

УДК 533.9.01.15

Нанофокусировка света на вершине металлического острия

А. Б. Петрин

Рассмотрена нанофокусировка поверхностной плазмонной волны на вершине наноострия с учетом поглощения в металле. Граница металла вблизи вершины приближается поверхностью параболоида вращения. Приведены расчеты распределений поля на вершинах нанострий из хорошо проводящих металлов в оптическом диапазоне. Найдены параметры, влияющие на нанофокусировку.

PACS: 78.67.-n; 68.37.Uv; 73.20.Mf

Ключевые слова: нанофокусировка, поверхностные плазмоны, плазмонный волновод.

Введение

Важнейшим для приложений явлением, позволяющим осуществить нанофокусировку световой энергии, является необычайно резкое возрастание интенсивности поверхностной плазмонно-поляритонной волны, симметрично возбуждаемой в основании металлического конического микроострия, при ее схождении к нановершине [1—3]. Это явление обусловлено тем, что на геометрически идеальном металлическом острие может существовать осесимметричная электромагнитная стоячая волна с сингулярностью электрического поля на вершине. Как показывают эксперименты, эта волна может эффективно возбуждаться сходящейся к вершине поверхностной плазмонно-поляритонной волной с той же осевой симметрией поля. Наличие сингулярности электрического поля хорошо объясняется в квазистатическом приближении, которое выполняется в окрестности конического металлического наноострия [4, 5], в том числе, при касании вершиной плоской диэлектрической поверхности [6].

Однако идеального конического острия не бывает в природе, т. е. вершина наноострия в экспериментах [1] имеет пусть и малый, но конечный радиус закругления. Теория, построенная для идеального конического острия, хотя и объясняет нанофокусировку, но не дает ответа на вопрос о структуре электромагнитного поля в окрестности закругленной нановершины.

В работе [7] были определены сфокусированные поля в окрестности нановершины металличе-

ского микроострия, граница которого приближалась осесимметричным параболоидом вращения. При этом считалось, что диэлектрическая проницаемость металла описывалась формулой Друде без потерь. Оказалось, что геометрические размеры фокального распределения электрического поля в окрестности нановершины микроострия в пространственных координатах, нормированных на радиус кривизны нановершины, определяется только отношением частоты фокусируемых плазмонов к плазменной частоте металла.

В данной работе явление рассматривается с учетом потерь в металле и обсуждаются, обусловленные этим, принципиальные ограничения на данный метод нанофокусировки.

Постановка задачи

Рассмотрим металлическое острие, поверхность которого вблизи вершины представляется осесимметричным параболоидом вращения (см. рис. 1).

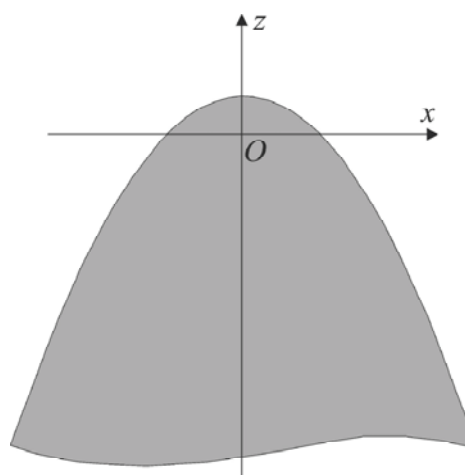


Рис. 1. Геометрия задачи

Введем параболоидальные координаты (систему параболических координат вращения) (α, β, ψ) ,

Петрин Андрей Борисович, ведущий научный сотрудник. Обьединенный институт высоких температур РАН (ИВТАН). Россия, 125412, Москва, ул. Ижорская, 13, строение 2. Тел. 8 (495) 362-53-10. E-mail: a_petrin@mail.ru

Статья поступила в редакцию 23 марта 2015 г.

© Петрин А. Б., 2015

которые связаны с прямоугольными декартовыми координатами (x, y, z) формулами:

$$x = c\alpha\beta \cos \psi, \quad y = c\alpha\beta \sin \psi, \quad z = \frac{1}{2}c(\beta^2 - \alpha^2), \quad (1)$$

где c — масштабный постоянный множитель.

