УДК 533.9

Обобщение решения уравнения Шафранова для нестационарного случая

Н. Д. Наумов

Предлагается метод обобщения решения уравнения Шафранова для описания неустановившегося движения плазмы со скоростью, пропорциональной расстоянию до центра симметрии.

PACS: 52.65.Kj

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, неустановившееся движение, тороидальная конфигурация, вращение плазмы.

Введение

Построение точных решений нелинейной системы уравнений магнитной гидродинамики представляет несомненный интерес. Для стационарного состояния аксиально-симметричной конфигурации плазмы задача сводится к решению одного уравнения [1]:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -16\pi^3 r^2\frac{dp}{d\psi} - \frac{8\pi^2}{c^2}\frac{dJ^2}{d\psi}, \quad (1)$$

где ψ — магнитный поток через круг радиуса r, перпендикулярный оси z. Для заданного давления $p(\psi)$ и полного тока через указанный выше круг $J(\psi)$ решение уравнения (1) определяет распределение магнитного поля в плазме:

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad B_\varphi = \frac{2J}{cr}, \qquad B_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \quad (2)$$

Точные нестационарные решения уравнений магнитной гидродинамики известны в случае одномерных неустановившихся движений плазмы, относящихся к классу движений сплошной среды, для которых скорости пропорциональны расстоянию до центра симметрии, (см. [2, 3] и указанную там литературу). Целью данной работы является разработка метода, позволяющего обобщить решение уравнения (1) для описания неустановившегося двумерного движения плазмы.

Метод обобщения решения

Для рассматриваемого класса движений компоненты скорости плазмы имеют вид:

$$V_r = r\frac{\dot g}{g}, \; V_\varphi = \Omega r, \; V_z = z\frac{\dot h}{h}, \quad (3)$$

где g, Ω, h — некоторые функции времени; точкой обозначается дифференцирование по времени. Эти движения называются также неустановившимися движениями с однородной деформацией, поэтому выражения для характеристик движущейся плазмы можно получить следующим образом. Пусть известно решение уравнения (1) для некоторой плазменной конфигурации. Выделяя в этой конфигурации характерные продольный и поперечный размеры L, R, представим функцию ψ следующим образом: $\psi(r, z) = f(\xi, \chi)$, где $\xi = r/R$, $\chi = z/L$. Из уравнения (1) для функции f найдем:

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial f}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\chi^2} =$$

$$= -16\pi^3\xi^2R^2\frac{dp}{df} - \frac{8\pi^2}{c^2}\frac{dJ^2}{df}. \quad (4)$$

Как нетрудно проверить, в этом случае скорость (3) и функция

$$\rho = \frac{1}{hg^2}\sigma(\eta, \zeta), \quad (5)$$

где $\eta = \xi/g$, $\zeta = \chi/h$, удовлетворяют уравнению непрерывности. Будем считать, что $g(0) = h(0) = 1$; тогда функция $\sigma(\xi, \chi)$ описывает начальное распределение плотности плазмы.

Очевидно, что аналогичное (2) магнитное поле

$$B_r = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial u}{\partial z}, \quad B_\varphi = \frac{2J(u)}{hcr}, \quad B_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial u}{\partial r}, \quad (6)$$

где $u = f(\eta, \zeta)$, удовлетворяет условию: $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что для скорости (3) и магнитного поля (6) выполняется условие вмороженности силовых линий магнитного поля:

$$\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\left[\mathbf{VB}\right]. \quad (7)$$

Наумов Николай Дмитриевич, вед. научный сотрудник/
ФГКУ “12 ЦНИИ Минобороны России”.
Россия, 141307, Московская обл., г. Сергиев Посад-7.
E-mail: ndnaumov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 6 октября 2014 г.

