

Моделирование электростатического поля тороида

Ю. Н. Ташаев

Электростатический потенциал заряженного проводящего тора представлен в виде суммы произведений функций Лежандра на гармонические функции. Рассмотрена задача о распределении электростатического потенциала вокруг равномерно заряженного вдоль поверхности непроводящего тора. Решение задачи сведено к вычислению поверхностного интеграла и выражено через эллиптический интеграл первого рода. Обсуждён вопрос о наличии «потенциальной ямы» в центре тора.

PACS: 41.20.Cv

Ключевые слова: электростатический потенциал, тороидальные координаты, цилиндрические координаты, уравнение Лапласа, метод Фурье, функции Лежандра, эллиптические интегралы, визуализация пространственного распределения, MatLab.

Введение

При проектировании различных электрофизических устройств возникает необходимость создания математической модели электростатического поля заряженных тел различной конфигурации. Осесимметричная электростатическая задача нахождения потенциала, создаваемого равномерно заряженным однородным круглым тонким кольцом, которое представляет собой частный случай заряженного тора (при $r_0/R_0 \rightarrow 0$, где r_0 , R_0 — малый и большой радиусы тора), рассматривалась в различных курсах электродинамики [1—3]. Наряду с традиционным представлением потенциала в виде суммы произведений сферических функций на полиномы Лежандра в них рассмотрено вычисление потенциала в произвольной точке пространства, не принадлежащей нити кольца, через эллиптический интеграл первого рода. В первом случае приходится использовать бесконечные ряды, расходящиеся при вычислении потенциала в точках, принадлежащих сферической поверхности $r = R_0$, где потенциал таким методом вычислить не удаётся. Второй вполне пригоден для визуализации силовых и эквипотенциальных линий поля, создаваемого равномерно заряженным тонким кольцом, и был реализован численно и аналитически в работах [4, 5]. Однако он не применим без доработки для определения потенциала заряженного непроводящего

тора. В работах [6, 7] рассматривалась осесимметричная электростатическая задача о нахождении потенциала поля системы проводников, одним из которых являлся тор. В них одновременно использовались цилиндрические и тороидальные координаты, в которых определялся потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа, граничным условиям первого рода и условиям непрерывности. Решение искалось в виде суперпозиции тороидальных и цилиндрических гармонических функций и сводилось к решению уравнения Фредгольма второго рода численными методами. Хотя уединённый проводящий тор и не рассматривался, но все необходимые элементы для нахождения его потенциала в тороидальных координатах можно было бы в них найти. В работе [8] изложена методика вычисления электростатического потенциала, создаваемого равномерно заряженным проводящим тором, основанная на представлении решения уравнения Пуассона в виде интеграла по поверхности тора. Из полученного для потенциала выражения следует, что поверхность тора не является эквипотенциальной. Неэквипотенциальность поверхности противоречит свойству проводимости тора. К тому же величина потенциала занижена в четыре раза. Представленные в работе графики свидетельствуют о наличии радиальной составляющей поля в центре тора, что противоречит его симметрии. Выражение для потенциала, полученное в работе в тороидальных координатах, не проанализировано в декартовых, что затрудняет его использование. Отмеченное в работе наличие «потенциальной ямы» внутри кольца, как будет показано далее, не соответствует действительности. Тем не менее, предложенный в работе [8] приближённый метод вычисления электростатического потенциала тора существенно облегчает

Ташаев Юрий Николаевич, доцент.
Московский государственный университет дизайна
и технологий.
Россия, 117997, Москва, Садовническая ул., 33.
Тел/факс: 8 (499) 131-04-25. E-mail: smcadmin@mail.ru
Статья поступила в редакцию 21 ноября 2014 г.

процесс поиска решения задачи, не прибегая к разложению обратного расстояния по тороидальным функциям.

Целью работы является расчёт электростатического потенциала, создаваемого заряженным проводящим уединённым тором, построение и анализ приближённого решения задачи о потенциале равномерно заряженного вдоль поверхности непроводящего тора, а также обсуждение вопроса о наличии потенциальной ямы в его центре.

