

Персоналии

УДК 539.21

Б. Б. Кадомцев и теория ионно-звуковой турбулентности

В. П. Силин

Примерно полвека тому назад появились на свет две статьи: в 1963 году статья В. И. Петвиашвили, ученика Б. Б. Кадомцева, в которой был предъявлен частотный спектр турбулентных пульсаций ионно-звуковых (ИЗ) волн; а в 1964 году работа самого Б. Б. Кадомцева, которую можно назвать основополагающей для квазистационарной нелинейной теории ионно-звуковой турбулентности (ИЗТ). В последней работе в простой модели была рассмотрена зависимость от времени ИЗ-пульсаций и благодаря учету вынужденного рассеяния ИЗ-волн на ионах показана возможность существования стационарных турбулентных пульсаций ИЗ-волн, а также был подтвержден спектр Кадомцева—Петвиашвили. В течение изрядного времени этот результат, не давший сведений об угловом распределении турбулентности, противопоставлялся аналитически полученному в 1966 году в квазилинейном приближении, т. е. при учете лишь черенковского эффекта, распределения Л. И. Рудакова и Л. В. Коралева (РК). Для нас важно отметить, что найденное РК-распределение по углам было получено как нестационарное, а в стационарном пределе оказывалось сингулярным. Прошли годы. В квазистационарной теории ИЗТ начала 80-х гг. уже объединились два подхода: квазилинейная теория, основывающаяся на эффекте Вавилова—Черенкова и нелинейная теория Кадомцева—Петвиашвили, которая ввела в физику ИЗТ эффект индуцированного рассеяния ИЗ-волн на ионах. В приближении разделения переменных удалось построить теорию углового распределения турбулентных пульсаций и ряда эффектов, определяющихся ИЗТ. Возникла надежда на количественное описание ИЗТ. В то же время в её конкретной реализации модель работ Кадомцева—Петвиашвили непригодна для дейтерий-третиевой плазмы. Необходимая модификация модели ИЗТ дана в работах начала 90-х. О пути к замкнутой теории ИЗТ и самых последних результатах начала нового тысячелетия идет речь в этой статье, где мы вспоминаем о Б. Б. Кадомцеве.

PACS: 52.35.-g

Ключевые слова: Кадомцев, плазма, ионно-звуковые волны, турбулентность, нагрев, модель.

Введение

7 марта 1964 года я встретился с Б. Б. Кадомцевым на заседании Ученого совета Тбилисского государственного университета. В этот день успешно защитили свои кандидатские диссертации, с одной стороны, В. И. Петвиашвили (научный руководитель Б. Б. Кадомцев, Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова), а с другой стороны,

Р. Р. Рамазашвили (научные руководители А. А. Рухадзе и В. П. Силин, Физический институт АН СССР) [1]. Для меня объединяющим обе эти защиты было то, что они, если говорить на современном языке физической кинетики многотомного курса Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, использовали идею взаимодействия частиц через плазменные волны [2]. При этом особо их объединяло то, что речь шла о ионно-звуковых (ИЗ) волнах. Различие же было весьма существенное.

В фиановском случае речь шла о ламинарной плазме, а в курчатовском случае речь шла о плазме с ионно-звуковой турбулентностью (ИЗТ). К этому времени Б. И. Давыдов [3] построил основы кинетического описания волн и частиц плазмы. В работе [3] он оценил влияние колебаний плазмы на длины свободного пробега электронов и ионов в случае, когда колебания отвечают тепловому

Силин Виктор Павлович, главный научный сотрудник¹, профессор².

¹Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН. Россия, 119991 1119991, Москва, Ленинский проспект, 53. Тел. 8 (499) 783-34-98. E-mail: silin@sci.lebedev.ru

²Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ.

Россия, 115409, Москва, Каширское шоссе, 31

Статья поступила в редакцию 22 июля 2014 г.

© Силин В. П., 2014

равновесию, а их влияние сводится лишь к малым поправкам к результатам теории, учитывающей только столкновения заряженных частиц. В то же время в работе Б. И. Давыдова было подчеркнуто, что в обычном газовом разряде состояние плазмы далеко от равновесия. Тем самым Б. И. Давыдов призывал в своей статье к развитию кинетики неравновесной плазмы. Мы в ФИАНе взяли за описание неравновесного состояния плазмы с температурой электронов много большей температуры ионов. Для такой ламинарной плазмы с помощью интеграла столкновений Балеску—Ленарда (см. [2, 4—8]) были определены условия, в которых ионно-звуковые волны оказываются существенно кулоновских столкновений. Это позволило построить кинетическое описание целого круга явлений в неизотермической плазме, что в таком смысле дало свое завершение [8].

Однако иная судьба оказалась у проявившегося в Тбилиси турбулентного направления кинетики неизотермической плазмы, зародившегося в ИАЭ им. И. В. Курчатова и связанного с именами Б. Б. Кадомцева и В. И. Петвиашвили. Но попробую следовать по порядку. В 1963 году появилась статья В. И. Петвиашвили [9], в которой был предъявлен частотный спектр турбулентных пульсаций ИЗ-волн, т. н. спектр Кадомцева—Петвиашвили. В 1964 году была опубликована работа Б. Б. Кадомцева «Турбулентность плазмы» [10]. Именно здесь задействованы в теории ИЗТ оба базовые для её кинетики физические механизмы: 1) черенковское взаимодействие ИЗ-волн с частицами плазмы (в работе [3] вместо такой установленной терминологии используется «гидрогазодинамическая»), в том числе как механизм токовой неустойчивости, приводящей к раскату ИЗ-пульсаций; и 2) индуцированное рассеяние ИЗ-волн на ионах как механизм затухания волн и перекачки по спектру, который, как пишет Кадомцев, ведет «к ограничению амплитуды волн, и в стационарных условиях должен устанавливаться некоторый, не зависящий от времени, спектр колебаний». Второй механизм поначалу породил миф о сложности описания его следствий. Эти два механизма положены в основу написания кинетического уравнения для ИЗТ-пульсаций. При написании такого уравнения в [10] принимается упрощающая зависимость ИЗТ-пульсаций лишь от времени и от модуля волнового вектора ИЗ-волн. Для современной теории ИЗТ важно, что в такой модели в [10] продемонстрировано стационарное решение кинетического уравнения, подтверждающее спектр ИЗТ работы [9]. Отсутствие какой-либо доказанной информации об угловом распределении ИЗТ-пульсаций пенялось дол-

го, но это не было причиной сомнений в теории работ [9, 10], названной нелинейной теорией ИЗТ.

Положение усложнилось, когда появилась базирующаяся только на черенковском взаимодействии волн и частиц квазилинейная теория ИЗТ Л. И. Рудакова и Л. В. Кораблева [11]. В ней было получено угловое распределение ИЗТ-пульсаций. Однако оно оказалось таким, что в стационарном пределе приводило к расходящейся (бесконечной) энергии ИЗ-волн, хотя в нестационарном случае энергия была конечна. Важнее было то, что квазилинейная теория работы [11] и последователей приводила к узкому частотному спектру ИЗТ-пульсаций, что противоречило спектру Кадомцева—Петвиашвили и указаниям эксперимента. Квазилинейная теория все же явилась полезным орудием для понимания возможностей теории ИЗТ и многому нас научила [12, 13]. Это, в частности, привело к тому, что в начале восьмидесятых годов, когда ажиотаж вокруг исследований ИЗТ спал и мы в ФИАНе в сравнительно спокойной обстановке начали разработку этой области, то быстро вступили на путь синтеза нелинейной и квазилинейной теорий ИЗТ [14].

«DD-случай», В. Ю. Быченков и В. П. Силин (1982)

В развивавшемся нами подходе мы использовали обеспечившие нам его развитие два упрощающих теории обстоятельства. Первое обстоятельство отражено в названии подхода: квазистационарная теория ИЗТ, а в практике теории сводилось к предположению о том, что в кинетическом уравнении для турбулентных ИЗ-пульсаций самые большие слагаемые сгруппированы в правой части, содержащей нелинейный инкремент ИЗ-волн $\gamma(\vec{k})$. Поэтому в такой теории имеем первое исходное уравнение:

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{k})N(\vec{k}) &\equiv \\ &\equiv [\gamma_e(\vec{k}) + \gamma_i(\vec{k}) + \gamma_{NL}(\vec{k})]N(\vec{k}) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

отвечающее равенству нулю инкремента ионно-звуковой неустойчивости. Здесь $N(\vec{k})$ как функция волнового вектора характеризует ИЗТ-пульсацию. Соответственно, $\gamma_e(\vec{k})$ и $\gamma_i(\vec{k})$ — бесстолкновительные электронный инкремент и ионный декремент ИЗ-волн, обусловленные черенковским эффектом. Наконец, член уравнения как причина возникшего первоначально мифа о сложности подхода Кадомцева, а именно,

$$\gamma_{NL}(\bar{k}) = \frac{\pi V_{Ti}^4 k^2}{(\partial \omega_S / \partial k)} \times \frac{\partial}{\partial k} \left\{ \frac{k^2}{\partial \omega_S / \partial k} \int \frac{d\bar{k}'}{(2\pi)^3} \delta(k - k') [\bar{k} \times \bar{k}']^2 (\bar{k} \bar{k}')^2 \frac{N(\bar{k}')}{N_i \kappa_B T_i} \right\} \quad (2)$$

представляет собой нелинейный декремент затухания ИЗ-волн, обусловленный их индуцированным рассеянием на ионах. В выражении (2) использованы следующие обозначения: $\bar{k} = \bar{k} / k$, $\bar{k}' = \bar{k}' / k'$, $V_{Ti} = (\kappa_B T_i / m_i)^{1/2}$ — тепловая скорость ионов, κ_B — постоянная Больцмана, m_i — масса, T_i — температура и N_i — плотность числа ионов, а $\omega_S(k)$ — частота ионного звука.

