

УДК 621.382.53

Анизотропный термоэлектрический охладитель на основе поперечного эффекта Пельтье

В. Г. Охрем

На основе двумерной температурной модели анизотропного термоэлектрического холодильника, работающего на основе поперечного эффекта Пельтье, создана теория, с помощью которой при наличии соответствующей компьютерной программы, можно оптимизировать максимальное снижение температуры. В работе приведена иллюстрация схемы этих расчетов.

PACS: 85.80.F

Ключевые слова: анизотропия термоэдс, поперечный эффект Пельтье, анизотропный термоэлектрический холодильник, перепад температуры.

Введение

Анизотропные термоэлементы (АТ) успешно применяются в качестве датчиков температуры и тепловых потоков [1, 2]. Материалом для АТ служит монокристалл CdSb. Исследования работы АТ в качестве холодильника не проводились, что объясняется, с одной стороны, отсутствием приемлемой теории термоэлектрического охлаждения, а с другой, — отсутствием эффективных анизотропных термоэлектриков. Вместе с тем, АТ работающий в качестве холодильника, отличался бы очевидными преимуществами перед стандартным холодильником Пельтье: он имел бы только одну ветвь и, в связи с этим, меньше коммутационных элементов, а технология его изготовления была бы значительно проще. Поэтому необходимы поисковые работы, которые привели бы к созданию анизотропного термоэлектрического холодильника (АТХ).

В настоящей работе сделан первый шаг в указанном направлении: предложена двумерная теоретическая модель АТХ и выполнен расчёт его двумерного температурного поля и глубины охлаждения.

Распределение температуры в АТХ

Элементарная теория работы АТХ приведена в работе Хармана и Хонига [3]. В этой теории предполагается, что температура является одномерной, а

кинетические коэффициенты постоянны. Одномерность температуры обосновывается следующим образом: считается, что образец АТХ достаточно длинен так, что условия на его торцах не влияют на процессы, происходящие в средней части. Исходя из этого предположения, и были найдены основные характеристики АТХ.

Предложенная модель является весьма приближенной и поэтому результаты расчетов, полученные на ее основе, нельзя считать убедительными. В связи с этим, как представляется автору настоящей публикации, температурная модель АТХ должна быть, по крайней мере, двумерной. В настоящей работе предложена такая модель. Суть ее состоит в следующем. Считается, что температура двумерна. Кинетические коэффициенты не зависят от температуры. Кроме того, полагается, что анизотропной является только термоэдс, а удельные сопротивление и теплопроводность — изотропны. Эти допущения в значительной мере упрощают математические выкладки, а полученные результаты, как представляется, в достаточной мере будут отражать реальное положение. Это связано с тем, что механизм охлаждения обуславливается в основном анизотропией термоэдс α_{12} , а теплопроводность χ и удельное сопротивление ρ на него не влияют.

Распределение температуры в АТХ представим уравнением:

$$\frac{d^2 T(x, y)}{dx^2} + \frac{d^2 T(x, y)}{dy^2} + b = 0, \quad (1)$$

где T — температура, $b = \rho \cdot j^2 / \chi$, а j — плотность электрического тока, который считается постоянным, направлен вдоль оси x (рис. 1).

Охрем Василий Георгиевич, доцент.
Национальный технический университет «ХПИ»,
Черновицкий факультет.
Украина, 58018, г. Черновцы, ул. Головна, 203-а.
E-mail: okhrem@ukr.net

Статья поступила в редакцию 15 января 2015 г.

© Охрем В. Г., 2015

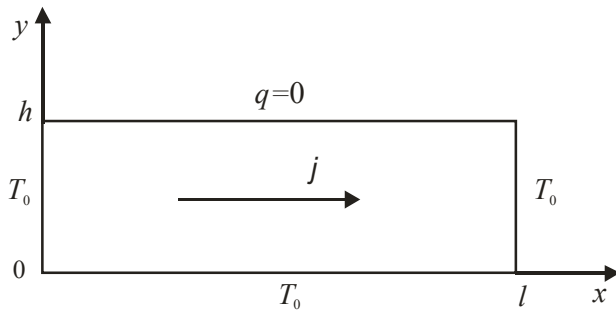


Рис. 1. Принципиальная схема АТХ

Сделаем замену $T(x, y) = f(y) + \Theta(x, y)$. Выберем функцию $f(y)$ так, чтобы она удовлетворяла уравнению $\frac{d^2 f(y)}{dy^2} + b = 0$ и условиям

$$f(0) = T_0, \quad -\chi \cdot \left. \frac{df(y)}{dy} \right|_{y=h} + \alpha_{12} \cdot j \cdot f(y)|_{y=h} = 0,$$

где T_0 — температура термостата. Эту функцию легко найти. Она имеет следующий вид:

$$f(y) = -\frac{1}{2} \cdot b \cdot y^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot b \cdot h - a \cdot b \cdot h^2 + 2 \cdot a \cdot T_0}{-1 + a \cdot h} \cdot y + T_0,$$

где $a = \frac{\alpha_{12} \cdot j}{\chi}$.