Постановка и решение задачи для проводящего тора

Рассмотрим осесимметричную задачу о нахождении потенциала электростатического поля проводящего тора T с малым радиусом r_0 и большим радиусом R_0 (рис. 1). Тороидальная поверхность проводника образуется при вращении окружности радиусом r_0 вокруг оси z так, что её центр удалён от оси вращения на расстояние R_0 . Для построения аналитического решения воспользуемся тороидальными координатами (μ, θ, φ) [9]:

$$\rho = \frac{c \operatorname{sh} \mu}{ch \mu - \cos \theta}, \quad z = \frac{c \sin \theta}{ch \mu - \cos \theta}, \quad (1)$$

где $0 \leq \mu < \infty$, $-\pi < \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, c — размерный масштабный множитель, (ρ, φ, z) — цилиндрические координаты, связанные с декартовыми обычным образом: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. При фиксированном значении координаты μ , точки $P(\rho, \varphi, z)$ с координатами ρ и z , определяемыми соотношениями (1), и $\varphi \in [0, 2\pi]$ заполняют поверхность тора:

$(\rho - R)^2 + z^2 = r^2$ с малым радиусом $r = c/sh\mu$ и большим радиусом $R = c \operatorname{cth} \mu$. Несущая заряд поверхность тора T определяется координатами: $\mu = \mu_0$, где $\mu_0 = \ln(R_0 / r_0 + \sqrt{R_0^2 / r_0^2 - 1})$ $-\pi < \theta \leq \pi$,

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$. При $\mu > \mu_0$ точка P принадлежит внутренней области тора, а при $0 \leq \mu < \mu_0$ внешней. Значение угла θ испытывает скачок от $-\pi$ до π при пересечении круга радиуса $\rho = R_0 - r_0$, лежащего в плоскости $z = 0$. Элемент площади поверхности тора определяется формулой:

$$dS = \frac{c^2 \operatorname{sh} \mu_0 d\theta d\varphi}{(ch \mu_0 - \cos \theta)^2}, \quad (2)$$

так что его полная площадь может быть вычислена представлением подинтегрального выражения в виде функции переменных ρ, z, θ :

$$S = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{c^2 \operatorname{sh} \mu_0 d\theta}{(ch \mu_0 - \cos \theta)^2} = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \rho \frac{z}{\sin \theta} d\theta = 4\pi^2 R_0 r_0. \quad (3)$$

Здесь ρ, z — цилиндрические координаты точки, принадлежащей поверхности проводника: $\rho = R_0 + r_0 \cos \theta$, $z = r_0 \sin \theta$.

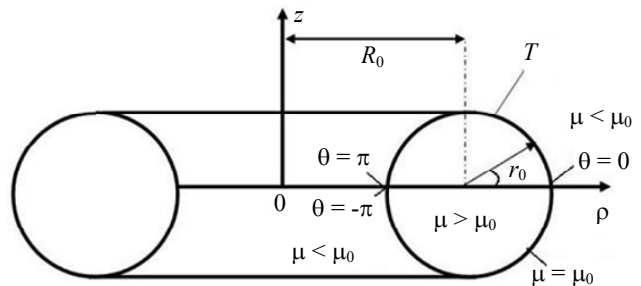


Рис. 1. Геометрические характеристики тороидального электрода. Поверхность тора T задаётся уравнениями $\mu = \mu_0$, $-\pi < \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, где $\mu_0 = \ln(R_0 / r_0 + \sqrt{R_0^2 / r_0^2 - 1})$, r_0 — малый радиус, R_0 — большой радиус тора

Задача определения электростатического потенциала U , зависящего ввиду осевой симметрии только от переменных (μ, θ) , сводится к решению уравнения Лапласа $\Delta U = 0$ во всём пространстве, за исключением поверхности тора T . Граничные условия стандартны:

$$U|_T = U_0, \quad U(\vec{r}) \rightarrow 0 \text{ при } \vec{r} \rightarrow \infty.$$

Здесь U_0 значение потенциала на поверхности тора T , а второе условие описывает поведение потенциала на больших расстояниях от заряженной поверхности ($r \gg R_0$). После представления потенциала в виде $U(\mu, \theta) = v(\mu, \theta) \sqrt{2ch\mu - 2\cos\theta}$ и подстановки в уравнение Лапласа, записанное в тороидальных координатах, уравнение для функции $v(\mu, \theta)$ примет вид:

$$v_{\mu\mu} + v_{\theta\theta} + v_{\mu} \operatorname{cth} \mu + \frac{1}{4} v = 0.$$

