

УДК 539.186.2

К вопросу о расчете сечений тормозного излучения электронов, проходящих через упорядоченную структуру кулоновых центров, в процессе ускорения внешним однородным электрическим полем

В. И. Крылов, В. В. Хомяков

В первом борновском приближении найдены и проанализированы сечения тормозного излучения электронов, проходящих через упорядоченную структуру кулоновых центров и ускоряемых однородным электрическим полем в широком интервале его значений. Определены условия применимости сечений, полученных аналитически ранее в литературе. Показано, что ранее полученные сечения, соответствующие частоте фотона 10^2 , совпадают с результатами настоящей работы при напряжении поля более 10^4 (атомных единиц).

PACS: 79.20.Rf

Ключевые слова: тормозное излучение, дифференциальное сечение, внешнее поле, упорядоченные слои кулоновых центров, суперпозиция движений, пространственная осцилляция.

Введение

В работах [1—8] проводился расчет сечений тормозного излучения заряженных частиц, проходящих через упорядоченную структуру кулоновых центров, с целью определения влияния на такое излучение суперпозиции движений излучающих частиц в поле рассеивающих центров и в однородном электрическом поле \mathbf{E} , а также интерференции этих частиц при их отражении от потенциального барьера внешнего поля [3—5]. Такое исследование из-за громоздкости полученных аналитически сечений, проводилось численно. Наиболее подробно изучалась зависимость сечений от переменных θ_ϕ и ϕ_ϕ — сферических координат волнового вектора \mathbf{k}_ϕ излученного фотона при фиксированных значений остальных параметров. В настоящей работе исследовались те же зависимости, но в более широком интервале значений внешнего поля, когда оно ускоряет эмитированные источником частицы, также как и в [1, 2, 7, 8]. Исследовал предельный переход в сечениях при $E \rightarrow 0$.

Проведенный анализ показал, что в полученных в [1, 2, 7, 8] сечениях из-за их приближенного аналитического расчета нельзя просто устремить напряженность E внешнего электрического поля к нулю (это было отмечено еще в [7, 8]). Действительно, в работах [1, 2] во входящих в сечения комбинациях вида (используем атомные единицы) $L(2E)^{1/3} + 2\varepsilon_z(2E)^{-2/3}$ (L — размер области локализации внешнего поля, ε_z — энергия движения излучающих частиц вдоль внешнего поля), пренебрегалось слагаемым, содержащим ε_z (из-за макроскопичности L). Очевидно, что в этом случае условия применимости полученных сечений нарушаются при $E \leq \varepsilon_z / L$. Кроме того, при определении сечений в [1, 2, 7, 8] показатель экспоненты, входящей в подынтегральное выражение первого интеграла матричного элемента $V_{\phi fi}$ (см. ниже (3)), разлагался в ряд до второго порядка по величине $2(\varepsilon_{zi} - \varepsilon_{zf})(2E)^{-2/3}$ (индексы i, f означают начальные и конечные состояния). Однако в плоскости $(\varepsilon_{zi} - \varepsilon_{zf}, E)$ имеется область, в которой такого разложения недостаточно. В частности, при частотах фотона $\omega \approx \varepsilon_{zi} - \varepsilon_{zf} \geq 0,01$ и $E < 0,0001$. В этой области условия применимости найденных в [1, 2, 7, 8] сечений, очевидно, нарушаются.

В настоящей работе вышеупомянутое разложение в подынтегральном выражении не использовалось, а соответствующий интеграл из-за его сложности брался численно, что позволяет найти

Крылов Владимир Иванович, профессор.
Тихоокеанский государственный университет.
Россия, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
E-mail: krylov_vladimir@mail.ru
Хомяков Владимир Васильевич, аспирант.
Дальневосточный государственный гуманитарный университет.
Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Карла Маркса, 68.
E-mail: rozendetr@bk.ru

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2014 г.

© Крылов В. И., Хомяков В. В., 2015

сечения при значениях ω и E , не соответствующих условиям применимости результатов работ [1, 2, 7, 8].

Постановка задачи и основные результаты

Первая часть этого параграфа близка к соответствующим частям работ [1, 2, 7, 8]. Считаем, что однородное и стационарное электрическое поле с напряженностью $\mathbf{E} (0,0,-E)$ (в декартовой системе координат xuz) находится между двумя параллельными плоскостями, к которым \mathbf{E} ортогонально. Одна из плоскостей $z = -L_1$ является источником стационарного моноэнергетического потока электронов, падающих на кулоновые центры, которые находятся в точках пространства с координатами $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_{n_1, n_2, n_3} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3$, где $n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$; $\mathbf{a}_1(a_{1x}, a_{1y}, a_{1z})$, $\mathbf{a}_2(a_{2x}, a_{2y}, a_{2z})$ и $\mathbf{a}_3(a_{3x}, a_{3y}, a_{3z})$ — базисные векторы упорядочной структуры кулоновых центров, на которых рассеиваются электроны. Вторая плоскость $z = L$ полностью поглощает электроны (абсолютно черная стенка). Предполагаем, что ε_z больше EL_1 : $\varepsilon_z > EL_1$. Тем самым исключаем из рассмотрения рождение фотонов, происходящих при переходе рассеянных частиц в состояния, когда они отражаются от потенциального барьера внешнего поля.