Найдем электрическое поле вблизи вершины острия в квазистатической формулировке. Будем предполагать комплексное представление гармонических электромагнитных полей с зависимостью от времени $e^{i\omega t}$, где ω — циклическая частота изменения поля. Пусть комплексная диэлектрическая проницаемость металла острия равна ε_m , а внешняя однородная среда на той же частоте имеет диэлектрическую проницаемость ε_d . В квазистатической формулировке потенциал электрического поля должен удовлетворять уравнению Лапласа, а нормальные и тангенциальные составляющие электрического поля на границе раздела острия (параболоида вращения $\beta = \beta_0$) должны соответствовать условиям:

$$E_{d,\tau} = E_{m,\tau} \quad \text{и} \quad \varepsilon_d E_{d,n} = \varepsilon_m E_{m,n}. \quad (2)$$

Из (1) следует, что граница острия $\beta = \beta_0$ в координатах (x, y, z) определяется формулой:

$$z = \frac{c\beta_0^2}{2} - \frac{1}{2c\beta_0^2}(x^2 + y^2). \quad (3)$$

Несложно показать, что радиус кривизны вершины острия равен $R = c\beta_0^2$ и формула (3) может быть переписана в виде $z = R/2 - (x^2 + y^2)/2R$.

В параболидальной системе координат с началом в точке O и осью z (рис. 1) уравнение Лапласа для электрического потенциала Φ при аксиальной симметрии (Φ не зависит от ψ) можно записать следующим образом [8]:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c^2(\alpha^2 + \beta^2)} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} \right) = 0.$$

Общее решение этого уравнения известно [8] и определяется выражением

$$\Phi = \sum (B_1 J_0(p\alpha) + B_2 Y_0(p\alpha)) (C_1 I_0(p\beta) + C_2 K_0(p\beta)).$$

где p, B_1, B_2, C_1, C_2 — константы; J_0, Y_0 — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка; I_0, K_0 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка. Суммирование производится по всем решениям, удовлетворяющим граничным условиям задачи.

Будем искать решение граничной задачи для сфокусированного на острие поля, предполагая, что потенциалы электрического поля снаружи ($\beta \geq \beta_0$) и внутри ($\beta \leq \beta_0$) границы металлического острия имеют вид соответственно

$$\begin{aligned} \Phi_d &= AJ_0(p\alpha)K_0(p\beta), \\ \Phi_m &= BJ_0(p\alpha)I_0(p\beta), \end{aligned} \quad (4)$$

где A и B — константы.

Такой выбор функциональных зависимостей обусловлен следующими естественными требованиями к сконцентрированному у вершины полю:

а) снаружи острия потенциал поля должен уменьшаться при удалении от его поверхности, быть конечным и максимальным на вершине острия.

б) внутри металла острия потенциал должен быть конечным в начале координат. Кроме того, электрический потенциал должен быть непрерывен при переходе через границу.

Тогда составляющие поля снаружи и внутри острия равны соответственно

$$\begin{aligned} E_{d,\tau} &= -\frac{1}{c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{\partial\Phi_d}{\partial\alpha} = \\ &= -\frac{1}{c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} AK_0(p\beta) pJ'_0(p\alpha), \\ E_{d,n} &= -\frac{1}{c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{\partial\Phi_d}{\partial\beta} = \\ &= -\frac{1}{c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} AJ_0(p\alpha) pK'_0(p\beta), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} E_{m,\tau} &= -\frac{1}{c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{\partial\Phi_m}{\partial\alpha} = \\ &= -\frac{1}{c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} BI_0(p\beta) pJ'_0(p\alpha), \\ E_{m,n} &= -\frac{1}{c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{\partial\Phi_m}{\partial\beta} = \\ &= -\frac{1}{c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} BJ_0(p\alpha) pI'_0(p\beta), \end{aligned}$$

где штрих обозначает дифференцирование по аргументу функции.