Задача далее сводится к нахождению решения уравнения

$$\frac{\partial^2 \Theta(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta(x, y)}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

с граничными условиями

$$\Theta(x, 0) = 0,$$

$$\Theta(0, y) = \Theta(l, y) = T_0 - f(y), \tag{3}$$

$$-\left. \frac{\partial \Theta(x, y)}{\partial y} \right|_{y=h} + a \cdot \Theta(x, y)|_{y=h} = 0. \tag{4}$$

Последнее выражение вытекает из условия адиабатической изоляции верхней грани.

Решение представим в виде ряда Фурье:

$$\Theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cdot \sin \frac{\xi_n}{h} y, \tag{5}$$

где ξ_n числа, которые определим ниже. Подставив (5) в (2), найдем уравнения, которым должны удовлетворять функции $\varphi_n(x)$:

$$\varphi_n''(x) - \left(\frac{\xi_n}{h} \right)^2 \cdot \varphi_n(x) = 0.$$

Откуда получаем

$$\varphi_n(x) = A_n \cdot e^{\frac{\xi_n}{h} x} + B_n \cdot e^{-\frac{\xi_n}{h} x}. \tag{6}$$

И далее, подставив (6) в (5), найдем общее решение уравнения (2):

$$\Theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot e^{\frac{\xi_n}{h} x} + B_n \cdot e^{-\frac{\xi_n}{h} x} \right) \cdot \sin \frac{\xi_n}{h} y. \tag{7}$$

Постоянные A_n, B_n и ξ_n определим из граничных условий (3) и (4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \cdot \sin \frac{\xi_n}{h} y = T_0 - f(y), \tag{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot e^{\frac{\xi_n l}{h}} + B_n \cdot e^{-\frac{\xi_n l}{h}} \right) \cdot \sin \frac{\xi_n}{h} y = T_0 - f(y), \tag{9}$$

Граничное условие (4) с учетом выражения (7) даёт

$$\delta \cdot \xi_n = \text{tg} \xi_n, \tag{10}$$

где $\delta = \frac{1}{a \cdot h}$. Из (10) находятся числа ξ_n . В [4] показано, что условие (10) является условием ортогональности функций $\sin \frac{\xi_n}{h} y$, т. е. функций, по которым можно вести разложение в ряд Фурье на отрезке $0-h$.

Чтобы найти коэффициенты A_n и B_n , нужно разложить $T_0 - f(y)$ в ряд Фурье по синусам. Подставив в это выражение вместо $f(y)$ ее значение, получим

$$T_0 - f(y) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot y^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot b \cdot h - a \cdot b \cdot h^2 + 2 \cdot a \cdot T_0}{-1 + a \cdot h} \cdot y.$$

Это разложение имеет вид:

$$T_0 - f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin \frac{\xi_n}{h} y, \text{ где } C_n \text{ — коэффициенты разложения, которые определяются по формуле:}$$

$$C_n = \frac{\xi_n}{h \cdot \cos \xi_n \sin \xi_n - h \cdot \xi_n} \times \int_0^h \left(b \cdot y^2 + \frac{2 \cdot b \cdot h - a \cdot b \cdot h^2 + 2 \cdot a \cdot T_0}{-1 + a \cdot h} \cdot y \right) \times \sin \left(\frac{\xi_n}{h} \cdot y \right) dy.$$

Простые вычисления приводят к выражению:

$$C_n = -\frac{h}{\xi_n^2 (\cos \xi_n \sin \xi_n - \xi_n)} \cdot (-1 + ah) \times \\ \times (2bh - 2abh^2 + 2abh^2 \cos \xi_n - 2a\xi_n T_0 \sin \xi_n + (11) \\ + 3bh\xi_n^2 \cos \xi_n + 3abh^2 \xi_n \sin \xi_n - 2bh \cos \xi_n - \\ - 4bh\xi_n \sin \xi_n + 2a\xi_n^2 T_0 \cos \xi_n - 2abh^2 \xi_n^2 \cos \xi_n).$$