Использование нами уравнения (1) отвечает тому, что мы поверили в надежду о существовании квазистационарного состояния ИЗТ, порожденную в работе [10] Б. Б. Кадомцевым и не пошли по пути нестационарной турбулентности, который указывали Л. И. Рудаков и Л. М. Кораблев [11].

Второе упрощающее обстоятельство связано с использованием идеи разделения переменных, когда

$$N(\bar{k}) = N(k) \Phi(\cos \theta_k), \quad (3)$$

где k — модуль волнового вектора, а θ_k — угол между волновым вектором и вектором силы, действующей на электрон. В случае (3) в приближении $\omega_S(k) = V_S k$, где $V_S = \sqrt{\kappa_B T_e N_e / N_i m_i}$ — скорость ионного звука, имеем вместо сложного интегрального соотношения (2) сравнительно простое соотношение:

$$\gamma_{NL}(k, \theta_k) = \frac{V_{Ti}^2}{4\pi N_e \kappa_B T_e} \left[k^2 \frac{d(k^4 N(k))}{dk} \right] \times \left(M_0 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta_k - \frac{3}{8} \sin^4 \theta_k \right) + M_2 \left(1 - \frac{9}{2} \sin^2 \theta_k + \frac{15}{4} \sin^4 \theta_k \right) + M_4 \left(-1 + 5 \sin^2 \theta_k - \frac{35}{8} \sin^4 \theta_k \right) \right), \quad (4)$$

где

$$M_n = \int_0^1 d\zeta \zeta^n \Phi(\zeta). \quad (5)$$

Из (4) и (5) видно, что (4) вносит в интегральное уравнение (1) лишь моменты M_n , то есть делает такое уравнение отнюдь не сложным. Миф о сложности был развеян. Что же касается вклада в

уравнение (1) черенковского эффекта $\gamma_e(\bar{k}) + \gamma_i(\bar{k})$, то к тому времени он был достаточно математически рассмотрен в квазилинейном приближении [12, 13]. Поэтому наше разделение переменных привело нас, во-первых, к уравнению в виде:

$$\frac{d}{dk} \left[\frac{k^4 N(k)}{4\pi N_e \kappa_B T_e} \right] = \frac{\gamma_S}{k^2 V_{Ti}^2}, \quad (6)$$

и к его решению

$$N(k) = \frac{4\pi N_e \kappa_B T_e}{V_{Ti}^2} \times \frac{\gamma_S(k)}{k^5} \ln \frac{1}{kr_{De}}. \quad (7)$$

Здесь $\gamma_S(k) = (\pi/8)^{1/2} (\omega_{Li} / \omega_{Le}) k V_S$. В отличие от работы [10], наша функция $N(k)$ отвечает не одномерной, а трехмерной нормировке плотности состояний. Это отличает нашу формулу (7), например, от формулы (5.103) из книги Б. Б. Кадомцева [15]. Имея это в виду, можем, сказать что формула (7), описывающая ИЗ-пульсации с длиной волны большей электронного дебаевского радиуса, представляет собой спектр Кадомцева—Петвиашвили.

Для второго возникающего при разделении переменных уравнения в нашей работе [14] была привлечена теория уравнения Абеля. Соответственно этому, в результате пренебрежения малым затуханием ИЗ-волн на ионах, имеем следующее нелинейное интегральное уравнение со слабой сингулярностью типа Абеля для угловой части $\Phi(\cos \theta_k)$ распределения турбулентных ИЗ-пульсаций:

$$\int_0^x \frac{t \Phi(t) dt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} \left(t w_0 (\sqrt{1 - x^2}) - 1 \right) = K_N x^2. \quad (8)$$

Здесь

$$K_N = 3\pi \frac{\omega_{Le}^2 r_{Di}^2 |e| E}{\omega_{Li}^2 r_{De} \kappa_B T_e} \quad (9)$$

обозначает турбулентное число Кнудсена.

$$w_0 \left(\sqrt{1 - x^2} \right) = \frac{1}{x^2} (1 + \psi(x, M_n));$$

$$\psi(x, M_n) = A_1 + A_2 x^2 + A_3 x^4 + x^3 \sqrt{1 - x^2} (A_4 - A_3 x^2) \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x};$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= (1/2)[M_0 + 2M_1 - 3M_2]; \\
 A_2 &= (1/16)[7M_0 - 78M_1 + 95M_2]; \\
 A_3 &= (1/16)[-9M_0 + 90M_1 - 105M_2]; \\
 A_4 &= [-M_0 + 12M_1 - 15M_2]; \\
 M_n &= \int_0^1 d\xi \xi^{2n} \Phi(\xi). \quad (10)
 \end{aligned}$$

В линейном приближении ($M_n = 0$) уравнение (8) и его решение имеют вид:

$$\int_0^x \frac{t\Phi(t)dt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} \left(\frac{t}{x^2} - 1 \right) = K_N x^2, \quad (11)$$

$$\Phi(x) = \frac{4K_N}{3\pi x} \frac{d}{dx} \frac{x^4}{1-x}. \quad (11)$$

Эти формулы отвечают квазилинейному приближению Кораблева—Рудакова и их сингулярному стационарному решению. Уже при малых $K_n \ll 1$ реализуется надежда, высказанная В. Л. Сизоненко и К. Н. Степановым [16], на нелинейную регуляризацию решения (11). Соответственно этому имеем следующее регуляризованное слабой нелинейностью решение [14]:

$$\Phi(x) = \frac{4K_N}{3\pi x} \frac{d}{dx} \frac{x^4}{1+\varepsilon-x}. \quad (12)$$

$$\varepsilon \approx \frac{8K_N}{3\pi} \ln \frac{1}{K_N}. \quad (13)$$

Подход нашей работы [14] для первого её понимания достаточно подробно освещен в обзоре А. А. Галеева и Р. З. Сагдеева «Токовые неустойчивости и аномальное сопротивление плазмы» [17], где можно усмотреть определенное расширение.

В противоположном пределе сильной нелинейности, когда $K_n \gg 1$, уравнение (8) принимает вид:

$$\int_0^x \frac{t^2\Phi(t)dt}{(x^2 - t^2)^{1/2}} = \frac{K_N x^4}{\Psi(x, M_N)}, \quad (14)$$

а его решение имеет вид:

$$\Phi(x) = \frac{2K_N}{\pi x} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{s^5 ds}{\Psi(s, M_n) \sqrt{x^2 - s^2}}. \quad (15)$$

Решение (15) позволяет записать систему трех уравнений для M_1, M_2, M_3 , решенную численно в

[18]. В результате имеем $M_1 = \sqrt{K_n} \cdot 2,04$, $M_2 = \sqrt{K_n} \cdot 1,10$, $M_3 = \sqrt{K_n} \cdot 0,72$. Соответственно этому в формуле (15) можно записать

$$\begin{aligned}
 \Psi(x, M_n) &= \sqrt{K_N} [0,26 - 0,19x^2 + 0,31x^4 + \\
 &+ x^2 \sqrt{1-x^2} (0,09 - 0,31x^2) \ln \left([1 + \sqrt{1-x^2}] / x \right)]. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Тем самым формулы (15) и (16) дают аналитическое описание углового распределения турбулентных пульсаций.

На рис. 1 изображена $\Phi(x) / \sqrt{K_N}$ как функция угла. Кривая 1 отвечает нашей аналитической теории. Кривая 2 получена с помощью двумерного численного расчета по методу «частиц в ячейке» [19].

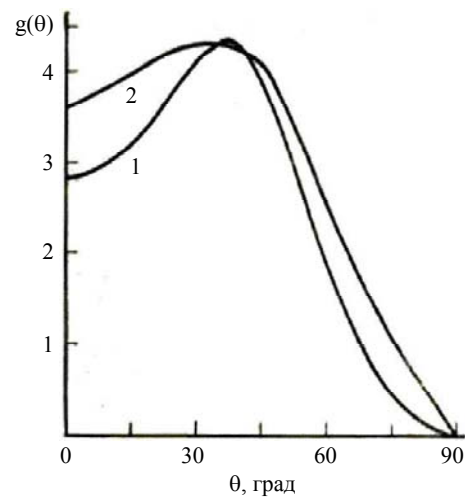


Рис. 1. По оси ординат отложено значение функции $g(\theta) = \Phi(\cos \theta) / \sqrt{K_N}$ как угла θ , отложенного по оси абсцисс.