Взаимодействие электронов с рассеивающими центрами рассматриваем как возмущение.

Невозмущенные волновые функции ψ_i начального и ψ_f конечного состояния, переходящие в $\psi_{i,f} \sim \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ при E стремящегося к нулю, можно записать в виде [7, 8]:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{\exp(i\mathbf{k}_{i\perp}\mathbf{r}_\perp)}{\sqrt{L_x L_y}} C_i \frac{S_{iL}^{1/4}}{S_i^{1/4}} \times \\ &\times \exp\left(i\left(L\sqrt{2(\varepsilon_{zi} + EL)} - \frac{2}{3}S_{iL}^{3/2} + \frac{2}{3}S_i^{3/2}\right)\right), \\ \psi_f &= \frac{\exp(i\mathbf{k}_{f\perp}\mathbf{r}_\perp)}{\sqrt{L_x L_y}} C_f \frac{S_{fL}^{1/4}}{S_f^{1/4}} \times \\ &\times \exp\left(i\left(L\sqrt{2(\varepsilon_{zf} + EL)} - \frac{2}{3}S_{fL}^{3/2} + \frac{2}{3}S_f^{3/2}\right)\right), \end{aligned} \quad (1)$$

где L_x, L_y — длины сторон нормировочного прямоугольника вдоль осей x, y ; $\mathbf{k}_{f\perp}$ и $\mathbf{k}_{i\perp}$ — волновые векторы, определяющие поперечный (относительно \mathbf{E}) импульс электронов конечного и начального состояний, соответственно; $S_{i,f} = z(2E)^{1/3} + 2\varepsilon_{z_{i,f}}(2E)^{-2/3}$; $S_{i,fL} = L(2E)^{1/3} + 2\varepsilon_{z_{i,f}}(2E)^{-2/3}$;

$S_{i,fL} = -L_1(2E)^{1/3} + 2\varepsilon_{z_{i,f}}(2E)^{-2/3}$; $C_{i,f}$ — постоянные, которые выбираем из условия нормировки $\psi_{i,f}$ на нормировочный объем $L_x L_y (L + L_1)$.

Для определения сечения тормозного излучения в борновском приближении используем хорошо известную формулу:

$$d\sigma = 2\pi(j)^{-1} |V_{\phi\hat{f}}|^2 \delta(\varepsilon_f + \omega - \varepsilon_i) dv, \quad (2)$$

где $\varepsilon_f = \mathbf{k}_{f\perp}^2/2 + \varepsilon_{zf}$, $j = |C_i|^2 S_{iL}^{1/2} (2E)^{1/3} (L_x L_y)^{-1} \chi / \chi_z$ — плотность потока эмитированных электронов (на границе поля), $\chi_z = \sqrt{2(-EL_1 + \varepsilon_{zi})}$, $\chi = \sqrt{k_{i\perp}^2 + 2(-EL_1 + \varepsilon_{zi})}$, $\varepsilon_i = \mathbf{k}_{i\perp}^2/2 + \varepsilon_{zi}$; V — нормировочный объем; выражение

$$\begin{aligned} dv &= \alpha^3 (L_x L_y V) \left((2\pi)^6 |C_f|^2 \sqrt{2(\varepsilon_{zf} + EL)} \right)^{-1} \times \\ &\times \omega^2 d\omega dO_\phi d^2\mathbf{k}_{f\perp} d\varepsilon_{zf} \end{aligned}$$

число состояний, в которые переходят излученный фотон и рассеянный электрон, $\alpha = e^2 (\hbar c)^{-1}$ — постоянная тонкой структуры.

Матричный элемент $V_{\phi\hat{f}}$ имеет следующий вид (подробнее см. [1]):

$$\begin{aligned} V_{\phi\hat{f}} &= i\sqrt{2\pi/(\omega V)} \times \\ &\times \left\{ \mathbf{e}_\phi^* \iiint \psi_f^* e^{-ik_\phi r} \nabla \psi_i d^3\mathbf{r} + \frac{1}{\omega} \iiint \psi_f^* \psi_i \mathbf{e}_\phi^* e^{-ik_\phi r} \nabla U d^3\mathbf{r} \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $U = - \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \frac{Z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{n_1, n_2, n_3}|}$,

$N = N_1 N_2$ — число рассеивающих центров в слое, N_3 — число слоев в направлении оси z ; \mathbf{e}_ϕ — вектор поляризации излучаемого фотона.