Имея в виду выражение (11), запишем уравнения (8) и (9) в виде

$$A_n + B_n = C_n, \quad A_n \cdot e^{\frac{\xi_n l}{h}} + B_n \cdot e^{-\frac{\xi_n l}{h}} = C_n.$$

Из этих двух уравнений находим

$$A_n = C_n \frac{1 - e^{-\frac{\xi_n l}{h}}}{2sh \frac{\xi_n l}{h}}, \quad B_n = -C_n \frac{1 - e^{\frac{\xi_n l}{h}}}{2sh \frac{\xi_n l}{h}}.$$

Таким образом, распределение температуры для принятых граничных условий и материала АТХ является двумерным. Выполним далее *иллюстративные* числовые оценки глубины охлаждения АТХ (слово *иллюстративные* означает, что речь идет об иллюстрации порядка проведения числовых расчетов). Для этого рассчитаем распределение температуры на верхней грани и найдем точку наиболее низкой температуры на этой грани.

Для числовых расчетов положим: $T_0 = 300$ К, $h = 1,5$ см, $l = 2,5$ см, $\alpha_{12} = 50$ мкВ/К, $\chi = 0,08$ Вт/см·К, $\rho = 10^{-4}$ Ом·см, $j = -95$ А/см².

Анизотропия термоэдс α_{12} , теплопроводность χ и удельное сопротивление ρ соответствуют примерно кинетическим коэффициентам висмута. Далее из уравнения (10) находим параметры ξ_n . Это уравнение для заданных n ($n = 1, 2, 3$ и т. д. — номер тангенсоиды, с которой пересекается прямая $\delta \cdot \xi_n$) решено графически с помощью пакета математических программ *MAPLE*. Для указанных параметров $\delta = -16,842$. В наших расчетах мы ограничились пятью корнями уравнения (10). Для них найдено: $\xi_1 = 1,60752$, $\xi_2 = 4,72495$, $\xi_3 = 7,8615$, $\xi_4 = 11,00097$, $\xi_5 = 14,14136$. Подсчитав C_n по формуле (11) и приняв во внимание, что $b = \rho \cdot j^2 / \chi = 11,28$ К/см², $a = \alpha_{12} \cdot j / \chi = -0,59$ см⁻¹, с помощью того же пакета *MAPLE* находим распределение температуры вдоль верхней грани (рис. 2).

Как и следовало ожидать, наиболее холодная точка находится в средней части образца. (**Заметим еще раз, что полученные результаты числовых расчетов могут служить лишь иллюст-**

рацией схемы расчетов и выяснения роли размерных и материальных констант).

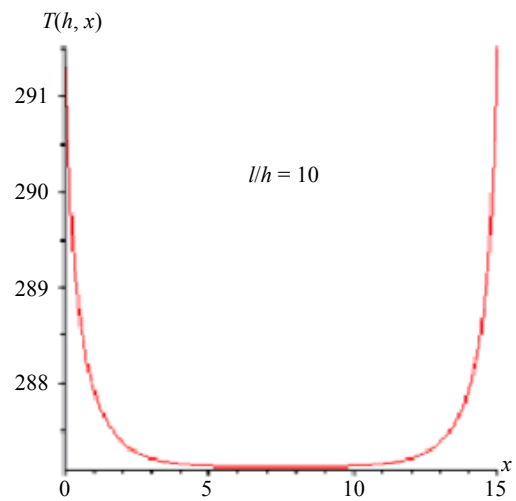
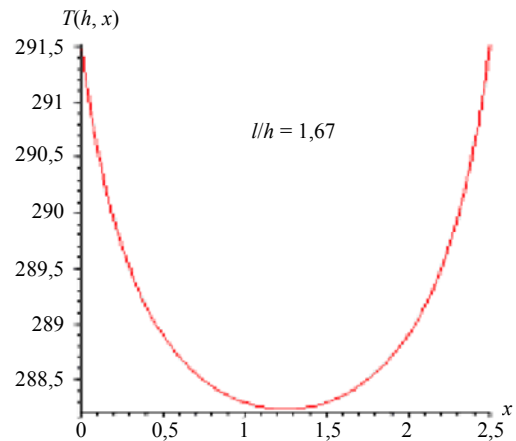


Рис. 2. Распределение температуры $T(h, x)$ при $l/h = 1,67$ и $l/h = 10$

Здесь нужно отметить одно обстоятельство. На концах АТХ ($x = 0$ и $x = l$) в расчетах получается $291,5$ К, а должно быть 300 К. Это объясняется тем, что расчеты приближенные: взято только пять членов разложения в ряд Фурье. Действительно распределение температуры в АТХ

$$T(x, y) = f(y) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \frac{sh \frac{\xi_n}{h} \cdot x + sh \frac{\xi_n}{h} \cdot (l - x)}{sh \frac{\xi_n}{h} \cdot l} \times \\ \times \sin \frac{\xi_n}{h} y, \quad (12)$$