Кривая 1 отвечает нашей аналитической теории, а кривая 2 численному результату работы Бискамп и Ходуры [19].

Возникшая претензия на «полное описание» турбулентных пульсаций позволила нам говорить не только об описании турбулентности, возникающей под действием электрического поля, но и под влиянием градиента температуры. В 1980-е годы, прежде всего, был рассмотрен, среди прочего, электронный перенос вдоль греющего плазму электрического поля [14], причем установлена обусловленная угловым распределением турбулентности анизотропия электронного переноса [20]. Была обнаружена анизотропия нагрева ионов [21], т. е. различие таких моментов как продольная и поперечная ионная температура. Последнее вывело следствия теории за рамки предположения о максвелловском распределении ионов, положенного в основу теории. Это не смутило. Теория [22, 23] не была нужна. Кое-что теплилось. Шли годы...

«DT-случай», В. П. Силин и С. А. Урюпин (1992)

Как-то, летя из дальних стран домой в самолете, я сообразил, что эксплуатируемая нами, вслед за Б. Б. Кадомцевым, модель не годится для описания D—T-плазмы (дейтерий-третиевой плазмы). Пошел новый отсчет времени в нашей работе над теорией ИЗТ. В 1992 и 1993 годах вышли наши работы [24, 25], «индуцированные DT-плазмой». Новация наших работ начала 90-х годов была связана с описанием индуцированного рассеяния ионно-звуковых волн на ионах таких плазм с ионами [24—29], у которых отношение зарядов к массам выражается неравенством:

$$\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \neq \frac{e_\beta}{m_\beta}. \quad (17)$$

Первоначально эти работы грешили тем, что в них игнорировался анизотропный нагрев ионов [24, 25], что тормозило работу. Чуть позже такая анизотропия была положена в основу модели, называемой «кулоновская» [26—29].

Ниже речь пойдет о плазме с двумя сортами ионов соизмеримой концентрации, у которых отношение зарядов к массам отвечает неравенству (17). В этом случае мы сосредоточимся на рассмотрении ИЗ-волн со спектром

$$\omega = \omega(\vec{k}) = \frac{\omega_L r_{De} k}{\sqrt{1 + k^2 r_{De}^2}} = \frac{k V_S}{\sqrt{1 + k^2 r_{De}^2}}, \quad (18)$$

где $r_{De} = \sqrt{\kappa_B T_e / 4\pi e^2 N_e}$ — электронный радиус Дебая, e — заряд электрона, N_e — число электронов в единице объема, T_e — температура электронов, κ_B — постоянная Больцмана, $\omega_L = \sqrt{\omega_{L1}^2 + \omega_{L2}^2}$, $\omega_{L\alpha} = (4\pi e_\alpha^2 N_\alpha / m_\alpha)^{1/2}$ — ленгмюровская частота ионов сорта $\alpha = 1, 2$, e_α — заряд, m_α — масса ионов сорта α , а N_α — число ионов в единице объема. Наконец, $\omega_L r_{De} = V_S$ — скорость длинноволнового ионного звука. Стремясь к описанию следствий неравенства (17), воспользуемся результатом работы [24] для нелинейного декремента затухания ИЗ-волн:

$$\begin{aligned} \gamma_{NL2}(\vec{k}) = & \int \frac{d\vec{k}'}{8\pi} N(\vec{k}') \frac{|\vec{k} - \vec{k}'|^2}{\omega_L^4} \left(\frac{\vec{k}\vec{k}'}{kk'} \right)^2 \times \\ & \times \frac{\partial \delta(\omega(\vec{k}) - \omega(\vec{k}'))}{\partial \omega(\vec{k})} \times \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \omega(\vec{k}) \omega(\vec{k}') \times \\ & \times \frac{\omega_{L1}^2 \delta \varepsilon_2^2(0, \vec{k} - \vec{k}') + \omega_{L2}^2 \delta \varepsilon_1^2(0, \vec{k} - \vec{k}')}{\left[\delta \varepsilon_1(0, \vec{k} - \vec{k}') + \delta \varepsilon_2(0, \vec{k} - \vec{k}') \right]^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Сразу нужно отметить, что математика теории спектра ИЗТ-плазмы данного раздела во многом подобна использованной в предыдущем разделе. Здесь в (19) $N(\vec{k}) = N(k, \cos \theta_k)$ — аксиально-симметричное распределение ионно-звуковых волн по волновым векторам, $k = |\vec{k}|$, θ_k — угол между волновым вектором \vec{k} и $-\vec{E}$ (или более общее [14] можно записать $-\vec{E}_{eff} = (-E + (\nabla[N_e \kappa_B T_e] / e N_e))$). Наконец, $\delta \varepsilon(0, \vec{k} - \vec{k}')$ — вклад α -го сорта ионов в статическую продольную диэлектрическую постоянную. В приближении разделения переменных имеем $N(\vec{k}) = N(k) \times \Phi(\cos \theta_k)$, где $N(k)$ — распределение ИЗТ-пульсаций по абсолютной величине волнового вектора, а $\Phi(\cos \theta_k)$ — угловое распределение.

В работе [24] для кулоновской плазмы в случае анизотропного максвелловского распределения α -го сорта ионов по скоростям с продольной температурой $T_{\alpha\parallel}$ для проекций скорости на ось, антипараллельную \vec{E} , и с поперечной температурой $T_{\alpha\perp}$ для двух других проекций скорости на оси координат приведено следующее выражение:

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_\alpha(0, \vec{k} - \vec{k}') = & \\ = & \frac{4\pi e_\alpha^2 N_\alpha}{\kappa_B \left[(k_z - k'_z)^2 T_{\alpha\parallel} + (k_x - k'_x)^2 T_{\alpha\perp} + (k_y - k'_y)^2 T_{\alpha\perp} \right]}. \end{aligned} \quad (20)$$

Ниже мы следуем весьма простому варианту приближенной самосогласованной теории спектра ИЗТ и кинетики электронных и ионных распределений. В основу такого рассмотрения для плазмы с ИЗТ, прежде всего, положено установленное в работе [24] следующее анизотропное распределение Максвелла ионов по скоростям:

$$\begin{aligned} f_\alpha(V_x, V_y, V_z, t) = & \frac{N_\alpha m_\alpha^{3/2}}{\kappa_B T_{\perp\alpha}(t) \left(8\pi^3 \kappa_B T_{\parallel\alpha}(t) \right)^{1/2}} \times \\ & \times \exp \left(-\frac{m_\alpha (V_x^2 + V_y^2)}{2\kappa_B T_{\perp\alpha}(t)} - \frac{m_\alpha V_z^2}{2\kappa_B T_{\parallel\alpha}(t)} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

При этом было показано, что поперечная температура оказывается существенно больше продольной, особенно в пределе малых турбулентных чисел Кнудсена, когда велика анизотропия углового распределения ИЗ-пульсаций. Ниже мы будем исходить из общности положения $T_{\perp\alpha} \gg T_{\parallel\alpha}$, которое получило свое подтверждение, а также о

различии темпа роста $T_{\perp\alpha}$ и $T_{\parallel\alpha}$. При этом будем пренебрегать $T_{\parallel\alpha}$ по сравнению с $T_{\perp\alpha}$ в описании влияния на турбулентность индуцированного рассеяния ионного звука на ионах. Поэтому в предлагаемом далее приближении будем использовать вместо (20) следующее выражение:

$$\delta\varepsilon_{\alpha}(0, \vec{k} - \vec{k}') = \frac{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}{\kappa_B T_{\alpha\perp} \left[(k_x - k'_x)^2 + (k_y - k'_y)^2 \right]} \equiv \frac{1}{r_{\perp\alpha}^2 \left[(k_x - k'_x)^2 + (k_y - k'_y)^2 \right]} \quad (22)$$

Это приводит к тому, что формула (19) сводится к следующему соотношению:

$$\gamma_{NL}(\vec{k}) = \int \frac{d\vec{k}'}{8\pi} N(\vec{k}') \frac{|\vec{k} - \vec{k}'|^2}{\omega_L^4} \left(\frac{\vec{k}\vec{k}'}{kk'} \right)^2 \times \frac{\partial \delta(\omega(\vec{k}) - \omega(\vec{k}'))}{\partial \omega(\vec{k})} \times \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \times \omega(\vec{k}) \times \omega(\vec{k}') \times \frac{\omega_{L1}^2 r_{\perp 1}^4 + \omega_{L2}^2 r_{\perp 2}^4}{\left[r_{\perp 1}^2 + r_{\perp 2}^2 \right]^2} \quad (23)$$

Соответственно формуле (22), все отличие предлагаемой приближенной теории описания ИЗТ от использовавшегося первоначально [24, 25] варианта теории с изотропным максвелловским распределением ионов сводится к замене

$$r_{D\alpha} = \sqrt{\frac{\kappa_B T_{\alpha}}{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}} \rightarrow r_{\perp\alpha} = \sqrt{\frac{\kappa_B T_{\alpha\perp}}{4\pi e_{\alpha}^2 N_{\alpha}}} \quad (24)$$

в том, что связано со следствиями эффекта индуцированного рассеяния ИЗ-волн на ионах. Вклад линейных электронного инкремента и ионных декрементов ИЗ-волн в уравнение (1) даются квазилинейной теорией [11—13], что достаточно подобно DD-модели, различаясь только в деталях.