На поверхности острия (при $\beta = \beta_0$) должны удовлетворяться граничные условия (2), из которых получим систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} -AK_0(p\beta_0) + BI_0(p\beta_0) &= 0, \\ -\varepsilon_d AK'_0(p\beta_0) + \varepsilon_m BI'_0(p\beta_0) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Нетривиальное решение будет существовать, когда определитель системы равен нулю

$$\varepsilon_d I_0(p\beta_0) K'_0(p\beta_0) - \varepsilon_m K_0(p\beta_0) I'_0(p\beta_0) = 0.$$

Учитывая, что $I'_0(q) = I_1(q)$ и $K'_0(q) = -K_1(q)$, где $q = p\beta_0$, условие существования решения можно переписать в виде

$$\varepsilon_d I_0(q) K_1(q) + \varepsilon_m K_0(q) I_1(q) = 0. \quad (6)$$

Пусть диэлектрические проницаемости металла и окружающего диэлектрика заданы. Тогда уравнение (6) определяет некоторое значение $q_* = p_*\beta_0$ (следовательно, и $p_* = q_*/\beta_0$), которое полностью определяет по формулам (4) вариацию электрического потенциала в окрестности рассматриваемого острия (соотношения между константами A и B находятся из (5) для полученного $q_* = p_*\beta_0$).

Найдем распределение потенциала во всем пространстве. Выражая из первого уравнения (5) константу B через A и подставляя в (4), с точностью до постоянного множителя найдем электрический потенциал Φ внутри и снаружи острия

$$\Phi(\alpha, \beta) = \begin{cases} J_0(q_* \alpha/\beta_0) K_0(q_* \beta/\beta_0), & \beta \geq \beta_0, \\ [K_0(q_*)/I_0(q_*)] J_0(q_* \alpha/\beta_0) I_0(q_* \beta/\beta_0), & \beta \leq \beta_0. \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим распределение потенциала в плоскости симметрии задачи (x, z) . Ограничимся положительными значениями x , α и β , тогда

$$\Phi(\tilde{x}, \tilde{z}) = \begin{cases} J_0\left(q_* \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}\right) K_0\left(q_* \frac{|\tilde{x}|}{\sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}}\right), & \frac{|\tilde{x}|}{\sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}} \geq 1, \\ \left[\frac{K_0(q_*)}{I_0(q_*)}\right] J_0\left(q_* \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}\right) I_0\left(q_* \frac{|\tilde{x}|}{\sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}}\right), & \frac{|\tilde{x}|}{\sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}} \leq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Полученное распределение решает задачу нахождения потенциала в окрестности нановоршины металлического острия с точностью до константы.

Распределение поля в окрестности нановоршины с учетом и без учета потерь в металле

Диэлектрическая проницаемость металла без учета потерь приближенно описывается формулой Друде $\varepsilon_m = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, где ω — циклическая час-

$$x = c\alpha\beta, z = \frac{1}{2}c(\beta^2 - \alpha^2),$$

и мы получаем значения:

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{x_*^2 + z_*^2} - z_*}, \beta = x_*/\sqrt{\sqrt{x_*^2 + z_*^2} - z_*},$$

где $x_* = x/c$, $z_* = z/c$.

Так как координаты вершины острия равны $(0, z_0)$, где $z_0 = R/2$ (R — радиус кривизны параболической вершины острия), то имеем следующее выражение:

$$\beta_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x/c}{\sqrt{\sqrt{(x/c)^2 + (z_0/c)^2} - (z_0/c)}} \right) = \frac{\sqrt{2z_0}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{c}}.$$

Вводя декартовы координаты, нормированные на радиус кривизны вершины острия, $\tilde{x} = x/R$, $\tilde{z} = z/R$, получим

$$\alpha/\beta_0 = \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}, \beta/\beta_0 = \tilde{x}/\sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}.$$

В результате, с учетом осевой симметрии, распределение потенциала (7) в окрестности острия будет выражаться в нормированных декартовых координатах следующей формулой:

тота, ω_p — плазменная частота металла. Более точная формула для диэлектрической проницаемости металла с учетом потерь приближенно описывается формулой Друде с потерями $\varepsilon_m = 1 - \omega_p^2/(\omega^2 + i\omega\Gamma)$, где Γ — коэффициент, учитывающий потери. Например, для серебра [9] $\omega_p \approx 1.36 \times 10^{16} \text{ c}^{-1}$, $\Gamma \approx 2 \times 10^{14} \text{ c}^{-1}$. Тогда уравнение (6) можно переписать для металлического острия, граничащего с вакуумом, в следующем виде:

$$I_0(q)K_1(q) + \left(1 - \frac{1}{\varpi^2 + i\varpi\gamma}\right) K_0(q)I_1(q) = 0, \quad (9)$$

где $\varpi = \omega/\omega_p$ — циклическая частота поля, нормированная на плазменную частоту; $\gamma = \Gamma/\omega_p$ — коэффициент поглощения, нормированный на плазменную частоту. Формуле Друде без потерь соответствует в (9) значение $\gamma = 0$.

Вычисления показали, что на частотах, меньших $\omega_p/\sqrt{2}$ — частоты существования поверхностных плазмонов, в случае отсутствия потерь ($\gamma = 0$), решение q уравнения (9) единственно и чисто действительно. В этом случае специальные функции, входящие в (9), можно рассматривать как функции действительного переменного. В случае наличия потерь ($\gamma \neq 0$), решение уравнения также единственное, но уже комплексное. Для численного нахождения комплексного решения (9) специальные функции в (9) необходимо аналитически продолжить на комплексную плоскость. Это можно сделать с использованием следующих известных интегральных представлений специальных функций:

$$I_n(q) = \frac{1}{\pi_0} \int_0^\pi \cos(n\theta) e^{q \cos \theta} d\theta$$

$$K_n(q) = \int_0^\infty ch(n\theta) e^{-qch\theta} d\theta.$$

Из (9) видно (подробности в работе [7]), что для металла без потерь ($\gamma = 0$) размер области максимума распределения поля на вершине наноострия (фокального пятна), выраженного в единицах радиуса кривизны нановершины, зависит только от нормированной частоты ϖ . Чем ближе ϖ к нормированной критической частоте существования поверхностных плазмонов на плоской поверхности металла $\varpi_c = 1/\sqrt{2}$, тем размер фокального пятна меньше. Этот фундаментально важный результат является доказательством того, что, уменьшая радиус закругления нановершины, можно сфокусировать световую энергию в нанобласть, размеры которой много меньше длины световой волны.

Особо отметим, что в пределе $\varpi \rightarrow (1/\sqrt{2})_{-0}$ решение уравнения (9) стремится к бесконечности ($q \rightarrow +\infty$), а при $\varpi > 1/\sqrt{2}$ решения (9) не существует. Такая же ситуация наблюдалась при нахождении сингулярного решения при рассмотрении идеального металлического конического острия в работах [4, 5]. Оказалось, что сингулярное решение существует только при $\varpi < 1/\sqrt{2}$, а при

$\varpi > 1/\sqrt{2}$ его нет. Тот факт, что критическая частота $\varpi_c = 1/\sqrt{2}$ равна максимальной критической частоте существования поверхностных плазмонов на плоской поверхности металла, заставляет сделать вывод, что явление нанофокусировки на вершине металлического наноострия фундаментально связано именно с фокусировкой поверхностной плазмонной волны.

В случае наличия потерь ($\gamma \neq 0$), указанный нормированный размер области максимума распределения поля на вершине наноострия будет уже функцией двух параметров $\varpi = \omega/\omega_p$ и $\gamma = \Gamma/\omega_p$.

Понять влияние параметра γ на фокальное распределение потенциала можно, если, зафиксировав ϖ , найти по формуле (9) распределение электрического потенциала в окрестности нановершины для различных значений параметра γ . Такие вычисления были проведены для частоты $\varpi = 0,62252$, при которой (в отсутствие потерь) радиус фокального распределения примерно равен радиусу кривизны нановершины (см. [7]). Оказалось, что с увеличением γ фокальное пятно на вершине постепенно расплывается, а величина главного максимума падает по сравнению с боковыми максимумами. То есть с ростом γ фокусирующие свойства ухудшаются. Тем не менее, расчеты показали, что распределение вблизи вершины практически не меняется, если $\gamma \leq 2\gamma_{Ag}$, где $\gamma_{Ag} = 0,01471$ — коэффициент потерь в серебре.