Для взятия первого интеграла из (3) представим волновые функции (1) в виде:

$$\begin{aligned} \psi_i &= (L_x L_y)^{-1/2} \exp(i\mathbf{k}_{i\perp} r_\perp) C_i S_{iL}^{1/4} \psi_{iz}, \\ \psi_f &= (L_x L_y)^{-1/2} \exp(i\mathbf{k}_{f\perp} r_\perp) C_f S_{fL}^{1/4} \psi_{fz}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{iz} &= S_i^{-1/4} \exp(i(A_i)) \\ A_i &= L\sqrt{2(\varepsilon_{zi} + EL)} - (2/3)S_{iL}^{3/2} + (2/3)S_i^{3/2}, \\ \psi_{fz} &= S_f^{-1/4} \exp(i(B_f)) \\ B_f &= L\sqrt{2(\varepsilon_{zf} + EL)} - (2/3)S_{fL}^{3/2} + (2/3)S_f^{3/2}. \end{aligned}$$

Подставив выражение (4) в первый интеграл из матричного элемента (3), и учитывая, что

$$\nabla\psi_i = i\mathbf{k}_{i\perp} (L_x L_y)^{-1/2} \exp(i\mathbf{k}_{i\perp} r_\perp) C_i S_{iL}^{1/4} \psi_{iz} + (L_x L_y)^{-1/2} \exp(i\mathbf{k}_{i\perp} r_\perp) C_i S_{iL}^{1/4} \frac{\partial\psi_{iz}}{\partial z} \mathbf{k},$$

где $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, получим:

$$\iiint \psi_f^* e^{-i\mathbf{k}_\phi r} \nabla\psi_i d^3\mathbf{r} = C_i C_f S_{iL}^{1/4} S_{fL}^{1/4} (L_x L_y)^{-1} (2\pi)^2 \times \delta(\mathbf{k}_{\phi\perp} + \mathbf{k}_{f\perp} - \mathbf{k}_{i\perp}) (i\mathbf{k}_{i\perp} T_{1\perp} + \mathbf{k} T_{1z}). \quad (5)$$

Здесь, $T_{1\perp} = \int e^{-i\mathbf{k}_\phi z} \psi_{iz} \psi_{fz}^* dz$, $T_{1z} = \int e^{-i\mathbf{k}_\phi z} \psi_{fz}^* \frac{\partial\psi_{iz}}{\partial z} dz$, которые берутся численно.

При взятии второго интеграла из матричного элемента (3) воспользуемся разложением в ряд по степеням $z - n_1 a_{1z} - n_2 a_{2z} - n_3 a_{3z}$ аргумента волновой функции $2S_{i,f}^{3/2} / 3$,

$$2S_{i,f}^{3/2} / 3 = \left(2(\varepsilon_{zi,f} + Ez_{n3}) \right)^{3/2} / (3E) + (z - z_{n3}) \sqrt{2(\varepsilon_{zi,f} + Ez_{n3})}, \quad (6)$$

$$S_{i,f n3} = (2E)^{-2/3} 2(Ez_{n3} + \varepsilon_{zi,f}), \quad (7)$$

$$\psi_i = C_i (L_x L_y)^{-1/2} S_{iL}^{1/4} \exp(i\mathbf{k}_i r) \exp\left(i\left(L\sqrt{2(\varepsilon_{zi} + EL)} - 2S_{iL}^{3/2} / 3 + \alpha_i\right)\right) (1/S_{in3})^{1/4}, \quad (8)$$

$$\psi_f = C_f (L_x L_y)^{-1/2} S_{fL}^{1/4} \exp(i\mathbf{k}_f r) \exp\left(i\left(L\sqrt{2(\varepsilon_{zf} + EL)} - 2S_{fL}^{3/2} / 3 + \alpha_f\right)\right) (1/S_{fn3})^{1/4}, \quad (9)$$

$$\text{где } \alpha_i = \frac{(2(\varepsilon_{zi} + Ez_{n3}))^{3/2}}{3E} + z_{n3} \sqrt{2(\varepsilon_{zi} + Ez_{n3})}, \quad \alpha_f = \frac{(2(\varepsilon_{zf} + Ez_{n3}))^{3/2}}{3E} + z_{n3} \sqrt{2(\varepsilon_{zf} + Ez_{n3})},$$

$$\mathbf{k}_i = (\mathbf{k}_{i\perp}, \sqrt{2(\varepsilon_{zi} + Ez_{n3})}), \quad \mathbf{k}_f = (\mathbf{k}_{f\perp}, \sqrt{2(\varepsilon_{zf} + Ez_{n3})}).$$

Тогда, используя предыдущие выражения (6)-(9), найдем интеграл:

$$\iiint \psi_f^* \psi_i e^{-i\mathbf{k}_\phi r} \nabla U d^3\mathbf{r} = (2\pi) Z (L_x L_y)^{-1} (S_{iL} S_{fL})^{1/4} C_i C_f^* \frac{1 - e^{-iN_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}_\perp}}{1 - e^{-i\mathbf{a}_1 \mathbf{q}_\perp}} \frac{1 - e^{-iN_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{q}_\perp}}{1 - e^{-i\mathbf{a}_2 \mathbf{q}_\perp}} \mathbf{T}_2, \quad (10)$$

$$\text{где } \mathbf{q} = (\mathbf{k}_f + \mathbf{k}_\phi - \mathbf{k}_i), \quad \alpha_{n3} = \alpha_i + \alpha_f,$$

$$\mathbf{T}_2 = (-2i) \exp\left(i\left(L\sqrt{2(\varepsilon_{zi} + EL)} - L\sqrt{2(\varepsilon_{zf} + EL)} - \frac{2}{3} S_{iL}^{3/2} + \frac{2}{3} S_{fL}^{3/2}\right)\right) \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \frac{\exp(-in_3 \mathbf{a}_3 \mathbf{q} + i\alpha_{n3})}{(S_{in3} S_{fn3})^{1/4}} \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|^2}.$$