Будем считать, что давление движущейся плазмы имеет вид:

$$P = \mu p(u), \tag{8}$$

где μ — некоторая функция времени. Для конкретизации функции g, Ω, h, μ нужно подставить выражения (3), (5), (6), (8) в уравнение Эйлера, что приводит к следующему результату:

$$r\frac{\ddot{g}}{g} - \Omega^2 r = -\frac{S}{gR}\frac{\partial u}{\partial \eta}, \tag{9}$$

$$\dot{\Omega} + 2\frac{\dot{g}}{g} = 0, \tag{10}$$

$$z\frac{\ddot{h}}{h} = -\frac{S}{hL}\frac{\partial u}{\partial \zeta}, \tag{11}$$

где введено обозначение:

$$S = \frac{1}{16\pi^3\rho r^2}\left[\frac{1}{g^2R^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{h^2L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \right.$$
$$\left. + 16\pi^3\mu(\eta g R)^2\frac{dp}{du} + \frac{8\pi^2}{h^2c^2}\frac{dJ^2}{du}\right]. \tag{12}$$

Как следует из уравнения (3) и выражения (12), правая часть уравнений (9), (11) обращается в нуль, если $g = h$, $\mu = 1/h^4$. Первое из этих условий может быть выполнено только при отсутствии вращения плазмы. В итоге получим, что выражения (3), (5), (6), (8) являются точным решением уравнений магнитной гидродинамики, если

$$g = h = 1 + vt,\ \Omega = 0,\ \mu = \frac{1}{h^4}, \tag{13}$$

где постоянная v определяется начальным значением скорости плазмы.

Конфигурация с азимутальной плотностью тока

Как видно из выражения (12), вопрос о построении решения для неустановившегося двумерного движения плазмы с $g \neq h$ можно рассматривать только при $J = 0$, т. е. для конфигурации с азимутальным распределением плотности тока. Если в такой конфигурации неподвижной плазмы плотность тока пропорциональна радиальной координате:

$$j_\varphi = -\frac{c}{8\pi^2 r}\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \chi^2}\right] = -k_0 r,$$

то для неустановившегося движения плазмы

$$j_\varphi = -\frac{c}{8\pi^2 r}\left[\frac{1}{g^2R^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{h^2L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}\right] = -kr,$$

где $k = k(g, h)$ — функция времени.

При $J = 0$ уравнения (9), (11) можно записать следующим образом:

$$r\frac{\ddot{g}}{g} - \Omega^2 r = -\frac{1}{\rho g R}\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\mu\frac{dp}{du} - \frac{j_\varphi}{2\pi c r}\right), \tag{14}$$

$$z\frac{\ddot{h}}{h} = -\frac{1}{\rho h L}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\left(\mu\frac{dp}{du} - \frac{j_\varphi}{2\pi c r}\right). \tag{15}$$

При $J = 0$ из уравнения (3) следует, что в случае $j_\varphi = -k_0 r$ давление плазмы пропорционально магнитному потоку, т. е. $dp/df = -\kappa$, где κ – постоянная величина, поэтому при $j_\varphi = -kr$ правая часть уравнений (14), (15) будет равна нулю, если $\mu = k/2\pi\kappa c$.

Решение получающихся из (14), (15) обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет конкретизировать фигурирующие в выражениях (3), (5), (6), (8) функции времени:

$$g^2 = (1 + wt)^2 + \omega^2 t^2,$$
$$\Omega = \frac{\omega}{g^2},$$
$$h = 1 + vt,\ \mu = \frac{1}{2\pi\kappa c}k(g, h), \tag{16}$$

где постоянные v, w, ω определяются начальным значением скорости плазмы.

Таким образом, в случае $J = 0$ и постоянного значения производной $dp/d\psi$ решение уравнения (1) можно обобщить для описания неустановившегося движения плазмы с разными коэффициентами пропорциональности у составляющих скорости в продольном и поперечном направлении.

Влияние внешнего поля

Исходя из решения уравнения (1), описывающего плазменную конфигурацию с азимутальным распределением плотности тока, можно получить стационарное решение уравнений магнитной гидродинамики для той же конфигурации в однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z$. Действительно, как нетрудно проверить, для $\mathbf{V} = \Omega_0\mathbf{e}_\varphi$, где Ω_0 — постоянная величина, условие вмороженности силовых линий магнитного поля $\mathrm{rot}[\mathbf{V}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B})] = 0$ эквивалентно условию $\mathrm{div}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}) = 0$.