Применяя метод Фурье разделения переменных и, представив функцию v в виде $v(\mu, \theta) = f_1(\mu) f_2(\theta)$, получим систему уравнений:

$$f_1'' + \operatorname{cth} \mu f_1' + \left(\frac{1}{4} - n^2\right) f_1 = 0$$

$$f_2'' + n^2 f_2 = 0.$$

Решением первого уравнения системы являются функции Лежандра первого рода или функции тора: $P_{n-1/2}(ch \mu)$, а решением второго уравнения гармонические функции $e^{in\theta}$. Выражение для потенциала примет вид:

$$U(\mu, \theta) = \sqrt{2} \sqrt{ch\mu - \cos \theta} \times \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n \frac{P_{n-1/2}(ch\mu)}{P_{n-1/2}(ch\mu_0)} \cdot e^{in\theta}.$$

Стремление потенциала $U(\mu, \theta)$ к нулю на больших расстояниях от заряженной поверхности выполняется автоматически. Для определения коэффициентов A_n используем условие эквипотенциальности заряженной поверхности $U(\mu_0, \theta) = U_0$ или $\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta} = U_0 \frac{1}{\sqrt{2ch\mu_0 - 2\cos\theta}}$ и, воспользовавшись разложением [10]:

$$\frac{1}{\sqrt{2ch\mu_0 - 2\cos\theta}} = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} Q_{n-1/2}(ch\mu_0) \cdot e^{in\theta},$$

где $Q_{n-1/2}(ch\mu_0)$ — функции Лежандра второго рода, находим $A_n = \frac{U_0}{\pi} Q_{n-1/2}(ch\mu_0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Функции Лежандра первого и второго рода могут быть вычислены по формулам [11, 12]:

$$P_{n-1/2}(ch\mu_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(ch\mu_0 + sh\mu_0 \cos\varphi)^{n+1/2}}$$

$$Q_{n-1/2}(ch\mu_0) = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi d\varphi}{\sqrt{2ch\mu_0 - 2\cos\varphi}}.$$

Окончательно решение уравнения Лапласа для потенциала проводящего тора может быть представлено в виде:

$$U(\mu, \theta) = \frac{U_0}{\pi} \sqrt{2ch\mu - 2\cos\theta} \times \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{Q_{n-1/2}(ch\mu_0)}{P_{n-1/2}(ch\mu_0)} P_{n-1/2}(ch\mu) \cdot e^{in\theta}.$$

Постановка и решение задачи для непроводящего тора

Перейдём к вычислению электростатического потенциала, создаваемого равномерно заряженным вдоль поверхности непроводящим тором, несущим заряд q .

Потенциал, создаваемый тором в точке наблюдения поля $P(\vec{r})$, в соответствии с законом Кулона и принципом суперпозиции определяется интегралом:

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\vec{r}') ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (4)$$

где ϵ_0 — электрическая постоянная (в системе СИ), \vec{r}' — радиус вектор источника поля, а именно, бесконечно малого элемента поверхности тора площадью ds' , \vec{r} — радиус вектор точки наблюдения поля P . Поверхностная плотность заряда $\sigma(\vec{r}')$ в предположении его равномерного распределения вдоль поверхности тора, в соответствии с формулой (3), определяется выражением

$\sigma(\vec{r}') = q / 4\pi^2 R_0 r_0$. Следуя изложенной в работе [8] методике, решим осесимметричную задачу о нахождении потенциала в тороидальной системе координат (1). Для определения функции $U(\mu, \theta)$ (заметим, потенциал не зависит от угла φ) вычислим поверхностный интеграл (4), где ds' определяется выражением (2), а расстояние $|\vec{r} - \vec{r}'|$ между точкой наблюдения поля $P(\mu, \theta, \varphi)$ и точкой на поверхности тора $P'(\mu_0, \theta', \varphi')$ определится выражением [12]:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{c\sqrt{2}} \frac{\sqrt{ch\mu - \cos\theta} \sqrt{ch\mu_0 - \cos\theta'}}{\sqrt{A_1 - \cos(\theta - \theta')}}},$$