Подставляя найденные интегралы (5) и (10) в выражение для квадрата матричного элемента (3), и проводя стандартную процедуру суммирования по поляризациям (см., например [9]), а также учитывая, что при $N_1 \rightarrow \infty$, $N_2 \rightarrow \infty$

$$\frac{\sin^2((1/2)\mathbf{q}_\perp \mathbf{a}_1 N_1) \sin^2((1/2)\mathbf{q}_\perp \mathbf{a}_2 N_2)}{\sin^2((1/2)\mathbf{q}_\perp \mathbf{a}_1) \sin^2((1/2)\mathbf{q}_\perp \mathbf{a}_2)} = (2\pi)^2 N_1 N_2 \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{a}_1 \mathbf{q}_\perp - 2\pi s_1) \delta(\mathbf{a}_2 \mathbf{q}_\perp - 2\pi s_2),$$

получим:

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{e}_\phi} |V_{\phi i}|^2 &= \frac{2\pi}{\omega V} (L_x L_y)^{-2} (S_{iL} S_{fL})^{1/2} |C_i C_f|^2 \sum_{\mathbf{e}_\phi} |\mathbf{e}_\phi^* (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q}_\perp) (\mathbf{k}_{i\perp} T_{1\perp} + \mathbf{k} T_{1z}) + \\ &+ \frac{1}{\omega} \mathbf{e}_\phi^* \frac{1 - e^{-iN_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}_\perp}}{1 - e^{-i\mathbf{a}_1 \mathbf{q}_\perp}} \frac{1 - e^{-iN_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{q}_\perp}}{1 - e^{-i\mathbf{a}_2 \mathbf{q}_\perp}} (2\pi) Z T_2 \Big|^2 = \frac{2\pi}{\omega V} (L_x L_y)^{-2} (S_{iL} S_{fL})^{1/2} |C_i C_f|^2 (2\pi)^2 \times \\ &\times \left(L_x L_y \delta(\mathbf{q}_\perp) P_1 + (2\pi) \frac{Z}{\omega} \delta(\mathbf{q}_\perp) P_2 + \frac{1}{\omega^2} (2\pi)^2 Z^2 \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{\infty} [\mathbf{n} \mathbf{T}_2]^2 \delta(\mathbf{a}_1 \mathbf{q}_\perp - 2\pi s_1) \delta(\mathbf{a}_1 \mathbf{q}_\perp - 2\pi s_1) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $P_1 = T_{1\perp}^2 [\mathbf{k}_{i\perp} \mathbf{n}]^2 + i [\mathbf{k}_{i\perp} \mathbf{n}] [\mathbf{k} \mathbf{n}] (T_{1\perp} T_{1z}^* - T_{1\perp}^* T_{1z}) + T_{1z}^2 [\mathbf{k} \mathbf{n}]^2$,

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1 - e^{iN_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}_\perp}}{1 - e^{i\mathbf{a}_1 \mathbf{q}_\perp}} \frac{1 - e^{iN_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{q}_\perp}}{1 - e^{i\mathbf{a}_2 \mathbf{q}_\perp}} \left(T_{1\perp} [\mathbf{k}_{i\perp} \mathbf{n}] [\mathbf{T}_2^* \mathbf{n}] + T_{1z} [\mathbf{k}_{i\perp} \mathbf{n}] [\mathbf{T}_2^* \mathbf{n}] \right) + \frac{1 - e^{-iN_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}_\perp}}{1 - e^{-i\mathbf{a}_1 \mathbf{q}_\perp}} \frac{1 - e^{-iN_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{q}_\perp}}{1 - e^{-i\mathbf{a}_2 \mathbf{q}_\perp}} \times \\ &\times \left(T_{1\perp}^* [\mathbf{k}_{i\perp} \mathbf{n}] [\mathbf{T}_2 \mathbf{n}] + T_{1z}^* [\mathbf{k}_{i\perp} \mathbf{n}] [\mathbf{T}_2 \mathbf{n}] \right), \end{aligned}$$

$\mathbf{n} = \mathbf{k}_\phi / k_\phi = (\sin \theta_\phi \cos \varphi_\phi, \sin \theta_\phi \sin \varphi_\phi, \cos \theta_\phi)$.