Далее, радиальное условие равновесия плазменной конфигурации с азимутальным распределением плотности тока в магнитном поле $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z$ имеет следующий вид:

$$-\rho\Omega_0^2 r = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{c} j_\varphi (B_0 + B_z).$$

Отсюда следует, что если выполняется радиальное условие равновесия при отсутствии внешнего поля:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{c} j_\varphi B_z = 0,$$

то стационарное состояние плазменной конфигурации сохранится и при ее вращении во внешнем поле, если плотность плазмы равна $\rho = -j_\varphi B_0 / cr\Omega_0^2$. При $j_\varphi = -k_0 r$ распределение плотности плазмы будет однородным:

$$\rho = \rho_0 = \frac{k_0 B_0}{c\Omega_0^2}.$$

Рассмотрим теперь неустановившееся движение такой конфигурации в однородном магнитном поле. Для постоянного внешнего поля магнитный поток через круг радиуса r, перпендикулярный оси z, равен $\psi_0 = \pi B_0 r^2$, т. е. $f_0 = \pi B_0 R^2 \xi^2$, $u_0 = \pi B_0 R^2 \eta^2$. Как следует из выражения (7), в случае движения плазмы со скоростью (3) для выполнения условия вмороженности силовых линий магнитного поля внешнее поле должно быть нестационарным:

$$\mathbf{B}_{\text{ext}} = \frac{B_0}{g^2}\mathbf{e}_z. \tag{17}$$

Для неустановившегося движения плазмы в поле (17) азимутальная и продольная составляющие уравнения Эйлера сохраняют тот же вид (10), (15), а изменится только радиальная составляющая:

$$r\frac{\ddot{g}}{g} - \Omega^2 r = \frac{j_\varphi B_0}{\rho c g^2} - \frac{1}{\rho g R}\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\mu\frac{dp}{du} - \frac{j_\phi}{2\pi c r}\right).$$

Это уравнение существенно упрощается, если $j_\varphi = -kr$, $\rho = \rho_0/hg^2$, $\mu = k/2\pi\kappa c$, $dp/du = -\kappa$:

$$\ddot{g} = \frac{\omega^2}{g^3} - gh\Omega_0^2\frac{k}{k_0}. \tag{18}$$

Таким образом, по сравнению с предыдущим разделом внешнее поле (17) приводит к более сложной зависимости от времени функции g в выражении (16). Кроме этого, распределение плотности плазмы должно быть однородным.

Тороидальная конфигурация

Проиллюстрируем предлагаемый метод на примере решения уравнения (1) в виде тороидальной конфигурации плазмы [4]:

$$\psi = \frac{1}{2}A\left[z^2\left(r^2 + \beta R^2\right) + \frac{\alpha - 1}{4}\left(r^2 - R^2\right)^2\right],$$

где R — радиус магнитной оси, A, α, β — постоянные, определяющие связь давления плазмы и полного тока с магнитным потоком:

$$16\pi^3\frac{dp}{d\psi} = -\alpha A, \quad \frac{8\pi^2}{c^2}\frac{dJ^2}{d\psi} = -\beta A R^2.$$

В данном случае функция f имеет вид:

$$f = C\left[\chi^2\left(\beta + \xi^2\right) + \frac{R^2}{4a^2}\left(\xi^2 - 1\right)^2\right]. \tag{19}$$

где введены обозначения: $C = AL^2R^2/2$, $a^2 = L^2/(\alpha - 1)$. Если за границу плазмы принять магнитную поверхность $\psi = C$, то вблизи магнитной оси

$$\psi \approx C\left(\frac{(r-R)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right),$$

где $b^2 = L^2/(\beta + 1)$, т. е. сечение тонкого тороидального шнура представляет собой эллипс с полуосями a и b.