Используем в дальнейшем выражение

$$A = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\omega_{Le} \left(\omega_{L1}^2 r_{D1}^4 + \omega_{L2}^2 r_{D2}^4 \right)}{\omega_L^6 r_{De}^5 \left(r_{D1}^2 + r_{D2}^2 \right)^2}.$$

В результате разделения переменных получаем два уравнения:

$$Akr_{De} \left(1 + k^2 r_{De}^2 \right)^{5/2} \times \frac{d}{d(kr_{De})} \left\{ k^4 r_{De}^4 \left(1 + k^2 r_{De}^2 \right) N(k) \right\} = -1. \quad (25)$$

Решение первого, т. е. (25), из двух получаемых уравнений дает распределение турбулентных пульсаций по абсолютной величине волнового вектора (или по частотам):

$$N(k) = \frac{y(kr_{De})}{A};$$

$$y(x) = \frac{1}{x^4(1+x^2)} \times$$

$$\times \left\{ \ln \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right) - \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{1}{3(1+x^2)^{3/2}} \right\}, \quad (26)$$

которое при $kr_{De} \ll 1$ имеет вид $N(k) \approx k^{-4} \ln(1/kr_{De})$ и отвечает скейлингу Кадомцева—Петвиашвили, а при $kr_{De} \gg 1$ быстро убывает. Используем обозначение:

$$K_{N2} = \frac{v_E}{v_N} = 6\pi^2 \frac{|e| N_e E \omega_{Le}^2}{\omega_L^8 r_{De}} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 \times \frac{\left(\omega_{L1}^2 r_{\perp 1}^4 + \omega_{L2}^2 r_{\perp 2}^4 \right)}{\left(r_{\perp 1}^2 + r_{\perp 2}^2 \right)^2} \equiv \frac{E}{E_{N2}} \quad (27)$$

называемое в теории ИЗТ турбулентным числом Кнудсена, но отличающееся от используемого (9) в модели Кадомцева—Петвиашвили предыдущего раздела. Тогда второе уравнение для углового распределения сводится к следующему нелинейному с вырожденным ядром уравнению типа Абеля для функции $\Phi(t)$

$$\frac{K_{N2} x^2}{\lambda_2} = \int_0^x \frac{dt \times \Phi(t) \times t \left[\frac{t(1+\varphi(x))}{x^2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right]}{(x^2 - t^2)^{1/2}}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (28)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} [M_0 - M_2 - (M_0 + 6M_1 - 3M_2 - 8M_3)x^2 + (6M_1 - 10M_3)x^4] + (M_0 - 3M_2)x^2(1-x^2)^{1/2} \ln \left(\frac{1+(1-x^2)^{1/2}}{x} \right). \quad (29)$$

Приведем здесь решение уравнения (28) в приближении слабо отличающихся λ_1 и λ_2 , когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0,5$. При этом в пределе $K_{N2} \ll \lambda$ имеем

$$\Phi(x) = \frac{4(K_{N2}/\lambda)}{3\pi x} \frac{d}{dx} \frac{x^4}{(1+\varepsilon-x)^{1-\alpha}}.$$

Здесь малые, обусловленные ролью индуцированного рассеяния, величины

$$\varepsilon = \frac{2K_{N2}}{3\pi\lambda \ln 2} \ln \frac{3\pi\lambda \ln 2}{2K_{N2}};$$

$$\alpha = \frac{\ln 2}{\ln [3\pi\lambda \ln 2 / 2K_{N2}]}.$$

В противоположном пределе $K_{N2} \gg \lambda$ уравнение (28), согласно (29), представляет собой простое интегральное, хотя и нелинейное, уравнение с вырожденным ядром:

$$\frac{K_{N2}x^4}{\lambda\varphi(x)} = \int_0^x \frac{dt \times \Phi(t) \times t^2}{(x^2 - t^2)^{1/2}}. \quad (30)$$

Которое, согласно теории уравнения Абеля, позволяет записать следующее соотношение:

$$\Phi(t) = \frac{2K_{N2}}{\pi\lambda x^2} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^5 dt}{\varphi(t)(x^2 - t^2)^{1/2}}, \quad (31)$$

позволяющее численно определить моменты $M_n = (K_{N2}/\lambda)^{1/2} \mathbf{M}_n$, где $\mathbf{M}_0 = 2,47$; $\mathbf{M}_1 = 1,84$; $\mathbf{M}_2 = 1,44$; $\mathbf{M}_3 = 1,17$. Тем самым, имеем

$$\Phi(t) = \frac{2(K_{N2}/\lambda)^{1/2}}{\pi x^2} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t^5 dt}{\bar{\varphi}(t)(x^2 - t^2)^{1/2}}, \quad (32)$$

где

$$\bar{\varphi}(t) = 0,51 + 0,08t^2 - 0,33t^4 - 0,92t^2(1-t^2)^{1/2} \ln\left(\frac{1+(1-t^2)^{1/2}}{t}\right). \quad (33)$$

Тем самым, мы видим, как строится аналитическое описание распределения ИЗТ-пульсаций как в зависимости от модуля, так и от угла их волнового вектора. Имея в руках $N(\vec{k}) = N(k)\Phi(\cos\theta_k)$, можно с определенной долей уверенности строить кинетическое описа-

ние макроскопических свойств турбулентной плазмы.

Турбулентный нагрев частиц плазмы

Далее мы обратимся к явлениям нагрева частиц плазмы. Используя стандартный метод Гильберта—Чепмана—Энскога для кинетического уравнения электронов с интегралом столкновений квазилинейного приближения, в котором турбулентные пульсации ИЗ-волн отвечают пределу сильного поля $K_{N2} \gg \lambda$, т. е. используя (32) и (33), получаем в теории ИЗТ для статической турбулентной электрической проводимости следующее выражение:

$$\sigma \cong 1,7(|e|N_e V_S / E) \sqrt{K_{N2}}, \quad (34)$$

отвечающее явной нелинейной зависимости от напряженности электрического поля в виде $E^{-1/2}$. В пределе сильного поля $K_{N2} \gg \lambda$ турбулентный джоулев нагрев электронов определяет рост их температуры

$$\frac{3}{2} N_e \frac{d\kappa_B T_e}{dt} = jE = 1,7|e|EN_e V_S \sqrt{K_{N2}}. \quad (35)$$

Для ионов в таком же пределе основным процессом их нагрева является индуцированное рассеяние на ионах, которое приводит к следующему уравнению роста температуры ионов:

$$\frac{3}{2} N_\alpha \frac{d(\kappa_B T_\alpha)}{dt} = 1,8 \frac{|e|N_e V_S \omega_{L\alpha}^2 r_{\perp\alpha}^4}{\omega_{L1}^2 r_{\perp 1}^4 + \omega_{L2}^2 r_{\perp 2}^4}, \quad (36)$$

$$\alpha = 1, 2.$$

Из этих двух уравнений, в частности, следует

$$\frac{dT_{\perp 1}}{dT_{\perp 2}} = \frac{m_2 e_2^2 N_2^2 T_{\perp 1}^2}{m_1 e_1^2 N_1^2 T_{\perp 2}^2} \rightarrow \frac{1}{T_{\perp 1}(t)} - \frac{1}{T_{\perp 1}(t_0)} = \frac{m_2 e_2^2 N_2^2}{m_1 e_1^2 N_1^2} \left(\frac{1}{T_{\perp 2}(t)} - \frac{1}{T_{\perp 2}(t_0)} \right) \quad (37)$$

Отсюда заключаем, что

- 1) $T_{\perp 1} = T_{\perp 2} = T_{\perp}$ только при $m_1 e_1^2 N_1^2 = m_2 e_2^2 N_2^2$,
- 2) при $m_1 e_1^2 N_1^2 \neq m_2 e_2^2 N_2^2$ имеем

$$\frac{1}{T_{\perp 2}(t \rightarrow \infty)} = \frac{1}{T_{\perp 1}(t_0)} \times \frac{m_2 e_2^2 N_2^2 - m_1 e_1^2 N_1^2}{m_2 e_2^2 N_2^2}.$$

Поэтому, если $m_1 e_1^2 N_1^2 < m_2 e_2^2 N_2^2$, то тогда $T_{\perp 2}(t)$ стремится к своему предельному значе-

нию. Иными словами, нагрев ионов сорта 2 насыщается, в то время как нагрев ионов сорта 1 может продолжаться до весьма высоких температур. Итак, есть возможность режима холодных и горячих ионов [28, 29].