В результате подстановки квадрата матричного элемента (11) в дифференциальное сечение тормозного излучения (2) и проинтегрировав его по ε_{zf} , $\mathbf{k}_{f\perp}$, получим сечение тормозного излучения, отнесенное к элементу телесного угла и интервалу частоты фотона:

$$d\sigma = \alpha^3 \frac{\chi_z \omega}{\chi (2\pi)^2} (2E)^{-2/3} L_x L_y \left\{ P_1 + \frac{(2\pi) Z P_2}{\omega [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]} + \frac{Z^2 (2\pi)^2}{\omega^2 [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]^2} \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{\infty} [n \mathbf{T}_{2s}]^2 \right\} d\omega dO_\phi, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{q} = \left(0, 0, \sqrt{2(\varepsilon_{zf} + Ez_{n_3})} - \sqrt{2(\varepsilon_{zi} + Ez_{n_3})} + k_{\phi z} \right),$$

$$\mathbf{T}_{2s} = \frac{2}{i} \exp \left(i \left(L \sqrt{2(\varepsilon_{zi} + EL)} - L \sqrt{2(\varepsilon_{zfs} + EL)} - \frac{2}{3} S_{iL}^{3/2} + \frac{2}{3} S_{fLs}^{3/2} \right) \right) \sum_{n_3=0}^{N_3-1} \frac{\exp(-in_3 \mathbf{a}_3 \mathbf{q}_s + i\alpha_{n_3 s})}{(S_{in_3} S_{fn_3 s})^{1/4}} \frac{\mathbf{q}_s}{|\mathbf{q}_s|^2},$$

$$\alpha_{n_3 s} = -\alpha_{fs} + \alpha_i, \quad S_{fLs} = L(2E)^{1/3} + (2\varepsilon_{zfs}) / (2E)^{2/3}, \quad S_{fn_3 s} = (2E)^{-2/3} 2(Ez_{n_3} + \varepsilon_{zfs}), \quad z_{n_3} = a_{3z} n_3,$$

$$\alpha_{fs} = \left(2(\varepsilon_{zfs} + Ez_{n_3}) \right)^{3/2} / (3E) - z_{n_3} \sqrt{2(\varepsilon_{zfs} + Ez_{n_3})}, \quad q_{sx} = (a_{1x} \eta - a_{2y} \xi) / (a_{1x} (a_{2x} - a_{2y})),$$

$$q_{sy} = (a_{2x} \eta - a_{1y} \xi) / (a_{1x} (a_{2x} - a_{2y})), \quad \eta = 2\pi s_2, \quad \xi = 2\pi s_1, \quad k_{fy} = q_{sy} - k_{\phi y} + k_{iy}, \quad k_{fx} = q_{sx} - k_{\phi x} + k_{ix},$$

$$\mathbf{q}_s = \mathbf{i} q_{sx} + \mathbf{j} q_{sy} + \mathbf{k} \left(k_{\phi z} + \sqrt{2(\varepsilon_{zfs} + Ez_{n_3})} - \sqrt{2(\varepsilon_{zi} + Ez_{n_3})} \right),$$

$$\varepsilon_{zf} = \mathbf{k}_{i\perp}^2 / 2 + \varepsilon_{zi} - \omega - (\mathbf{k}_{i\perp} - \mathbf{k}_{\phi\perp})^2 / 2, \quad \varepsilon_{zfs} = \mathbf{k}_{i\perp}^2 / 2 + \varepsilon_{zi} - \omega - \mathbf{k}_{f\perp}^2 / 2.$$

Анализ результатов

Анализ сечения будем проводить численными методами, строя кривые, соответствующие функциям из (12):

$$F = d\sigma / (L_x L_y d\omega dO),$$

$$F_1 = \alpha^3 \frac{\chi_z \omega}{\chi (2\pi)^2} (2E)^{-2/3} P_1,$$

$$F_2 = \alpha^3 \frac{\chi_z \omega}{\chi (2\pi)^2} (2E)^{-2/3} \frac{(2\pi) Z P_2}{\omega [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]},$$

$$\begin{aligned} F_3 &= \alpha^3 \frac{\chi_z \omega}{\chi (2\pi)^2} (2E)^{-2/3} \frac{Z^2 (2\pi)^2}{\omega^2 [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]^2} \times \\ &\times \sum_{s_1=-\infty}^{\infty} \sum_{s_2=-\infty}^{\infty} [n \mathbf{T}_{2s}]^2, \end{aligned}$$

в виде зависимости от θ_ϕ при фиксированных параметрах: $\omega = 0,01$, $k_i = 20$, $Z = 1$, $\mathbf{a}_1(1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2(0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3(0, 0, 1)$, $\varphi_\phi = \pi/3$ и величине углов $\varphi_i = 0$, $\theta_i = 1,545$, определяющих направление падения пучка электронов на слои рассеивающих центров: $\mathbf{k}_i = (k_i \sin \theta_i \cos \varphi_i, k_i \sin \theta_i \sin \varphi_i, k_i \cos \theta_i)$, $\varepsilon_{zi} = 0,5(k_i \cos \theta_i)^2$; и числом слоев $N_3 = 1$. Функция F_1 (изображена сплошной жирной линией на рис. 1) определяет сечение тормозного излучения только во внешнем электрическом поле, F_3 — только в кулоновом поле рассеивающих центров (пунктирная жирная линия). Функция F_2 (пунктирная тонкая линия) является интерференционным слагаемым, связанным с вкладом в излучение движений в кулоновом и внешнем полях (см. рис. 1—4).