Исходя из выражения (19), для функции u найдем:

$$u = C\left[\zeta^2\left(\beta + \eta^2\right) + \frac{R^2}{4a^2}\left(\eta^2 - 1\right)^2\right].$$

Эта функция вместе с выражениями (3), (5), (6), (8), (13) полностью определяет характеристики движущейся плазмы.

При $\beta = 0$ будет конфигурация с азимутальным распределением плотности тока. Для этой конфигурации

$$u = C\left[\zeta^2\eta^2 + \frac{R^2}{4a^2}\left(\eta^2 - 1\right)^2\right], \tag{20}$$

$$k_0 = \frac{\alpha c A}{8\pi^2}, \quad k = \frac{k_0}{\alpha g^2}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha - 1}{g^2}\right).$$

Учитывая, что $\kappa = \alpha A/16\pi^3$, для функции μ найдем:

$$\mu = \frac{1}{\alpha g^2}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha - 1}{g^2}\right). \tag{21}$$

Функция (20) вместе с выражениями (3), (5), (6), (8), (16), (21) полностью определяет характеристики движущейся плазмы.

Для неустановившегося движения конфигурации (20) во внешнем поле (17) уравнение (18) принимает следующий вид:

$$\ddot{g} = \frac{\omega^2}{g^3} - \frac{h\Omega_0^2}{\alpha g}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{\alpha - 1}{g^2}\right). \tag{22}$$

Линеаризуя уравнение (22) при $h = 1$, для малых колебаний характеристик плазмы вблизи ее стационарного состояния найдем:

$$g = 1 + \frac{w}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{\omega^2 - \Omega_0^2}{\omega_0^2}(1 - \cos\omega_0 t),$$

$$\Omega = \frac{\omega}{g^2}, \quad h = 1, \quad \mu = \frac{1}{\alpha g^2}\left(1 + \frac{\alpha - 1}{g^2}\right),$$

где постоянные w, ω определяются начальной скоростью плазмы, $\omega_0^2 = 3\omega^2 + (2/\alpha - 3)\,\Omega_0^2$.

Заключение

Полученные результаты показывают, что на основе любого решения уравнения (1) можно построить точное решение уравнений магнитной гидродинамики, описывающее неустановившееся движение плазмы, азимутальная скорость которого равна нулю, а радиальная и аксиальная составляющие скорости имеют одинаковый коэффициент пропорциональности расстоянию до центра симметрии.

Если у конфигурации с азимутальным распределением плотности тока давление плазмы линейно зависит от магнитного потока, то можно получить решение для неустановившегося движения этой конфигурации с разными коэффициентами пропорциональности у составляющих скорости в продольном и поперечном направлении, в том числе с учетом вращения плазмы. Предлагаемый метод позволяет также получить решение уравнений магнитной гидродинамики для неустановившегося движения такой конфигурации во внешнем магнитном поле в случае однородного распределения плотности плазмы.

Точные нестационарные решения уравнений магнитной гидродинамики могут быть использованы для тестирования программ численного моделирования движения плазмы.

Литература

1. *Шафранов В. Д.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. № 3(9). С. 710.

2. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1981.

3. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1962.

4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.

Non-stationary generalization of Shafranov's equation solution

N. D. Naumov

12-th Central Research Institute
Sergiev Posad-7, Moscow region, 141300, Russia
E-mail: ndnaumov@mail.ru

Received October 6, 2014

A technique oh Shafranov's equation solution generalization for the description of non-steady plasma motion is developed.

PACS: 52.65.Kj

Keywords: magnetohydrodynamics, non-steady motion, toroidal configuration, plasma rotation.

References

1. V. D. Shafranov, J. Exp. Theor. Phys. **33,** 710 (1957).

2. L. I. Sedov, *Methods of Similarity and Dimensionality in Mechanics* (Nauka, Moscow, 1981) [in Russian].

3. A. G. Kulikovsky and G. A. Lyubimov, *Magnetohydrodynamics* (Fizmatgiz, Moscow, 1962) [in Russian].

4. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Electrodynamics of Continua* (Nauka, Moscow, 1982) [in Russian].