Обратимся теперь к более детальным следствиям теории ИЗТ, касающимся нагрева частиц плазмы. Начнем с режима равных температур ионов, когда K_{N2} не зависит от температуры ионов, так же как не зависит и правая часть уравнений нагрева ионов. Это дает существенное упрощение описания нагрева частиц плазмы, когда с помощью обозначений $m_\alpha / m_H = A_\alpha$, $e_\alpha / |e| = Z_\alpha$, где m_α — масса протона, а также

$$\begin{aligned} \omega_{LH}^2 &= (4\pi e^2 N_e / m_H), \\ \bar{\omega}^2 &= 2\pi(N_1 + N_2) \times \\ &\times (m_1 e_1^2 N_1^2 + m_2 e_2^2 N_2^2) (m_1 N_1 + m_2 N_2)^{-1}, \end{aligned}$$

можно написать

$$\begin{aligned} \kappa_B T_e(t) &= \\ &= \left\{ [\kappa_B T_e(t_0)]^{3/4} + g_e^{3/4} \left(\frac{E^2}{4\pi N_e} \right)^{3/4} [\omega_L(t-t_0)] \right\}^{4/3}. \end{aligned} \quad (38)$$

В представляющем главный интерес случае сильного нагрева, когда $\kappa_B T_e(t) \gg \kappa_B T_e(t_0)$, отсюда имеем простую формулу сильного нагрева электронов (когда $T_e(t) \gg T_e(t_0)$)

$$\begin{aligned} \kappa_B T_e(t) &= \kappa_B T_e(t_0) + \\ &+ g_e \left(\frac{E^2}{4\pi N_e} \right) [\omega_L(t-t_0)]^{4/3}. \end{aligned} \quad (39)$$

Аналогично, для сильного нагрева ионов, когда $T_{\perp\alpha}(t) \gg T_{\perp\alpha}(t_0)$, имеем

$$\begin{aligned} \kappa_B T_{\perp\alpha}(t) &= \kappa_B T_{\perp\alpha}(t_0) + \\ &+ 0,72 \sqrt{g_e} \left(\frac{E^2}{4\pi(N_e + N_e)} \right) [\omega_L(t-t_0)]^{5/3}. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь использовано также обозначение:

$$g_e \approx \left[3,4 \frac{\omega_{Le}^2 \bar{\omega}^2 \omega_H^4}{\omega_L^8} \left(\frac{Z_1}{A_1} - \frac{Z_2}{A_2} \right)^2 \right]^{2/3}. \quad (41)$$

Сопроводим формулы для температур сильного нагрева частиц плазмы парой замечаний. Во-первых, зависимость температуры частиц при сильном турбулентном нагреве от греющей плаз-

му напряженности электрического поля по закону $\sim E^2$ отвечает зависимости, экспериментально установленной в работе [30]. Согласно нашим формулам, экспериментальную причину этого можно видеть в том, что время нагрева плазмы в [30] не менялось при изменении E . Во-вторых, сравнение двух последних формул для температур электронов и ионов показывает, что при достаточно большом времени нагрева температура ионов может стать не меньше температуры электронов.

Посмотрим на то, как учет нагрева плазмы может определять интерпретацию эксперимента. Обратимся к результатам экспериментов по измерению в более поздней работе [30], где на итоговом рис. 15 приведены результаты проводимости в группы Е. К. Завойского [30, 31] обеих работ. При этом, как в раннем эксперименте в интервале изменения напряженности поля $1 \text{ В/см} < E < 20 \text{ В/см}$, так и в позднем эксперименте в интервале сотен вольт на см, измеренная проводимость представлена как постоянная, независящая от электрического поля. В этой связи авторы работы [30] пишут: «Постоянство проводимости плазмы подтверждается также наблюдаемой экспериментально квадратичной зависимостью nT (температуры частиц) от электрического поля E ». В нашей теории, в случае сильного нагрева сильным полем, имеем $\sigma \cong 1,7(|e|N_e V_S / E) \sqrt{K_{N2}} \approx E^{-1/2}$. Для условий турбулентного нагрева ионов с равными температурами эта формула принимает вид [28]:

$$\sigma = 0,30 g_e^{3/4} [N_e \kappa_B T_e(t) / E^2]^{1/4}. \quad (42)$$

Если же в этой формуле, согласно (39), вскрыть зависимость электронной температуры от поля и времени, то получим [28]:

$$\sigma = 0,16 g_e [\omega_L(t-t_0)]^{1/3} \omega_L. \quad (43)$$

Это выражение не зависит от напряженности электрического поля и, в этом смысле, не представляет собой нелинейной проводимости, отвечает «эффекту плато». Несколько ранее [32] автор рассмотрел подобный эффект плато в пределе турбулентного нагрева плазмы в случае слабого поля и предложил ему название «Эффект Демидова—Елагина—Фанченко». Приведенные здесь формулы, а еще важнее, эксперимент позволяют видеть возможность такого турбулентного эффекта в широкой области греющих плазму полей.

Обратимся теперь к эффекту более быстрого турбулентного нагрева ионов по сравнению с нагревом электронов в случае равных температур ионов. Для этого запишем характеризующее степень неизотермичности плазмы отношение

$$\begin{aligned}
Z_T(t) &= \frac{\kappa_B T_e(t)}{\kappa_B T_{\perp\alpha}(t)}; \\
\kappa_B T_e(t) &= \kappa_B T_e(t_0) + \\
&+ g_e \left(\frac{E^2}{4\pi N_e} \right) [\omega_L(t-t_0)]^{4/3}; \\
\kappa_B T_{\perp\alpha}(t) &= \kappa_B T_{\perp\alpha}(t_0) + \\
&+ 0,72\sqrt{g_e} \left(\frac{E^2}{4\pi(N_1+N_2)} \right) [\omega_L(t-t_0)]^{5/3}.
\end{aligned} \quad (44)$$

Исходя из положения о том, что для существования ИЗ-волн необходима высокая степень неизотермичности в случае равных температур ионов, имеем $Z_T(t_0) = Z_T(t_f) \gg 1$. Также, имея в виду, что структурный фактор g_e велик по сравнению с единицей, нетрудно понять, что $Z_T(t)$ в начале нагрева растет, а затем убывает. Так что, интересуясь временем турбулентного состояния, для его определения можем записать следующее уравнение:

$$Z_T(t) = \frac{\sqrt{g_e}}{[\omega_L(t-t_0)]^{1/3}} \left(\frac{N_1+N_2}{0,72N_e} \right)$$

или

$$[\omega_L(t_f-t_0)] = \frac{g_e^{3/2}}{Z_T^3(t_0)} \left\{ \frac{N_1+N_2}{0,72N_e} \right\}^3. \quad (45)$$

Здесь $(t_f - t_0)$ означает время, в течение которого отношение температур нагреваемых электронов и ионов остается большим $Z_T(t_0)$, а поэтому в течении которого могут существовать ИЗ-волны. Это время оказывается не зависящим от напряженности электрического поля. Некоторое время мы определяли $Z_T(t_0)$ с помощью общественного мнения.

Однако позже нам помог Б. Б. Кадомцев. В Интернет-издании книги Н. Е. Завойской, Современники, удалось прочитать высказывание Бориса Борисовича о незатухающих волнах Власова, как об установившихся волнах малой амплитуды с захваченными частицами. Отсюда пошло чтение Ван Кампена [33], одной из целей статьи которого было развеять миф об ошибке Власова. Глаза раскрылись. Исходное уравнение теории ИЗТ $\gamma = 0$ было теперь прочитано как приглашение использовать незатухающие волны Власова, в теории которых классик «использовал известный интеграл в смысле главного значения Коши». Тем самым, такие волны оказались привлеченными нами в теорию ИЗТ под названием моды Власова [34].