где

$$f(y) = T_0 - \frac{1}{2} \cdot b \cdot y^2 - \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot b \cdot h - a \cdot b \cdot h^2 + 2 \cdot a \cdot T_0}{-1 + a \cdot h} \cdot y.$$

При $x = 0$ и $x = l$ сумма в (12) при $y = h$ представится выражением $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin \xi_n$, что вместе с $f(h)$ в точности составит $T_0 = 300$ К. Другими словами, для вычисления указанных сумм пяти членов разложения недостаточно. Что же касается других точек, то для них сходимость рядов Фурье в указанном приближении приемлема.

Обсудим еще одно обстоятельство. При построении теории, основанной на одномерной температурной модели АТ, в [1—3] утверждается, что эта модель будет приемлемой при условии, что образец достаточно длинный, т. е. что l велико по сравнению с высотой образца h . Здесь представляется возможным проверить это утверждение. Несложные числовые прикидки показывают, что это утверждение справедливо при соотношении длины и высоты равно, как минимум, десяти. В нашем случае получается длина 15 см.

Пусть читателя не смущают такие не реалистичные размеры АТХ. Эти размеры взяты наугад. На самом деле, конечно, эти размеры нужно оптимизировать. Но для этого нужно создать математическую программу, с помощью которой можно было бы эту работу проделать. Это замечание касается также и плотности тока.

Тут следует отметить еще одну особенность. Распределение температуры в средней части АТХ можно считать одномерным (при указанном соотношении длины и высоты). Однако если потребуются исследовать, например, холодопроизводительность или холодильный коэффициент, то может быть допущена ошибка, поскольку тепло, поступающее на верхнюю грань, распределяется

по всей грани, а распределение температуры одномерно только в средней части. Представляется, что в этом случае пользование одномерной температурной моделью может привести к ошибкам.

Заключение

Предложена двумерная температурная модель АТХ, которая по сравнению с одномерной является более реалистичной, и поэтому результаты, полученные с её помощью могут быть использованы для поиска нужных для АТХ свойств анизотропных термоэлектриков, с точки зрения материальных и размерных констант, а также величины плотности тока. Представляется, что анизотропный термоэлектрик должен обладать большой анизотропией термоэдс и иметь оптимальные размеры, которые выбираются из условия максимального снижения температуры.

Максимальное снижение температуры сложным образом зависит от размеров образца.

Нахождение оптимальных размеров и величины тока возможно только с помощью специально разработанной компьютерной программы расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анатычук Л. А. Термоэлементы и термоэлектрические устройства. Справочник. — Киев. Наукова думка, 1979.
2. Снарский А. А., Пальти А. М., Ащеулов А. А. // ФТП. 1997. Т. 31. № 11. С. 1287.
3. Harman T. C., Honig J. M. Thermoelectric and thermomagnetic effects and applications. — New-York: Mc Graw-Hill Book Company, 1967.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. — Москва. Физматгиз, 1963.

Anisotropic thermoelectric cooler based on the transverse Peltier effect

V. G. Okhrem

National Technical University «KhPI», Chernovtsy Branch.
203-a Golovnya str. Chernovtsy. 58018, Ukraine
E-mail: okhrem@ukr.net

Received January 15, 2015

A thermoelectric cooler operating on the transverse Peltier effect has been studied on the basis of the two-dimensional model of anisotropic temperature. Established are a theory and a suitable computer program which can optimize the maximum reduction temperature. The work is an illustration of the scheme for these calculations.

PACS: 85.80.F

Keywords: anisotropy of the thermoelectric power, transverse Peltier effect, anisotropic thermoelectric refrigerator temperature difference.

REFERENCES

1. L. A. Anatyshuk, *Thermoelements and Thermoelectric Devices. Handbook* (Naukova Dumka, Kiev, 1979) [in Russian].
2. A. A. Snarskii, A. M. Pal'ti, and A. A. Ashcheulov, *Semiconductors* **31**, 1287 (1997).
3. T. C. Harman and J. M. Honig, *Thermoelectric and Thermomagnetic Effects and Applications*. (New-York: Mc Graw-Hill Book Company, 1967).
4. G. M. Fikhtengolts, *Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 3* (Fizmatgiz, Moscow, 1963) [in Russian].

* * *