где $A_1 = ch\mu ch\mu_0 - sh\mu sh\mu_0 \cos(\varphi - \varphi')$. Потенциал, создаваемый тором в точке $P(\mu, \theta, \varphi)$ во внешней области ($\theta \leq \mu < \mu_0$), определяется поверхностным интегралом (4) и сводится к выражению

$$U = \frac{qc sh\mu_0 \sqrt{ch\mu - \cos\theta}}{16\sqrt{2}\pi^3 \epsilon_0 R_0 r_0} I,$$

$$\text{где } I = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{A_1 - \cos(\theta - \theta')}} \frac{d\theta' d\varphi'}{(ch\mu_0 - \cos\theta')^{3/2}}. \quad (5)$$

Для вычисления потенциала $U(\mu, \theta)$ проинтегрируем (5) сначала по азимутальному углу φ' , введя новую переменную $\psi = \varphi' - \varphi$ и преобразовав радикал

$$\sqrt{A_1 - \cos(\theta - \theta')} = \sqrt{A_2 - A_3 \cos\psi},$$

$$A_2 = ch\mu ch\mu_0 - \cos(\theta - \theta'), \quad A_3 = sh\mu sh\mu_0,$$

$$\psi' = \pi + \psi,$$

получим для интеграла по ψ :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{A_2 - A_3 \cos\psi}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\psi'}{\sqrt{A_2 + A_3 \cos\psi'}} =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{(A_2 + A_3) - 2A_3 \sin^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{A_2 + A_3}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}},$$

$$\text{где } \psi' = 2\alpha, \quad k^2 = \frac{2A_3}{A_2 + A_3}, \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}},$$

$K(k)$ полный эллиптический интеграл первого рода. Интеграл I в формуле (5) представим в виде:

$$I = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{K(k)}{\sqrt{A_2 + A_3} (ch\mu_0 - \cos\theta')^{3/2}} d\theta'. \quad (6)$$

Для приближённого вычисления интеграла, по аналогии с [8], упростим сумму $A_2 + A_3$, учитывая неравенство $ch(\mu + \mu_0) > \cos(\theta - \theta')$: $A_2 + A_3 = ch(\mu + \mu_0) - \cos(\theta - \theta') \approx ch(\mu + \mu_0)$. Поэтому $A_2 + A_3$ и k не зависят от θ' . При вычислении (6) выражения $\sqrt{ch(\mu + \mu_0)}$ и $K\left(\sqrt{\frac{2sh\mu sh\mu_0}{ch(\mu + \mu_0)}}\right)$ могут быть вынесены за знак интеграла. Вычислим I_1

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta'}{(B - \cos\theta')^{3/2}} = 2 \int_0^{\pi} \frac{d\theta'}{(B - \cos\theta')^{3/2}} =$$

$$= \frac{4}{(B+1)^{3/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{(1 - \lambda^2 \cos^2 \beta)^{3/2}} =$$

$$= \frac{4}{(B+1)^{3/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma)^{3/2}}.$$

Здесь $B = ch \mu_0$, $\theta' = 2\beta$, $\lambda^2 = 2 / (ch\mu_0 + 1)$, $\gamma = \pi/2 - \beta$. Интегрируя по γ в пределах от 0 до $\pi/2$ тождество $\frac{d \sin \gamma \cos \gamma}{d\gamma} = \frac{f(\lambda, \gamma)}{\lambda^2} = \frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2 f^3(\lambda, \gamma)}$,

где $f(\lambda, \gamma) = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma}$, получим:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma)^{3/2}} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\gamma}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \gamma}},$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}\lambda^3}{1 - \lambda^2} E(\lambda), \quad \lambda = \sqrt{\frac{2}{ch\mu_0 + 1}}$$

где $E(\lambda)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. В итоге потенциал $U(\mu, \theta)$, создаваемый тором во внешней области примет вид:

$$U(\mu, \theta) = \frac{qc}{\sqrt{2\pi^3 \epsilon_0 R_0 r_0}} \frac{\sqrt{ch\mu - \cos\theta}}{\sqrt{ch(\mu + \mu_0)}} \frac{sh\mu_0}{\sqrt{ch\mu_0 + 1}} \times$$

$$\times \frac{1}{(ch\mu_0 - 1)} K\left(\sqrt{\frac{2sh\mu sh\mu_0}{ch(\mu + \mu_0)}}\right) E\left(\sqrt{\frac{2}{ch\mu_0 + 1}}\right),$$