Кратко изложим схему (шаги ABCD) доказательства того, что в стационарном состоянии ИЗТ следует пользоваться модами Власова. Это в помощь тем, кому с этим трудно согласиться. В этой схеме свойства ИЗТ определяются решениями уравнения равенства нулю эффективной комплексной диэлектрической проницаемости, т. е.

$$\varepsilon_{NL}(\omega, \vec{k}) = 0. \quad (A-46)$$

При этом речь ведется о чисто действительных решениях $\omega(\vec{k})$. Левую часть уравнения (A-46) представим в виде

$$\varepsilon_{NL}(\omega, \vec{k}) = \varepsilon'_V(\omega, \vec{k}) + i\varepsilon''_V(\omega, \vec{k}) + i\varepsilon''_{KP}(\omega, \vec{k}). \quad (B-47)$$

Все три функции действительной переменной ω правой части уравнения (B-47) чисто действительные. Последнее нелинейное мнимое слагаемое правой части отвечает эффекту индуцированного рассеяния ионно-звуковых волн на ионах, впервые введенному в теорию ИЗТ в работах Кадомцева и Петвиашвили. Явный вид этого слагаемого нами далее не используется. Следует заметить, что в (B-47) теория ИЗТ пренебрегает нелинейным действительным вкладом, как малым по сравнению с соответствующим линейным вкладом. Линейный или самосогласованный вклад в выражение (B-47) дают первые два слагаемых. Их явный вид для случая электронной плазмы проиллюстрируем подробно:

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_V(\omega, \vec{k}) + i\varepsilon''_V(\omega, \vec{k}) &= \\
= 1 - \frac{4\pi e^2}{m_e k^2} \int_{-\infty}^{\infty} dV \frac{1}{V - \omega/k} \frac{df_0(V)}{dV},
\end{aligned} \quad (48)$$

где интегрирование согласно формуле Сохоцкого ведется по контуру с половиной вычета. Соответственно этому имеем

$$\varepsilon'_V(\omega, \vec{k}) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m_e k^2} \int_{-\infty}^{\infty} dV \frac{P}{V - \omega/k} \frac{df_0(V)}{dV}, \quad (49)$$

а $\varepsilon''_V(\omega, \vec{k})$ — чисто действительно и определяется половиной вычета в точке черенковского полюса $V = (\omega/k)$. Из уравнения (A-46) после подстановки в него (B-47) следуют два уравнения:

$$\varepsilon'_V(\omega, \vec{k}) = 0, \quad (C-50)$$

$$\varepsilon''_V(\omega, \vec{k}) + \varepsilon''_{KP}(\omega, \vec{k}) = 0. \quad (D-51)$$

Последнее уравнение (D) содержит нелинейное слагаемое, возникающее по Кадомцеву и Петвиаш-

швили [9, 10] благодаря индуцированному рассеянию ионно-звуковых волн на ионах. Само же уравнение (D-51), отвечающее уравнению (1), определяет главные свойства ИЗТ. Однако для нашего рассмотрения зависимости частоты от волнового вектора главным является уравнение (C-50), которое, что и требовалось доказать, имеет вид (49). В многосортной плазме полностью ионизованной плазме, в отличие от уравнения (49), возникает несколько слагаемых в правой части дисперсионного уравнения мод Власова, содержащих интеграл в смысле главного значения Коши. В то же время следует помнить об уравнении (C-50), которое учитывает и направленное движение электронов, т. е. причину ИЗТ.

Для модели ИЗТ плазмы с двумя сортами ионов дисперсионное уравнение, определяющее зависимость скорости ионного звука как моды Власова [34] от отношения температур электронов и ионов, имеет вид:

$$1 = \frac{r_{De}^2}{r_{D1}^2} [\bar{J}(\beta_1) - 1] + \frac{r_{De}^2}{r_{D2}^2} [\bar{J}(\beta_2) - 1], \quad (52)$$

где

$$\bar{J}(z) = \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{P}{z-x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (53)$$

Здесь P обозначает главное значение Коши, β_i — отношение скорости звука к тепловой скорости ионов сорта i .

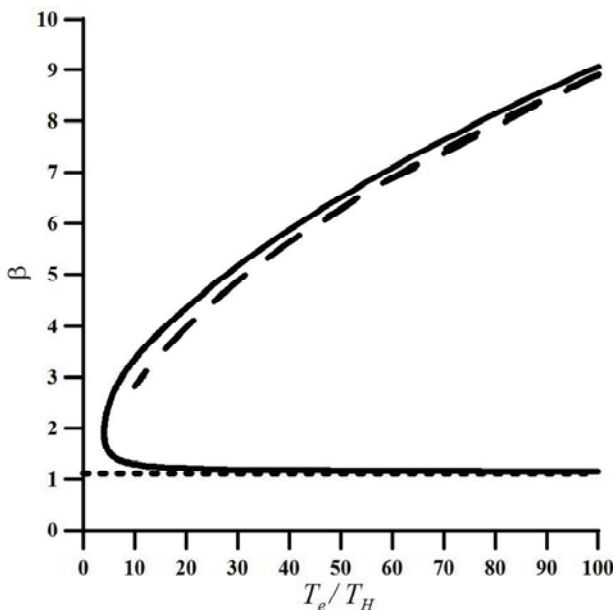


Рис. 2. По оси ординат отложено отношение скорости ионного звука к тепловой скорости ионов, а по оси абсцисс отложено отношение температуры электронов к постоянной температуре ионов

На приведенном рис. 2 для случая одинакового нагрева ионов HD-плазмы $(T_e / T_i)_{\min} = 3,98$, чему отвечает $\beta_H = 1,90$.

Тогда для времени существования турбулентности получаем выражение:

$$[\omega_L(t_f - t_0)] \approx g_e^{3/2} \left\{ \frac{N_1 + N_2}{0,72 N_e Z_T(t_0)} \right\}^3 \sim 15.$$

Итак, в случае одинакового нагрева ионов HD-плазмы мы получили небольшое время жизни турбулентной плазмы. Поэтому теперь переходим к представляющемуся нам сегодня более перспективным случаю HD-плазмы с одинаковыми концентрациями разных ионов.

Изложим результат нашей одной недавно опубликованной статьи [35], в которой рассмотрен режим турбулентного нагрева плазмы с горячими и холодными ионами. В этой статье обсуждается турбулентный нагрев частиц плазмы в режиме сильного нагрева горячих и слабого нагрева холодных ионов HD-плазмы, когда еще не возникает ограничения времени жизни турбулентного состояния, подобного имеющему место в случае нагрева ионов с равными температурами. Показано, что за обнаруживаемое время существования ИЗТ $\tau_f = \omega_L(t_f - t_0) \cong 360$ температуры электронов и ионов водорода могут возрасти в тысячи раз. Напомним, что выше мы показали, что в работах [28, 29] в условиях нагрева благодаря индуцированному рассеянию ионно-звуковых волн на ионах была обнаружена возможность режима неодинакового нагрева ионов с установлением сорта горячих и сорта холодных ионов. Далее, следуя сообщению [35], на примере водородно-дейтериевой (HD) плазмы с равными концентрациями $N_H = N_D = (1/2)N_e$ разных сортов ионов количественно обсуждаются перспективы такого режима. Согласно работе [26], в теории ИЗТ для характеристики условий нагрева частиц плазмы используется турбулентное число Кнудсена (27), которое в рассматриваемом ниже примере HD-плазмы имеет следующий вид:

$$K_{N2}(t) = 964 \sqrt{\frac{E^2}{N_e \kappa_B T_e(t)}} \times \frac{\kappa_B^2 T_H^2(t) + (1/2) \kappa_B^2 T_D^2(t)}{(\kappa_B T_H(t) + \kappa_B T_D(t))^2} \equiv \frac{E}{E_{N2}(t)}. \quad (54)$$

Здесь E и N_e — постоянная напряженность греющего плазму электрического поля и число электронов в единице объема, соответственно, $T_\alpha(t)$ —

меняющиеся во времени температуры частиц ($\alpha = e, H, D$) плазмы, $E_{NL}(t)$ — характерное для ИЗТ значение нелинейного электрического поля. Следуя огрубленной теории ИЗТ [26], мы пренебрегаем различием между температурой ионов и их поперечной температурой. Режиму сильного поля, к которому относится излагаемое ниже, отвечает $E \gg E_{N2}(t)$.

В оценках примем, $K_{N2}(0) = 100 > K_{N2}(t) > K_{N2}(t_f) = 5$, где t_f — даваемое такой оценкой время окончания нагрева сильным полем. Для простоты примем $T_H(0) = T_D(0)$. Тогда из (54) имеем $K_{N2}(0) \cong 360 \sqrt{E^2 / N_e \kappa_B T_e(0)}$. В конце нагрева, считая его сильным для ионов водорода $T_H(t_f) \gg T_H(0)$ и слабым для ионов дейтерия $T_D(t_f) \approx T_H(0)$, что оправдывается ниже, согласно (54), имеем $K_{N2}(t_f) \cong 964 \sqrt{E^2 / N_e \kappa_B T_e(t_f)}$. Это позволяет нам записать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \kappa_B T_e(t_f) &\cong 37200 \left(E^2 / N_e \right) \approx \\ &\approx 7,17 \left[K_{N2}(0) / K_{N2}(t_f) \right]^2 \kappa_B T_e(0) \approx \\ &\approx 2800 \kappa_B T_e(0), \end{aligned} \quad (56)$$

указывающее на то, что при убывании в оценочном интервале K_{N2} в 20 раз допустимая оценкой такого изменения температура электронов возрастает почти в 3000 раз.