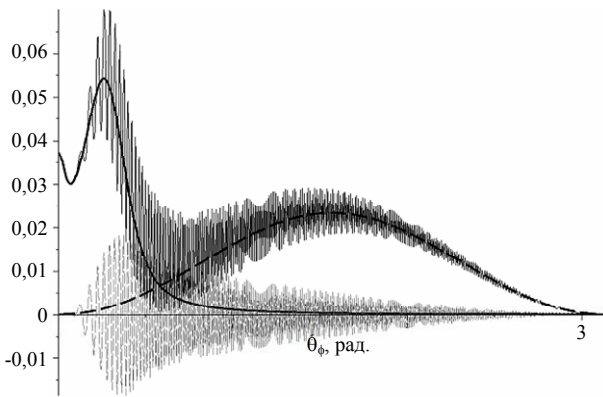


Рис. 1. Сплошной жирной линией обозначена кривая F_1 , пунктирной тонкой линией обозначена кривая F_2 , пунктирной жирной линией обозначены F_3 , сплошной тонкой линией обозначены кривая F при $E = 10^{-3}$

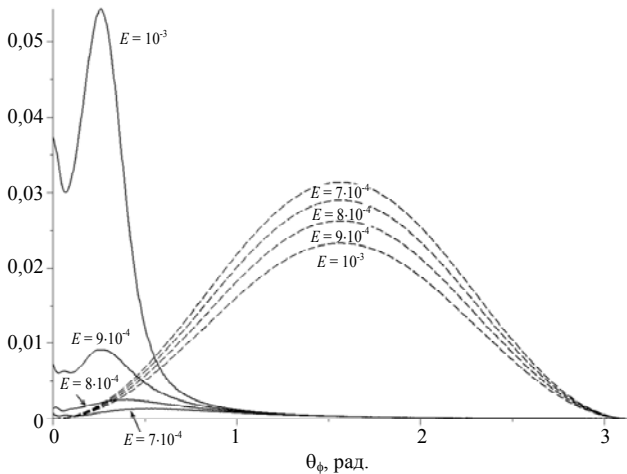


Рис. 2. Сплошной жирной линией обозначена кривая F_1 , пунктирной линией обозначены F_3 при разных значениях E

Показанные (при $E = 10^{-3}$) на рис. 1, зависимости F_1 и F_3 представлены гладкими кривыми (в выбранном масштабе), тогда как интерференционное слагаемое F_2 , а вместе с ним и полное сечение F (сплошная не жирная кривая) представляют собой пространственно осциллирующие кривые с

достаточно большими амплитудами порядка F_1 и периодами (при малых углах) порядка 10^{-1} радиана. Подчеркнем, что изображенные на этом рисунке осцилляции сечений связаны именно с интерференцией первого и второго слагаемого матричного элемента $V_{\phi fi}$. То, что осцилляции связаны именно с интерференционными слагаемыми, подтверждается и кривыми на рис. 2.

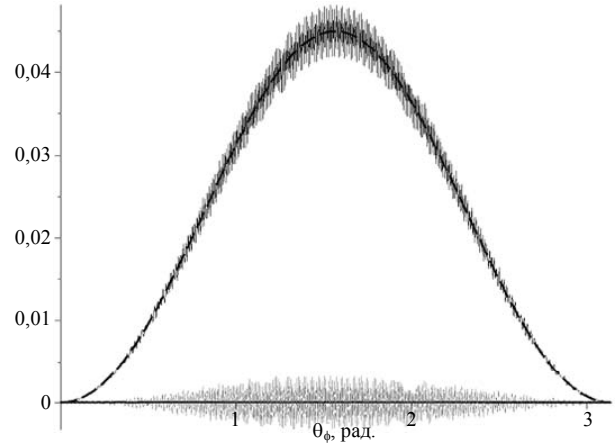


Рис. 3. Сплошной жирной линией обозначена кривая F_1 , пунктирной тонкой линией обозначена кривая F_2 , пунктирной жирной линией обозначены F_3 , сплошной тонкой линией обозначены кривая F при $E = 10^{-4}$

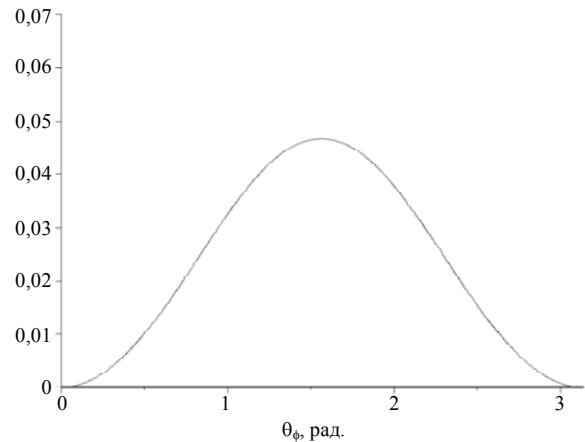


Рис. 4. Сплошной тонкой линией обозначены кривая F , кривые F_1 и F_2 практически совпадают с осью абсцисс в виде жирного отрезка и имеют такие же мелкие осцилляции что и F , амплитудой порядка 10^{-5}

Действительно, гладкие F_1 и F_3 на нем определены квадратами модулей первого и второго слагаемого $V_{\phi fi}$. Поэтому осцилляции могут возникнуть в результате вычисления $|V_{\phi fi}|^2$, когда первое и второе слагаемое $V_{\phi fi}$ перемножаются. Из рис. 2 также видно, что при уменьшении внешнего электрического поля вклад в излучение движения частиц в этом поле уменьшается, тогда как излучение вызванное рассеянием на кулоновых центрах незна-

чительно растет. Такое увеличение связано со слабой зависимостью F_3 от E величин $S_{f_{3s}}$, S_{in_3} . Все это подтверждается кривыми F_1 , F_2 , F_3 и F , при $E = 10^{-4}$ на рис. 3. Легко видеть, что при $E = 10^{-4}$ (и $\omega = 10^{-2}$) основной вклад в сечение дает третье слагаемое, на которое наложена осцилляция интерференционного слагаемого, тогда как вклад в среднее значение полного сечения F первого слагаемого практически равно 0.