и безразмерный $\bar{U}(\mu, \theta) = \frac{U(\mu, \theta)}{U(\mu_0)}$,

$$U(\mu_0) = \frac{qc}{\sqrt{2\pi^3 \epsilon_0 R_0 r_0}} \frac{sh\mu_0}{\sqrt{ch\mu_0 + 1}} \frac{1}{(ch\mu_0 - 1)} E\left(\sqrt{\frac{2}{ch\mu_0 + 1}}\right)$$

$$\bar{U}(\mu, \theta) = \frac{\sqrt{ch\mu - \cos\theta}}{\sqrt{ch(\mu + \mu_0)}} K\left(\sqrt{\frac{2sh\mu sh\mu_0}{ch(\mu + \mu_0)}}\right). \quad (7)$$

Как следует из этого выражения, на поверхности тора потенциал

$$U(\mu, \theta)_{\mu=\mu_0} \sim \sqrt{ch\mu_0 - \cos\theta}$$

является функцией угла θ . Поверхность тора в этом случае не может быть проводящей.

Анализ результатов

Проанализируем поведение функции $\bar{U}(\mu, \theta)$ при $\mu = 0$ — ось Oz . (Координатная поверхность $\mu = 0$ соответствует $sh\mu = 0$, $ch\mu = 1$, $\rho = 0$, $z = c \sin\theta / (1 - \cos\theta) = c \cdot ctg\theta/2$, при $-\pi/2 < \theta/2 \leq \pi/2$.) Координата $z \rightarrow +\infty$ при $\theta \rightarrow +0$ и $z \rightarrow -\infty$ при $\theta \rightarrow -0$. Далее $\bar{U}(0, \theta)|_{\theta \rightarrow 0} = 0.5\pi\sqrt{1 - \cos\theta} / \sqrt{ch\mu_0} \rightarrow 0$. При $\theta = \pi$ координата $z \rightarrow 0$ и значение потенциала в центре тора $\bar{U}(0, \theta)|_{\theta \rightarrow \pi} \rightarrow \pi(2ch\mu_0)^{-1/2}$ больше его значений при $z \rightarrow \pm\infty$. При $\mu = 0$ имеем:

$$\rho = \frac{c sh \mu|_{\mu=0}}{ch\mu|_{\mu=0} - \cos\theta} = 0, \quad z = \frac{c \sin\theta}{1 - \cos\theta} = c \cdot ctg \frac{\theta}{2},$$

$$\bar{U} = \frac{\pi\sqrt{1 - \cos\theta}}{2\sqrt{ch\mu_0}}, \quad \bar{U} = \bar{U}_0 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|, \quad \bar{U}_0 = \pi / \sqrt{2ch\mu_0}.$$

Определим зависимость потенциала от координаты z на оси симметрии:

$$\tilde{U}(\rho, z)|_{\rho=0} = \frac{\bar{U}_0}{\sqrt{1 + z^2 / c^2}}.$$

Таким образом, потенциал тора убывает при удалении от его центра вдоль оси z , что противоречит наличию минимума функции $\tilde{U}(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ в точке $(0,0,0)$ и, соответственно, «потенциальной ямы» в центре тора.

Рассмотрим поведение потенциала при $z = 0$, когда точка наблюдения принадлежит горизонтальной плоскости большого круга тора. Этому случаю соответствуют два значения тороидальной координаты: $\theta = \pi$ — направление к центру тора:

$\{z = 0, \rho = c \cdot th \frac{\mu}{2}, 0 \leq \mu < \mu_0\}$, и $\theta = 0$ — направление

удаления от центра тора во внешнюю область

$\{z = 0, \rho = c \cdot cth \frac{\mu}{2}, 0 \leq \mu < \mu_0\}$. При любом фиксированном значении μ , принадлежащем интервалу