Рассмотрим теперь возможности, определяющиеся в теории ИЗТ уравнениями нагрева частиц, когда в рассматриваемом случае уравнение турбулентного джоулевого нагрева электронов может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d(\kappa_B T_e)^{3/4}}{d\tau} &= \\ = 7,43 \left(\frac{E^2}{N_e} \right)^{3/4} \frac{\sqrt{(\kappa_B T_H)^2 + 0,5(\kappa_B T_D)^2}}{\kappa_B T_H + \kappa_B T_D}, \end{aligned} \quad (57)$$

или

$$\frac{d(\kappa_B T_e)^{3/4}}{d\tau} = 7,43 \left(\frac{E^2}{N_e} \right)^{3/4}$$

при $T_H \gg T_D$. Здесь $\tau = \omega_L t$. Далее для нагрева ионов в условиях сильного поля, согласно (36) и [28], имеем

$$\frac{d(\kappa_B T_\alpha)}{dt} = \frac{1,2 |e| E N_e V_S \omega_{L\alpha}^2 r_{D\alpha}^4}{N_\alpha (\omega_{L1}^2 r_{D1}^4 + \omega_{L2}^2 r_{D2}^4)}. \quad (58)$$

Из уравнений (58) и начального условия $T_D(0) = T_H(0)$ следует, что $T_D(t) = 2T_H(t)T_H(0) / [T_H(t) + T_H(0)]$. Видно, что при сильном нагреве ионов водорода температура ионов дейтерия возрастает лишь в два раза, то есть сравнительно слабо. Наконец, из (58) для сильно греющихся ионов водорода имеем уравнение:

$$\frac{d(\kappa_B T_H)}{d\tau} = \frac{0,68 (E^2 / N_e)^{1/2} (\kappa_B T_e)^{1/2}}{1 + (T_D^2 / T_H^2)} \quad (59)$$

или

$$\frac{d(\kappa_B T_H)}{d\tau} = 0,68 \left(\frac{E^2}{N_e} \right)^{1/2} (\kappa_B T_e)^{1/2}$$

при $\Theta_H \gg \Theta_D$.

Решение уравнений (57) и (59) в приближении сильного нагрева $T_H \gg T_D$ имеют вид

$$\kappa_B T_e(\tau) \cong \kappa_B T_e(0) + 14,5 \left(E^2 / N_e \right) \tau^{4/3}, \quad (60)$$

$$\kappa_B T_H(\tau) \cong \kappa_B T_H(0) + 1,55 \left(E^2 / N_e \right) \tau^{5/3}. \quad (61)$$

С помощью формул (56) и (60) определяем время нагрева частиц при изменении K_{N2} в принятом нами интервале оценки, для которого получаем $\tau_f \cong 360$. За это время температура ионов достигает величины $\kappa_B T_H(360) \approx 28250 \left(E^2 / N_e \right)$, достигая $2175 \kappa_B T_e(0) \sim 8700 \kappa_B T_H(0)$, (где учтено решение уравнения (62) в начальный момент времени, см. ниже) и все еще не превышая температуры нагреваемых электронов. Подчеркнем, что полученная оценка τ_f значительно больше возникающей для режима нагрева HD-плазмы с ионами с одинаковыми температурами [35].

Нам остается убедиться в существовании решений дисперсионного уравнения мод Власова, для принятых параметров нагрева частиц рассматриваемой HD-плазмы, имеющего вид:

$$\frac{1}{A(\tau)} = \frac{1}{2} [\bar{J}(\beta_H(\tau)) - 1] + \frac{1}{2} \frac{T_H(\tau)}{T_D(\tau)} [\bar{J}(\beta_D(\tau)) - 1]. \quad (62)$$

Здесь

$$\bar{J}(\beta) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{P}{\beta - x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

где P означает главное значение Коши, и

$$\begin{aligned} A(\tau) &= T_e(\tau) / T_H(\tau); \\ \beta_H(\tau) &= V_S(\tau) [m_H / \kappa_B T_H(\tau)]^{1/2}, \\ \beta_D(\tau) &= V_S(\tau) [2m_H / \kappa_B T_D(\tau)]^{1/2} \end{aligned}$$

В начальный момент времени, когда температуры ионов одинаковы, решение уравнения (62) при максимальном значении левой части отвечает $\beta_H(0) = 1,84$ и $A(0) \cong 4,02$. То есть в формуле (60) можем принять $T_e(0) \cong 4T_H(0)$. Наконец, к моменту $\tau_f \cong 360$, когда в плазме имеются горячие и холодные ионы, уравнение (62) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{T_H(360)}{T_e(360)} &= \frac{1}{1,32} = \\ &= \frac{1}{2} [\bar{J}(\beta_H(360)) - 1] + \frac{1}{4\beta_H^2(360)} \end{aligned} \quad (63)$$

и для $\tau_f \cong 360$, когда $A(360) = 1,32$, оно имеет решение уравнения $\beta(360) \cong 0,464$. Тем самым, мы убедились в существовании решения дисперсионного уравнения мод Власова как отвечающего состоянию полностью ионизованной плазмы с холодными ионами дейтерия, горячими электронами и горячими ионами водорода.

Таким образом, в случае режима турбулентного нагрева горячих и холодных ионов в сильном электрическом поле на примере HD-плазмы с равной концентрацией ионов нами показано, что температура электронов может возрасти почти в три тысячи раз, а температура ионов может увеличиваться почти в девять тысяч раз. В сравнении с режимом сильного нагрева HD-плазмы с равными температурами ионов [33], возникающий выигрыш работы [35] в нагреве частиц плазмы связан с обнаружением в ней обусловленной наличием холодных ионов возможности более длительного существования ИЗТ в плазме, чем это оказывалось в до сих пор обсуждавшемся режиме турбулентного нагрева плазмы с ионами одинаковой температуры.

Рассмотренный пример является типичным для теории ИЗТ, а его рассмотрение открывает путь к отысканию наиболее эффективного способа турбулентного нагрева частиц плазмы. Для очевидности этого подчеркнем, что в нашем рассмотрении ограничение времени нагрева частиц в рассмотренном режиме определяется не нарушением жесткого критерия времени существования ИЗТ, как это происходит, например, в случае ионов с равными температурами, а сравнительно мягким кри-

терием сильного греющего плазму электрического поля. Имеющиеся при этом возможности уже видны на примере использования оценочных значений турбулентного числа Кнудсена $K_{N2}(t_f)$.

Заключение

Изложенное выше позволяет сказать, что теория ИЗТ, построение которой было начато в работах Б. Б. Кадомцева и В. И. Петвиашвили, имеет еще все основания привлекать к себе наше внимание. Приходится только жалеть о легко прерванном в СССР экспериментальном исследовании ИЗТ, что, как теперь ясно, предсказывало нам еще более суровое будущее, хотя теория менее связана денежными путями.

Под конец, несколько личное. Работа над развитием представлений теории ИЗТ, как это следует из изложенного выше, в целом ряде случаев находила опору в научном наследии Б.Б. Кадомцева. Более того, такая опора оказалась для меня очень важной в последние полтора года при привлечении в теорию ИЗТ мод Власова. В это время мне удалось сформулировать свою точку зрения на болезненный для отечественной физики плазмы вопрос, который может быть назван как «Миф об ошибке А. А. Власова» [36].

Это прибавило смелости для введения в обиход теории ИЗТ мод Власова. В том числе и поэтому, под влиянием терминологии русской сказочной мифологии, творческое наследие Б. Б. Кадомцева для меня представилось способствующим возвращению из небытия «живой водой».

Литература

1. *Рамазашвили Р. Р.* Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Тбилисский Госуниверситет, Тбилиси, 1963.
2. *Лифишиц Е. М., Пятаевский Л. П.* Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979.
3. *Давыдов Б. И.* // Сборник "Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций". Изд. АН СССР, 1958, Т. 1. С. 77.
4. *Силин В. П.* // Ядерный синтез. 1962. Т. 2. С. 125.
5. *Силин В. П., Горбунов Л. М.* // ДАН СССР. 1962. Т. 145. № 6. С. 1265.
6. *Рамазашвили Р. Р., Рухадзе А. А., Силин В. П.* // ЖЭТФ. 1963. Т. 43. С. 1323.
7. *Ramazashvili R. R.* On the relaxation of temperatures of the charged particles in magnetoactive plasma, June, 1963. Special Service Documents, Boeing Laboratories, Seattle, Washington.
8. *Силин В. П.* Введение в кинетическую теорию газов. — М., Наука, 1971.
9. *Петвиашвили В. И.* // ДАН СССР. 1963. Т. 153. С. 1295.
10. *Кадомцев Б. Б.* Турбулентность плазмы. Сб. Вопросы теории плазмы. Вып. 4. Атомиздат, М., 1964. С. 188—339.
11. *Рудаков Л. И., Кораблев Л. В.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 220.
12. *Коврижных Л. М.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 1795.
13. *Коврижных Л. М.* // ЖЭТФ. 1967. Т. 52. С. 1406.