Рис. 4 аналогичен рис. 3, но для $E = 0$. На этом рисунке не изображена кривая F_3 , которая фактически совпадает с F , но не содержит мелких осцилляций с амплитудой порядка 10^{-5} и чрезвычайно малыми периодами; кривые F_1 и F_2 практически совпадают с осью абсцисс в виде жирного отрезка и имеют такие же мелкие осцилляции, что и F .

Здесь следует отметить, что появление таких мелких «возмущений» связано с тем, что при стремлении напряженности внешнего поля к нулю матричный элемент V_{fi} (без поля решетки) переходит в выражение:

$$V_{\phi fi} = -\sqrt{\frac{1}{\omega(2\pi V)^3}} \mathbf{e}_\phi^* \mathbf{k}_i (L + L_1) \times \frac{\sin 0,5q_z(L + L_1)}{0,5q_z(L + L_1)} \exp[-i0,5q_z(L - L_1)] \delta(\mathbf{q}_\perp), \quad (13)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}_f + \mathbf{k}_\phi - \mathbf{k}_i$, $\mathbf{q}_\perp \mathbf{E} = 0$.

Так как эта формула получается из матричного элемента, содержащего локализованное вдоль своего направления электрическое поле, то физически бессмысленно в (13) устремлять L к бесконечности, а $-L_1$ к минус бесконечности.

Входящая в (13) функция

$$(L + L_1) \frac{\sin 0,5q_z(L + L_1)}{0,5q_z(L + L_1)} \quad (14)$$

имеет острый, но конечный по ширине и высоте пик. Нетрудно проверить, что при $\mathbf{q}_\perp = 0$, $\varepsilon_f + \hbar\omega - \varepsilon_i = 0$ и $\omega > 0$, параметр $q_z \neq 0$. При этом выражение (13) (из-за того, что (14) не совпадает с дельта-функцией), вообще говоря, будет отлично от нуля. Однако это совсем не означает, что свободная электрически заряженная частица должна излучать фотон, двигаясь между двумя параллельными плоскостями, одна из которых источник таких частиц, а другая — абсолютно черная стенка. Необходимо иметь в виду, что при конечной области локализации (вдоль оси z) $L + L_1$ все входящие в q_z компоненты волновых векторов

должны быть кратны $2\pi/(L + L_1)$, а в этом случае выражения (13) и (14) будут равны нулю, т. е. теория дает тот результат, который следует из самых общих физических соображений.

Если однородное электрическое поле отлично от нуля, то более сложными будут и следующие из условия ортогональности волновых функций (1) выражения для дискретных волновых векторов частиц, что заставляет считать их непрерывными величинами. Однако, как следует из приведенных рассуждений, это возможно только при условии малости сечения определяемого матричным элементом (13) по сравнению с (12).

На рис. 5 изображена поверхность $F(\theta_\phi, \phi_\phi)$, когда $E = 10^{-4}$ и $N_3 = 5$, а $\theta_\phi \in (0, 0,2)$. Малость интервала для значений θ_ϕ связано с большими временными затратами машинного времени для вычисления этой функции на всем интервале данного угла. Из вида $F(\theta_\phi, \phi_\phi)$ следует, что при увеличении числа слоев, даже до 5, величина сечения растет на порядок по сравнению со случаем $N_3 = 1$, однако относительный вклад осцилляций сечений, вызванный суперпозицией излучающих частиц в кулоновом и однородном полях, уменьшается (это также было отмечено в [7] и [8]). Полученные нами поверхности при $N_3 = 50$, $N_3 = 100$ подтверждает это утверждение. Рассматриваемые осцилляции сечений при большом числе слоев можно заметить только при большом увеличении масштаба функции $F(\theta_\phi, \phi_\phi)$, тогда как их абсолютные значения могут быть значительно больше амплитуд осцилляций при рассеянии частиц на однослой (при одном и том же значении E).