$[0, \mu_0)$, функция $\bar{U}(\mu, \theta)$ достигает своего максимума при $\theta = \pi$, соответственно, минимума при $\theta = 0$. Исследуем поведение потенциала

$$\hat{U}(\mu) = \bar{U}(\mu, \pi) = \frac{\sqrt{ch\mu + 1}}{\sqrt{ch(\mu + \mu_0)}} K \left(\sqrt{\frac{2sh\mu sh\mu_0}{ch(\mu + \mu_0)}} \right) \quad (8)$$

при $\mu \in [0, \mu_0)$. Анализ знака производной $\frac{d\hat{U}}{d\mu}$

показывает, что функция $\hat{U}(\mu)$ монотонно возрастает при $0 < \mu < \mu_0$, принимая минимальное значение $\pi / \sqrt{2ch\mu_0}$ в точке $\mu = 0$. Воспользовавшись

связью $\mu = \ln \frac{c + \rho}{c - \rho}$, которая является следствием (1) при $\theta = \pi$, рассмотрим функцию

$V(\rho) = \hat{U}(\mu(\rho))$, определенную на интервале $0 \leq \rho < R_0 - r_0$. Константа c находится из условий $ch\mu_0 = \frac{R_0}{r_0}$ и $R_0 - r_0 = c \frac{sh\mu_0}{ch\mu_0 + 1}$ и равна

$c = \sqrt{R_0^2 - r_0^2}$. Учитывая, что $c^2 - \rho^2 > 2R_0r_0 - 2\rho r_0^2 > 0$, получим, что знак производной $\frac{dV}{d\rho} = \frac{d\hat{U}}{d\mu} \frac{d\mu}{d\rho} = \frac{d\hat{U}}{d\mu} \frac{2c}{c^2 - \rho^2}$ совпадает со знаком

$\frac{d\hat{U}}{d\mu}$ и определяет рост потенциала при удалении

от центра тора по направлению к заряженной поверхности в плоскости $z = 0$. В связи с этим в работе [8] и была упомянута «потенциальная яма» внутри тора (как далее показано — ошибочно).

Для визуализации пространственного распределения электростатического потенциала во внешней области тора был создан программный код в среде MatLab. Во всех расчётах малый радиус тора r_0 выбирался равным 0,2 м, а большой радиус R_0 полагался равным 1,5 м. На рис. 2 представлено распределение безразмерного потенциала $\bar{V}(x, y)$ в плоскости большого круга тора ($z = 0$). При построении трехмерного графика функции было использовано соотношение (8) и учтено:

$$\rho = \sqrt{R_0^2 - r_0^2} \operatorname{th} \frac{\mu}{2}, \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$\mu \in [0, \mu_0), \quad \mu_0 = \ln \left(R_0 / r_0 + \sqrt{R_0^2 / r_0^2 - 1} \right).$$

Вид поверхности $\tilde{U}(\sqrt{x^2 + y^2}, z)|_{z=0} = \bar{V}(x, y)$ действительно может привести к ошибочному заключению о наличии «потенциальной ямы» внутри кольца. Однако в реальности потенциал тора явля-

ется функцией трёх координат (x, y, z) , а не двух (x, y) , и это радикально меняет ситуацию.

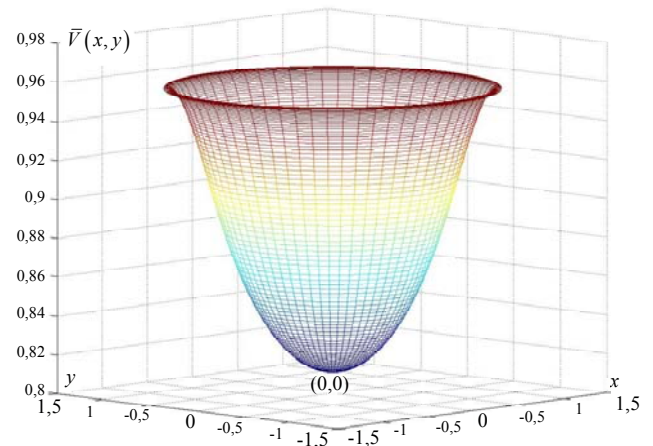


Рис. 2. Представление безразмерного потенциала $\bar{V}(x, y)$, создаваемого равномерно заряженным тором в горизонтальной плоскости большого круга: $z = 0$, $\sqrt{x^2 + y^2} < R_0 - r_0$ в виде трёхмерного графика поверхности, $r_0 = 0,2$ м, $R_0 = 1,5$ м