14. Быченко В. Ю., Силин В. П. // ЖЭТФ. 1982. Т. 82. С. 1886.
15. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988.
16. Сизоненко В. Л., Степанов К. Н. // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 1197.
17. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. Токовые неустойчивости и аномальное сопротивление плазмы. Основы физики плазмы в двух томах. Дополнение к второму тому. — М., Энергоиздат, 1984.
18. Быченко В. Ю., Градов О. М., Силин В. П. // Физика плазмы. 1984. Т. 10. № 1. С. 33.
19. Biskamp D., Chodura R. // Phys. Rev. Lett. 1971. V. 21. P. 1553.
20. Быченко В. Ю., Силин В. П. // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. № 6(12). С. 2073.
21. Быченко В. Ю., Силин В. П., Урюпин С. А. // Физика плазмы. 1989. Т. 15. № 3. С. 300.
22. Vyuchenkov V. Yu., Gradov O. M., Silin V. P. // Physics Letters. 1984. V. 101A. P. 258.
23. Vyuchenkov V. Yu., Silin V. P., Uryupin S. A. // PHYSICS REPORTS. 1988. V. 164. No. 3. P. 119.
24. Силин В. П., Урюпин С. А. // ЖЭТФ. 1992. Т. 100. № 1. С. 78.
25. Силин В. П., Урюпин С. А. // Физика плазмы. 1993. Т. 19. № 7. С. 894.
26. Силин В. П. // Физика плазмы. 2011. Т. 37. № 5. С. 498.
27. Силин В. П. // Физика плазмы. 2011. Т. 37. № 8. С. 739.
28. Силин В. П. // Физика Плазмы. 2012. Т. 38. № 9. С. 826.
29. Silin V. P. // Ukr. J. Phys. 2012. V. 57. P. 322.
30. Демидов Б. А., Завойский Е. К., Калинин Ю. Г. и др. Прогресс в исследовании турбулентного нагрева плазмы. В книге: Е. К. Завойский, Избранные труды. Электронный парамагнитный резонанс и физика плазмы. — М.: Наука, 1990. С. 298—314.
31. Демидов Б. А., Елагин Н. И., Фанченко С. Д. // ДАН СССР. 1967. Т. 174. № 2. С. 327.
32. Силин В. П. // Физика плазмы. 2011. Т. 37. № 3. С. 300.
33. Van Kampen N. G. // Physica. 1955. V. 21. P. 949.
34. Попов В. Ю., Силин В. П. // Физика плазмы. 2014. Т. 40. № 4. С. 368.
35. Попов В. Ю., Силин В. П. // Краткие сообщения по физике. 2014. № 3. С. 28.
36. Силин В. П. // Краткие сообщения по физике. 2014. № 4. С. 25.

B. B. Kadomtsev and a theory of the ion-acoustic turbulence

V. P. Silin

P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences
53 Leninskij Prospekt, Moscow, 119991, Russia
E-mail: silin@sci.lebedev.ru

Received July 22, 2014

Half a century ago there were published two papers. The first paper was published in 1963. It was the paper of V. I. Petviashvili who was the student of B. B. Kadomtsev. This first paper presented the frequency spectrum of the turbulent pulsation of the ion acoustic (IA) waves. Then in 1964 was published the Kadomtsev paper, which can be called as a basic paper for our quasistationary nonlinear theory of the ion-acoustic turbulence (IAT). In this paper on the base of the simple model it was examined the time dependence of IAT pulsation. Because of influence of the stimulated scattering of IA waves by ions it was found the possibility of the existence of the stationary turbulent pulsation state (not growing and not diminishing in time) of the IA waves. Also it was corroborated B. B. Kadomtsev—V. I. Petviashvili (KP) spectrum. This result did not describe any angular turbulence distribution. It was the reason to oppose this KP result to the one analytically obtained in 1966 by Rudakov and Korablev (RK) in quasilinear approximation, based on Vavilov—Cerenkov effect. RK approach permitted to obtain the angular distribution of the turbulent pulsation, but the predicted frequencies distribution in RK case was far away from experiment. It is important to note that the RK angular distribution was obtained as nonstationary one and in stationary limit this angular distribution was singular. The years slipped away. The Russian passions for the IAT had calmed. Some people are absent and others are in distant lands. Our quasistationary theory of IAT of the eighties years united two theoretical approaches: the quasilinear theory of Rudakov—Korablev and nonlinear theory of Kadomtsev—Petviashvili. Our approximation of the separation of variables permitted us to describe the turbulence distribution completely. We gave the theory of a number effects that are the result of IAT. We obtained a hope of the quantitative description of IAT. On the other side KP model is not suitable for deuterium-tritium plasma. The necessary IAT model was given in the early ninetieth. Up to day results and problems of IAT theory are the subject of our lecture, which is dedicated to the memory of B. B. Kadomtsev.

PACS: 52.35.-g

Keywords: Kadomtsev, plasma, ion-acoustic waves, turbulence, heating, model.

References

1. R. R. Ramazashvili, Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics (Tbilisi, 1963).
2. E. M. Lifshits and L. P. Pitaevsky, *Physical Kinetics* (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
3. B. I. Davydov, in *Collected Articles on Plasma Physics* (Izdat. AN USSR, 1958), Vol. 1. P. 77 [in Russian].
4. V. P. Silin, *Yaderny Sintez* **2**, 125 (1962).
5. V. P. Silin and L. M. Gorbunov, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **145**, 1265 (1962).
6. R. R. Ramazashvili, A. A. Rukhadze, and V. P. Silin, *J. Exp. Theor. Phys.* **43**, 1323 (1963).
7. R. R. Ramazashvili, *On the relaxation of temperatures of the charged particles in magnetoactive plasma*, (June, 1963. Special Service Documents, Boeing Laboratories, Seattle, Washington).
8. V. P. Silin, *Introduction to the Kinetic Theory of Gases* (LIBRIKOM, URSS, 2013) [in Russian].
9. V. I. Petviashvili, *Dokl. Akad. Nauk* **153**, 1295 (1963).
10. B. B. Kadomtsev, in *Coll. Articles on Theory of Plasma* (Atomizdat, Moscow, 1964, No. 4) pp.188-339.
11. L. I. Rudakov and L. V. Korablev, *J. Exp. Theor. Phys.* **50**, 220 (1966).
12. L. M. Kovrizhnykh, *J. Exp. Theor. Phys.* **50**, 1795 (1966).
13. L. M. Kovrizhnykh, *J. Exp. Theor. Phys.* **52**, 1406 (1967).
14. V. Yu. Bychenkov and V. P. Silin, *J. Exp. Theor. Phys.* **82**, 1886 (1982).
15. B. B. Kadomtsev, *Collective Phenomena in Plasma* (Nauka, Moscow, 1988) [in Russian].
16. V. L. Sizonenko and K. N. Stepanov, *J. Exp. Theor. Phys.* **49**, 1197 (1965).
17. A. A. Galeev and R. Z. Sagdeev, *Fundamentals of Plasma Physics* (Energoizdat, Moscow, 1984) [in Russian].
18. V. Yu. Bychenkov, O. M. Gradov, and V. P. Silin, *Plasma Physics Reports* **10**, 33 (1984).
19. D. Biskamp and R. Chodura, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 1553 (1971).
20. V. Yu. Bychenkov and V. P. Silin, *J. Exp. Theor. Phys.* **83**, 2073 (1982).
21. V. Yu. Bychenkov, V. P. Silin, and S. A. Uryupin, *Plasma Physica Reports* **15**, 300 (1989).
22. V. Yu. Bychenkov, O. M. Gradov, and V. P. Silin, *Physics Letters* **101A**, 258 (1984).
23. V. Yu. Bychenkov, V. P. Silin, and S. A. Uryupin, *PHYSICS REPORTS* **164**, 119 (1988).
24. V. P. Silin and S. A. Uryupin, *J. Exp. Theor. Phys.* **100**, 78 (1992).
25. V. P. Silin and S. A. Uryupin, *Plasma Physics Reports* **19**, 894 (1993).
26. V. P. Silin, *Plasma Physics Reports* **37**, 498 (2011).
27. V. P. Silin, *Plasma Physics Reports* **37**, 739 (2011).
28. V. P. Silin, *Plasma Physics Reports* **38**, 826 (2012).
29. V. P. Silin, *Ukr. J. Phys.* **57**, 322 (2012).
30. B. A. Demidov, E. K. Zavoisky, Yu. G. Kalinin, et al., in *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research: Proc. IV Intern.Conf.* (Madison, 1971: Vienna, IAEA, 1971), Vol. 2. P. 3—24
31. B. A. Demidov, N. I. Elagin, and S. D. Fanchenko, *Dokl. Akad. Nauk* **174**, 327 (1967).
32. V. P. Silin, *Plasma Physics Reports* **37**, 300 (2011).
33. N. G. Van Kampen, *Physica*, **21**, 949 (1955).
34. V. Yu. Popov and V. P. Silin, *Plasma Physics Reports* **40**, 368 (2014).
35. V. Yu. Popov and V. P. Silin, *Bull. Lebedev Phys. Inst.*, No. 3, 28 (2014).
36. V. P. Silin, *Bull. Lebedev Phys. Inst.*, No. 4, 25 (2014).