В качестве иллюстрации на рис. 2 показано распределение модуля комплексного потенциала $|\Phi(\tilde{x}, \tilde{z})|$, вычисленное по формуле (9), в окрестности нановершины для $\varpi = 0,62252$ и $\gamma = \gamma_{Ag}$. Распределение нормировано на единицу в максимуме. Распределение осесимметричное, поэтому показано распределение только при $\tilde{x} \geq 0$. Размер главного максимума, а также относительная величина боковых максимумов для серебряной нановершины практически такие же, как и для случая отсутствия потерь (см. [7]). Отметим, что в случае серебра частота $\varpi = 0,62252$ соответствует длине волны в вакууме $\lambda_0 = 222,5$ нм, что соответствует ультрафиолетовой области спектра.

Сравнивая результаты развитой теории с экспериментами [1], заметим, что в работе [1] использовалось излучение с длиной волны $\lambda_0 = 532$ нм. Для серебряного острия этой длины волны соответствует значительно меньшая нормированная частота $\varpi = 0,26053$. В таком случае распределение модуля потенциала в окрестности нановершины (с учетом поглощения) показано на рис. 3.

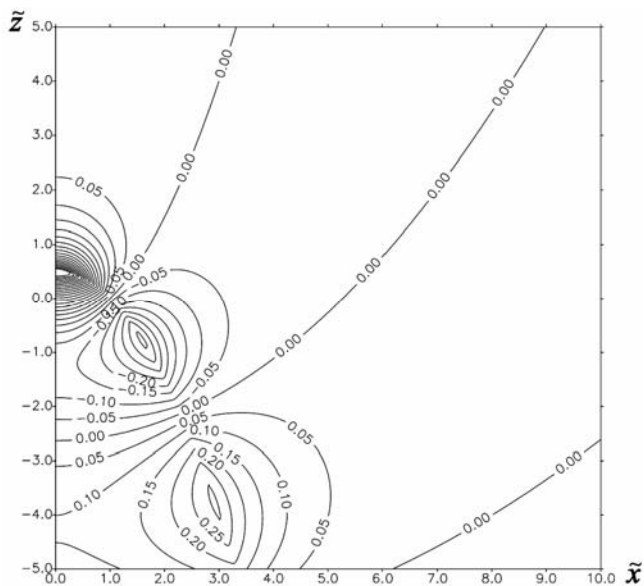


Рис. 2. Распределение модуля комплексного потенциала $|\Phi(\tilde{x}, \tilde{z})|$, вычисленное по формуле (9), в окрестности серебряной нановершины для $\varpi = 0,62252$ и $\gamma = \gamma_{Ag} = 0,01471$. Распределение нормировано на единицу в максимуме, а координаты \tilde{x} и \tilde{z} нормированы на радиус кривизны нановершины

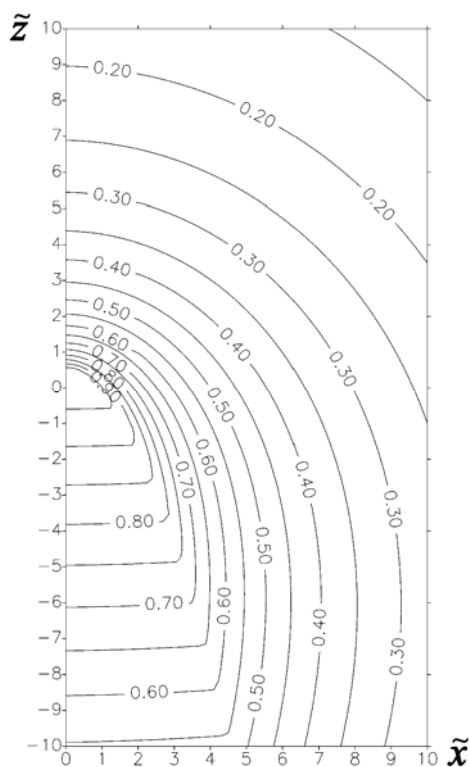


Рис. 3. Распределение модуля комплексного потенциала $|\Phi(\tilde{x}, \tilde{z})|$, вычисленное по формуле (9), в окрестности серебряной нановершины для значений $\gamma = \gamma_{Ag} = 0,01471$, $\varpi = 0,26053$. Распределение нормировано на единицу в максимуме, а координаты \tilde{x} и \tilde{z} нормированы на радиус кривизны нановершины