Для подтверждения вышесказанного на рис. 3 представлено распределение безразмерного потенциала $\tilde{U}(|x|, z) = \tilde{U}(\rho, z)|_{y=0}$ в плоскости $y = 0$ ($\varphi = 0$), которое в силу осевой симметрии будет идентичным распределению потенциала $\tilde{U}(|y|, z)$ в плоскости $x = 0$. При построении графика рассматривались тороидальные поверхности, образуемые при вращении окружностей радиусами $r > r_0$ вокруг оси z так, что их центры удалены от оси вращения на расстояние $R > R_0$, но при этом $R - R_0 < r - r_0$, где $r = c/sh\mu$ — малый и $R = c \operatorname{cth}\mu$ — большой радиусы поверхности. Внешняя по отношению к заряженной поверхности область характеризуется значениями тороидальной координаты $\mu \in [0, \mu_0)$. Цилиндрические координаты (ρ, z) точек, принадлежащих фиксированной тороидальной поверхности ($\mu = \text{const}$), определяются соотношениями (1), в которых ограничимся $\theta \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]$ и $c = \sqrt{R_0^2 - r_0^2}$. Значение потенциала $\tilde{U}(\rho, z)$ в точке с координатами $\rho = \rho(\mu, \theta)$, $z = z(\mu, \theta)$ вычислялось по формуле (7). Обратное, по заданным значениям координат (ρ, z) определялись координаты (μ, θ) : $\mu = \frac{1}{2} \ln \frac{(\rho + c)^2 + z^2}{(\rho - c)^2 + z^2}$, $\cos \theta = \frac{c h \mu - c \cdot sh \mu / \rho}{\rho}$, которые после подстановки в (7) дают возможность представить электростатический потенциал в виде функции переменных ρ, z (или в нашем случае $|x|$ и z). Очевидно, «потенци-

альная яма» внутри тора, не наблюдается. Поверхность $\tilde{U}(\sqrt{x^2 + y^2}, z)|_{y=0} = \tilde{U}(|x|, z)$ в области, близкой к центру тора, имеет седлообразную форму, изгибаясь в одной вертикальной плоскости (\tilde{U}, x) вниз, а в другой (\tilde{U}, z) — вверх (т. е. это своеобразная трехмерная точка перегиба).

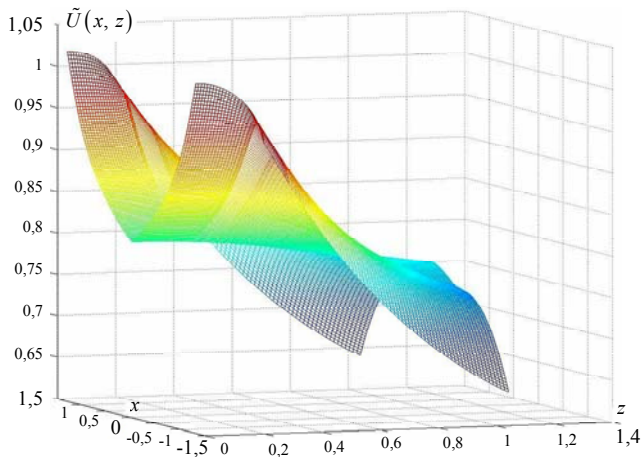


Рис. 3. 3D график безразмерного потенциала $\tilde{U}(x, z)$, создаваемого равномерно заряженным тором в вертикальной плоскости $y = 0$

Заключение

В работе в тороидальных координатах получены выражения для электростатического потенциала, создаваемого как проводящим тором с заданным значением потенциала на его поверхности, так и равномерно заряженным вдоль поверхности непроводящим тором. В первом случае потенциал представлен в виде бесконечной суммы произведений функций Лежандра первого и второго рода на гармонические функции, а во втором — приближённо выражен через полный эллиптический интеграл первого рода. Показано, что равномерно заряженный вдоль поверхности тор не может быть проводящим. Проанализировано распределение потенциала вдоль оси симмет-

рии тора, а также в плоскости его большого круга. Выведена формула, описывающая зависимость потенциала от координаты вдоль оси симметрии z : $\tilde{U}(z) = \tilde{U}(0, 0, z) = \bar{U}_0 / \sqrt{1 + z^2 / c^2}$. Ввиду того, что величина потенциала возрастает при удалении от центра в направлении к заряженной поверхности и в то же время убывает при движении из центра вдоль оси симметрии, «потенциальная яма» внутри тора не образуется. В центре тора ($x^2 + y^2 + z^2 = 0$) функция $\tilde{U}(z)$ достигает своего max, что противоречит наличию минимума функции $\tilde{U}(x, y, z)$ в той же точке.

