mu} N^3) + \tilde{K}(NL\gamma - U_2) - L - L_*; \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} (L\gamma + 2U_2 NP) + N \left(\frac{L_*}{\gamma} + q_v \right) + \tilde{K} \left(\frac{U_2}{\gamma} N - N^2 L_* + \frac{c}{\mu} N^3 \right) - N^2 \left(U_2 \tilde{K}^2 + \frac{c}{\gamma \mu} \right) = 0. \quad (15)$$

Уравнения (13), (14), (15) вместе с уравнением $K_t = N_{yy}$ [см. (23) из [1]] образуют переопределенную систему, которая имеет элементарное решение $N = N_1 \equiv \text{const}$. При $N = N_1$ (15) дает решение стационарной формы, совпадающее с (25) из [1]: нужно только переобозначить $N_0 \leftrightarrow N_1$. Проинтегрировав (13), находим

$$P = P_{11} M^{1/2} \exp(-\gamma_1 M) / [1 - (P_{11} J_P / \gamma_1^{5/2})], \quad (16)$$

$$J_P(\zeta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta} \zeta^4 \exp(-\zeta^2) d\zeta,$$

$$M = -N, \quad M_1 = -N_1, \quad \zeta = M^{1/2} \gamma_1^{1/2},$$

$$\zeta_1 = M_1^{1/2} \gamma_1^{1/2}, \quad \gamma_1 = L\gamma / (2U_2),$$

$$P_1 = P_{11} M_1^{1/2} \exp(-\gamma_1 M_1),$$

где P_{11} — произвольная постоянная, выбор которой позволяет удовлетворить начальному условию $P_1 = P(N_1)$. Интеграл $J_P(\zeta)$ нетрудно записать через так называемый интеграл вероятности $\text{erf}(\zeta)$; эти подробности здесь не приводятся. Функция $P(N)$ характеризует нелокальные по скорости свойства кривизны ФГК; константа P_{11} является параметром нелокальности. При $P(N) \equiv 0$ решение уравнения (14) записывается в квадратурах:

$$K \equiv K(N) = \exp(-\Phi) [K_1 + J_K(\zeta)], \quad (17)$$

$$K_1 = K(N_1), \quad \Phi = \gamma_1 (M - M_1) + \ln(M / M_1)^{1/2},$$

$$J_K(\zeta) = \exp(-\gamma_1 M_1) (J_1 + J_2) / (2U_2 M_1^{1/2}),$$

$$J_1(\zeta) = -[2(L + L_*) / \gamma_1^{1/2}] \int_{\zeta_1}^{\zeta} \exp(\zeta^2) d\zeta,$$

$$J(\zeta) = -[6c / (\mu \gamma^{3/2})] \int \zeta^2 \exp(\zeta^2) d\zeta.$$

Обозначения здесь такие же, как в (16). Функция (17) представляет собой $K-N$ корреляцию, которая содержит в своей структуре так называемый интеграл вероятности мнимого аргумента $\operatorname{erfi}(\zeta)$. Согласно (17), зависимость кривизны от модуля скорости M является монотонно убывающей, т.е. $dK/dM < 0$. Для наглядности запишем это неравенство на вершине $y=0$ в виде $(dK/dt)/(dM/dt) < 0$. Следовательно, на стадии ускорения ($dM/dt > 0$) имеем $dK/dt < 0$, значит, происходит затупление вершины дендрита. На стадии торможения ($dM/dt < 0$) происходит заострение вершины, т.е. $dK/dt > 0$. Именно такие закономерности роста наблюдались экспериментально [6] для дендрита льда в переохлажденной воде. Морфологические свойства линии роста на стадиях торможения/ускорения изучены в [7].

В общем случае уравнение (14) не удается проинтегрировать в явном виде. Но здесь важно то, что формулы (13), (14) дают возможность вычислить производные dP/dN , $d\tilde{K}/dN$ в точке $N = N_1$ и, тем самым, определить соответствующие приращения функций $P(N)$, $\tilde{K}(N)$. Это обстоятельство является центральным пунктом процедуры линеаризации изучаемой переопределенной системы уравнений: $N(y, t) = N_1 + v(y, t)$, $t \geq 0$, где $v(y, t)$ — возмущение скорости ФГК в окрестности вершины дендрита. Опустив промежуточные аналитические преобразования, сформулируем результаты.

В случае $K-N$ корреляции (17) решение переопределенной системы линейных уравнений имеет вид:

$$v(y, t) = v_1 \exp(-rt) \cos ky;$$

$$r^2 L \gamma = \frac{cN_1}{\gamma \mu} + K_1 N_1 \left(\frac{cN_1}{\mu} - L \right) + K_1^2 N_1^2 L \gamma + \frac{N_{12}}{2U_2} [N_{11} + K_1(U_2 - L \gamma N_1)];$$

$$N_{11} = L + L_* - \frac{3c}{\mu} N_1;$$

$$N_{12} = \frac{U_2}{\gamma} + \frac{cN_1^2}{\mu} - L_* N_1;$$

$$2U_2 N_1 r_{11} = \frac{3c}{\mu} N_1 - L - L_* - K_1(U_2 - L \gamma N_1);$$

$$k^2 = r_{11} r, \quad r > 0.$$

Следовательно, в данном режиме роста возмущение скорости обладает аperiodической

устойчивостью во времени и при любом конечном $K_1 = K(N_1)$ отсутствует предвестник складки: $0 < k < \infty$; см. обсуждение решения (4).