В этом случае распределение модуля комплексного потенциала в окрестности нановершины медленно меняется внутри металла вдоль оси симметрии нанострия, и качественно распределение близко к статическому распределению потенциала у нановершины. Из рис. 3 отчетливо видно, что и на этой низкой частоте наблюдается нанофокусировка света, то есть размер фокальной области определяется радиусом закругления вершины, а не длиной волны света.

Заключение

Рассмотрена нанофокусировка поверхностной плазмонной волны на нановершине металлического микроострия, граница которого вблизи нановершины приближается поверхностью параболоида вращения. Найдены параметры, определяющие размер фокальной области. Показано, что, поглощение в хорошо проводящем металле микроострия, например, таком как серебро, практически не влияет на размеры фокального распределения в окрестности нановершины вплоть до частот порядка $\omega \sim 0,623\omega_p$.

Развитая теория позволяет выбрать оптимальные, с точки зрения приложений, параметры нанофокусировки, что имеет ключевое значение при разработке устройств нанооптики.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Angelis F. et al. // Nature Nanotech. 2010. V. 5. P. 67.
2. Frey H. G., Keilmann F., Kriele A., et al. // Appl. Phys. Lett. 2002. V. 81. P. 5030.
3. Stockman M. I. // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 137404.
4. Petrin A. // J. Nanoelectron. Optoelectron. 2010. V. 5. P. 310.
5. Petrin A. // High Temperature. 2012. V. 50. No. 1. P. 15.
6. Petrin A. Nanofocusing of Surface Plasmons at the Apex of Metallic Tips and at the Sharp Metallic Wedges. Importance of Electric Field Singularity, Wave Propagation, Andrey Petrin (Ed.). ISBN: 978-953-307-275-3. InTech. 2011.
7. Петрин А. Б. // Квантовая электроника. 2015. (принята в печать).
8. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука, 1967.
9. Fox M. Optical Properties of Solids. — N.Y.: Oxford University Press Inc., 2003.

On the nanofocusing of light at the apex of the metal tip

A. B. Petrin

Institute for High Temperatures (IVTAN)
2 bild., 13 Izhorskaya str., Moscow, 125412, Russia
E-mail: a_petrin@mail.ru

Received March 23, 2015

The nanofocusing of the surface plasmonic wave at the apex of the metal nanotip with taking into account the absorption in the metal is considered. The apex of the nanotip is approximated by the surface of the paraboloid of revolution. The electric field distributions in the vicinity of the apices of highly conductive metallic nanotips in the optical range are investigated. The parameters determined the nanofocusing are found.

PACS: 78.67.-n; 68.37.Uv; 73.20.Mf

Keywords: nanofocusing, surface plasmons, plasmonic waveguide.

REFERENCES

1. F. De Angelis et al., *Nature Nanotech.* **5**, 67 (2010).
2. H. G. Frey, F. Keilmann, A. Kriele, et al., *Appl. Phys. Lett.* **81**, 5030 (2002).
3. M. I. Stockman, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 137404 (2004).
4. A. Petrin, *J. Nanoelectron. Optoelectron.* **5**, 310 (2010).
5. A. Petrin, *High Temperature.* **50**, 15 (2012).
6. A. Petrin, *Nanofocusing of Surface Plasmons at the Apex of Metallic Tips and at the Sharp Metallic Wedges. Importance of Electric Field Singularity, Wave Propagation*, Ed. Andrey Petrin. (ISBN: 978-953-307-275-3. InTech. 2011).
7. A. B. Petrin, *Quantum Electronics* (2015, in the press).
8. A. Ango, *Mathematics for Electro and Radio Engineers* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].
9. M. Fox, *Optical Properties of Solids*. (N.Y.: Oxford University Press Inc., 2003).

* * *