В системе MatLab создан программный код для визуализации пространственного распределения электростатического потенциала во внешней области равномерно заряженного вдоль поверхности тора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. — М.: Физматгиз, 1963.
2. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.
3. Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Современная электродинамика. — Москва-Ижевск, 2002.
4. Ташаев Ю.Н. / Дизайн, технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности. Сборник материалов, Часть 2. — М., МГУДТ, 2014. С. 196.
5. Ташаев Ю. Н. / Инновационные технологии в текстильной и лёгкой промышленности. Сборник материалов, Республика Беларусь. г. Витебск УО ВГТУ, 2014. С. 295.
6. Шушкевич Г. Ч. // ЖТФ. 1997. Т. 67. № 4. С. 123.
7. Шушкевич Г. Ч. // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 5. С. 20.
8. Макуашев М. К., Байсиев Х.-М. Х. // УПФ. 2013. Т. 1. № 3. С. 268.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1974.
10. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. — М.: Физматгиз, 1963.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под. ред. М. Абрамовица, И. Стигана. — М.: Наука, 1979.
12. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. — М.: Издательство, 1952.

Modeling of the electrostatic field of the charged toroid

Y. N. Tashayev

Moscow State University of Design and Technologies
33 Sadovnichesky str., Moscow, 117997, Russia
E-mail: smcadmin@mail.ru

Received November 21, 2014

Electrostatic potential of a charged conducting torus is represented as a sum of products of Legendre functions on harmonic functions. The problem of the distribution of the electrostatic potential over the uniformly charged surface of the nonconducting torus is considered. Solution of the problem is reduced to the calculation of the surface integral and torus potential is expressed through an elliptic integral of the first sort.. The question of a "potential well" in the center of the torus is discussed.

PACS: 41.20.Cv

Keywords: electrostatic potential, toroidal coordinates, cylindrical coordinates, charged torus potential, Laplace equation, Fourier method, Legendre functions, elliptic integrals, visualisation of spatial distribution, Matlab.

REFERENCES

1. V. Panovsky and M. Fillips, *Classical Electrodynamics* (Fizmatgiz, Moscow, 1963) [in Russian].
2. J. Jecson, *Classical Electrodynamics* (Mir, Moscow, 1965) [in Russian].
3. V. V. Batygin and I. N. Toptygin, *Modern Electrodynamics* (Moscow-Izhevsk, 2002) [in Russian].
4. Yu. N. Tashaev, in *Proc. on Design, Technologies, Innovations in Textile and Light Industry. Part 2.* (MGUDT, Moscow, 2014), p. 196 [in Russian].
5. Yu. N. Tashaev, in *Proc. on Innovation Technologies in Textile and Light Industry* (Republic of Belarus, Vitebsk. 2014), p. 295 [in Russian].
6. G. Ch. Shushkevich, *Tech. Phys.* **67** (4), 123 (1997).
7. G. Ch. Shushkevich, *Tech. Phys.* **74** (5), 20 (2004).
8. M. K. Makuashev and Kh. –M. Beisiev, *Uspekhi Prikladnoi Fiziki* **1**, 268 (2013).
9. G. Korn and T. Korn, *Mathematical Handbook* (Mcgraw-Hill Book Company, New York-London, 1968; Nauka, Moscow, 1974).
10. N. N. Lebedev, *Special Functions and Its Applications* (Fizmatgiz, Moscow, 1963) [in Russian].
11. *Handbook on Special Functions.* Ed. M. Abramovits and I. Stigan (Nauka, Moscow, 1979) [in Russian].
12. E. V. Gobson, *Theory of Spherical and Ellipsoidal Functions* (Izdantinlit, Moscow, 1952) [in Russian].