Для нелокальной зависимости (12), (16) решение переопределенной системы линейных уравнений существует в рамках ограничения $N = N_1$, $d\tilde{K}/dN = 0$ и имеет вид:

$$v = v_1 \cos ky \cos mt;$$

$$m^2 = \bar{m}^2 / (L \gamma + 2U_2 N_1 P_1) > 0;$$

$$\bar{m}^2 = K_{01} \left(\frac{2cN_1^2}{\mu} - L_* N_1 \right) - K_{01}^2 U_2 N_1 - \frac{cN_1}{\gamma \mu};$$

$$N_1 P_1 \left(\frac{U_2}{\gamma} + \frac{cN_1^2}{\mu} - L_* N_1 - 2U_2 N_1 K_{01} \right) = \frac{3c}{\mu} N_1 - L - L_* - K_{01}(U_2 - L \gamma N_1);$$

$$K_{01}(2U_2 P_1 N_1^2 - U_2 + L \gamma N_1) = N_{11} + P_1 N_1 N_{12};$$

$$K_{01} = \tilde{K}(N_1); \quad k^2 = m^2 P_1.$$

Параметр нелокальности P_1 [см. выражение (16) и сопутствующие ему формулы] находится в интервале

$$\frac{N_{11}}{N_{12}} < (-N_1 P_1) < \frac{L \gamma}{2U_2(1 + \varepsilon_1)},$$

$$0 < \varepsilon_1 < 1,$$

где ε_1 — любое конечное число в правой окрестности нуля. Нетрудно видеть, что $\partial K_{01} / \partial P_1 > 0$. В данном режиме роста возмущение скорости колеблется во времени по гармоническому закону, и отсутствует предвестник складки: $0 < k < \infty$; см. обсуждение решения (7).

Заключение

В данной работе представлены физически содержательные классы возмущений линии роста. Дан пример расщепления вершины квазиплоской ФГК, имеющей точку перегиба в своем начальном состоянии. Изучены условия возникновения предвестника складки в окрестности вершины для аperiodического и гармонического во времени режимов возмущений. Установлены свойства стоячей волны возмущения линии роста. Получена формула (6) подсчета верхней границы значений кривизны, для которых складка не возникает. Указаны локальный и нелокальный по скорости варианты корреляции «кривизна — скорость ФГК». Предметом дальнейших исследований являются закономерности формирования нелинейных структур и резонансные процессы на поверхности роста кристалла в переохлажденном расплаве.

Литература

1. Шабловский О.Н. // Успехи прикладной физики. 2013. Т. 1. № 6. С. 686
2. Шабловский О.Н. // Поверхность. Рентген-, синхротр. и нейтрон. исслед. 2010. № 12. С. 81.
3. Herlach D.M. // Materials Science and Engineering. 1994. A 179/A180. P. 147.
4. Battersby S.E., Cochrane R.F., Mullis A.M. // J. Materials Science. 1999. V. 34. P. 2049.

5. Battersby S.E., Cochrane R.F., Mullis A.M. // J. Materials Science. 2000. V. 35. P. 1365.

6. Казаков А.А., Леонов А.А., Столбеников С.С., Шибков А.А. // Сб. тр. 6-й Межд. конф. «Рост монокристаллов и тепломассоперенос». Обнинск: ГНЦ РФ-ФЭИ. 2005. Т. 4. С. 908.

7. Шабловский О.Н. // Прикладная физика. 2012. № 4. С. 40.

Kinetics of dendrite tip growth in the supercooled melt Part II. The analytic structure of perturbations for growth lines

O. N. Shablovskii

Gomel State Technical University
48 October av., Gomel, 245746, Belarus

E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

Received October 20, 2013

The physical law for occurrence of instability on a two-dimensional dendrite tip at crystallization from the supercooled melt has been obtained. Investigated is the correlation for «a curvature of phase boundary — a rate of crystal growth».

PACS: 64.70 Dv.

Keywords: crystallization, heat transmission, thermal instability, curvature, phase boundary.

References

1. O. N. Shablovskii, Uspekhi Prikladnoi Fiziki **1**, 686 (2013)
2. O. N. Shablovskii, Surface. X-Ray. Synchr. Neutr. Res., No. 12, 81 (2012).
3. D. M. Herlach, Materials Science and Engineering, No. A 179/A180, 147 (1994).
4. S. E. Battersby, R. F. Cochrane, and A. M. Mullis, J. Materials Science **34**, 2049 (1999).

5. S. E. Battersby, R. F. Cochrane, A. M. Mullis, J. Materials Science **35**, 1365 (2000).

6. A. A. Kazakov, A. A. Leonov, S. S. Stolbennikov, and A. A. Shibkov, in Proc. 6-th Intern. Conf. "Growth of Monocrystals and Heat-and-Mass Transfer", Vol. 4, p. 908 (Obninsk, 2005) [in Russian].

7. O. N. Shablovskii, Prikladnaya Fizika, No. 4, 40 (2012).