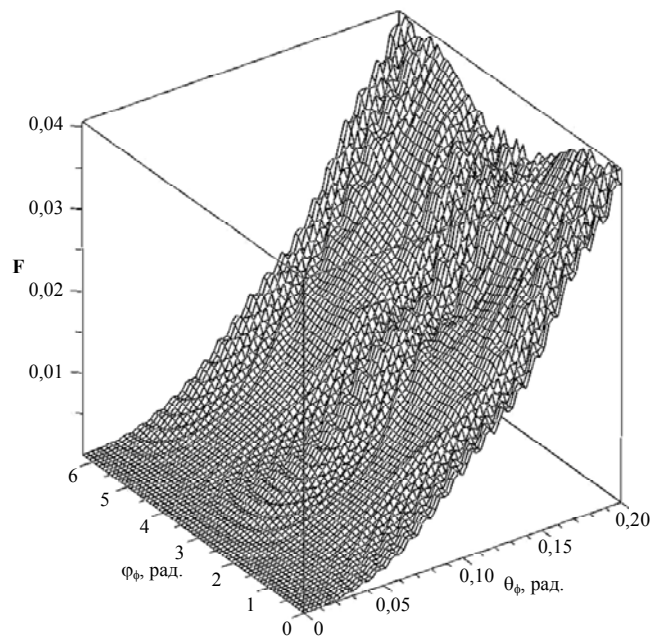


Рис. 5. Поверхность $F(\theta_\phi, \phi_\phi)$, при $N_3 = 5$, $E = 10^{-4}$ и $\theta_\phi \in (0, 0,2)$

Заключение

В настоящей работе получены сечения тормозного излучения заряженных частиц, ускоряемых внешним квазигомогенным электрическим полем и рассеивающихся на упорядоченной системе кулоновых центров, при достаточно широком интервале значений внешнего поля (удовлетворяющему нерелятивистскому приближению), в том числе и для случая, когда нельзя использовать сечения, найденные в работах [1, 2, 7, 8]. Проведенный анализ, частично представленный на рис. 1—5, показал, что для выбранных значений параметров частиц интерференционные эффекты, вызванные вкладом в излучение фотонов суперпозицией движений излучающих частиц в кулоновом и внешнем полях, наиболее заметно проявляются при небольшом числе (1—5) слоев кулоновых центров (см., также [7, 8]) и при напряженности внешнего поля порядка $10^{-4} e^2/a$, где $a = \hbar^2/(m_e e^2)$.

В рамках выбранной постановки задачи рассмотрены особенности предельного перехода $E \rightarrow 0$ в найденных сечениях.

Авторы выражают глубокую благодарность А. А. Рухадзе за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В. И. // Прикладная физика. 2007. № 1. С. 28.
2. Крылов В. И., Бондарева Т. В. // Прикладная физика. 2010. № 3. С. 5.
3. Бондарева Т. В., Крылов В. И. // Прикладная физика. 2011. № 4. С. 52.
4. Крылов В. И., Мизюк М. В. // Инженерная физика. 2013. № 1. С. 28.
5. Крылов В. И., Хомяков В. В. // Прикладная физика. 2014. № 2. С. 13.
6. Крылов В. И., Хомяков В. В. // Успехи прикладной физики. 2014. Т. 2. № 2. С. 101.
7. Крылов В. И., Хомяков В. В. // Прикладная физика. 2014. № 5. С. 29.
8. Крылов В. И., Хомяков В. В. // Инженерная физика. 2014. № 11. С. 18—26.
9. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. — М.: Физматлит, 2002.

On the question of the calculation of bremsstrahlung cross sections passing through the ordered structure of Coulomb centers electrons and accelerated by a homogeneous electric field

V. I. Krylov¹ and V. V. Khomyakov²

¹Tikhookeanskii State University,
136 Tikhookeanskaya str., Khabarovsk, 680035, Russia
E-mail: krylov_vladimir@mail.ru

²Far Eastern State University of Humanities,
68, Karl Marx str., Khabarovsk, 680000, Russia
E-mail: rozendetr@bk.ru

Received December 30, 2014

In the first Born approximation are found and analyzed the bremsstrahlung cross section of electrons passing through an ordered structure Coulomb centers and accelerated homogeneous electric field in a wide range of its values. The conditions of applicability of the cross sections obtained analytically previously in the literature. It is shown that the previously obtained cross sections corresponds to the frequency of the photon 10^{-2} coincide with the results of this work at a field strength more than 10^{-4} (atomic units).

PACS: 79.20.Rf

Keywords: bremsstrahlung, external field, ordered layer of sowing points, interference of electrons, superposition of motions, spatial oscillation.

REFERENCES

1. V. I. Krylov, *Prikladnaya Fizika*, No. 1, 28 (2007).
2. V. I. Krylov and T. V. Bondareva, *Prikladnaya Fizika*, No. 3, 5 (2010).
3. T. V. Bondareva and V. I. Krylov, *Prikladnaya Fizika*, No. 4, 52 (2011).
4. V. I. Krylov and M. V. Mizyuk, *Inzhenernaya Fizika*, No. 1, 28 (2013).
5. V. I. Krylov and V. V. Khomyakov, *Prikladnaya Fizika*, No. 2, 13 (2014).
6. V. I. Krylov and V. V. Khomyakov, *Uspekhi Prikladnoi Fiziki* **2**, 101 (2014).
7. V. I. Krylov and V. V. Khomyakov, *Prikladnaya Fizika*, No. 5, 29 (2014).
8. V. I. Krylov and V. V. Khomyakov, *Inzhenernaya Fizika*, No. 11, 18 (2014).
9. V. B. Berestetsky, E. M. Lifshits, and L. P. Pitaevsky, *Quantum Electrodynamics* (Fizmatlit, Moscow, 2002) [in Russian].