ОБЩАЯ ФИЗИКА

УДК 537.52

О температурном поле газа, движущегося в цилиндрическом канале при наличии неравномерно распределенных по осевой координате внутренних источников тепла

А. В. Герасимов, А. П. Кирпичников, Л. А. Рачевский

Расчет температурного поля движущегося газа с внутренним источником тепла обобщается на случай неравномерного распределения источников тепла. Осесимметричное распределение в зоне внутреннего тепловыделения аппроксимируется набором сегментов различной длины по осевой координате, в каждом из которых плотность мощности полагается постоянной, а радиальная функция источника — специфической только для этого сегмента. Таким образом, газ последовательно проходит N+2 зоны: входную $z < 0$, выходную $z > 1$ и зону внутреннего тепловыделения $0 \le z \le l$, представленную N сегментами. Полученные аналитические решения позволяют рассчитать тепловой баланс для широкого класса задач, особенностью которых является обдув и неравномерное распределение источников тепла по осевой координате.

PACS: 52.80.Pi

Ключевые слова: неравномерное распределение источников, конвективный теплообмен, движущийся газ, внутренний источник, температура, краевая задача.

Введение

Прямое численное моделирование процессов нагрева потоков газа, с внутренними источниками тепла различной физической природы является исключительно трудоёмкой проблемой. Желание построить адекватную математическую модель упомянутых процессов приводит к необходимости численного решения уравнений гидродинамики, что в свою очередь ставит ряд дополнительных вопросов, связанных с нелинейностью системы, её замыканием, выбором конечно-разностной схемы, граничных условий и так далее. К сожалению, пока не существует универсальных рекомендаций по разрешению данного круга вопросов. В многочисленных публикациях (например, [1—3]) рассмотрены лишь различные частные случаи — способы решения этой проблемы.

Герасимов Александр Викторович, профессор.
Кирпичников Александр Петрович, заведующий кафедрой.
Рачевский Леонид Александрович, доцент.
Казанский национальный исследовательский технологический университет.
Россия, 420015, г. Казань, ул. Карла Маркса, 68.
Тел. (843) 231-41-88.
E-mail: gerasimov@kstu.ru; kirpichnikov@kstu.ru; rachevsky@gmail.com

Статья поступила в редакцию 12 апреля 2016 г.

Наиболее удачными среди них следует, по-видимому, считать те исследования, в которых с наименьшими математическими затратами (простота модели и программной реализации) удавалось адекватно описать данный процесс. Актуальность такого рода работ очевидна, поскольку они дают специалистам по энергетике и технологии инструмент для поиска оптимальных режимов эксплуатации соответствующих энергоустановок.

При этом неизменно остается своеобразная «ниша» для достаточно простых аналитических методов исследования (в том случае, конечно, когда они дают корректную качественную и количественную картину явления). Причина этого состоит в том, что детальное численное моделирование, даже тогда когда оно возможно, как правило, представляет собой весьма трудоемкую научную проблему, которая оказывается по силам лишь специалистам-профессионалам. В то же время на практике часто возникает потребность в проведении инженерных оценок, модельных расчетах, а также в экспресс-анализе характеристик теплообмена в сложных системах с малоизвестной физикой процессов, которые могут быть выполнены только при наличии достаточно простых аналитических зависимостей.

Большинство теоретических исследований конвективного теплообмена в движущемся газе с внутренним источником тепла [1—6] ограничивались решением уравнения баланса энергии лишь для области внутреннего тепловыделения. При этом данная область полагалась неограниченной в направлении течения газа. В статье [7] была предпринята попытка избежать значительных ошибок в определении температуры газа, особенно для относительно коротких областей. Распределение источников тепла по осевой координате в области внутреннего тепловыделения считалось равномерным, что является довольно сильным ограничением для адекватного описания реальности.

В данной работе авторы предлагают ослабить указанное ограничение и аппроксимировать распределение источников тепла, разбив область внутреннего тепловыделения на N сегментов различной длины, каждый из которых имеет свою плотность мощности q_{vk} и радиальный профиль $F_k(r)$, где k — индекс сегмента. Очевидно, требуемую точность можно обеспечить, увеличивая количество сегментов N.

Уравнения

Как и в [7, 8], считаем физические свойства газа постоянными в первом приближении и равными некоторым средним для рассматриваемого интервала температур величинам. Процессы колебательной релаксации не рассматриваются, т. к. газ считается одноатомным. Осесимметричное распределение внутренних источников тепла в канале представлено на рис. 1 и описывается функцией $E(r, z)$:

$$E(r,z)=\begin{cases}0, \quad z<0, \quad z>\dfrac{L}{R}\\ F_k(r)\cdot q_{v_k}, \quad z_{k-1}\le z\le z_k\end{cases}$$

где z_k — узлы, определяющие сегменты по осевой координате, на которые разбита область внутреннего тепловыделения.

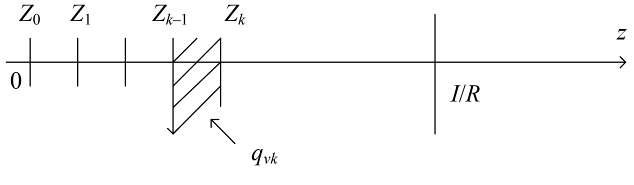

Рис. 1. Область внутреннего тепловыделения (слои с различными значениями мощности тепловыделения).

Через U обозначено значение скорости, полученное усреднением по радиальной координате осредненной по времени осевой компоненты вектора скорости.

С учетом сделанных допущений процесс конвективного теплообмена в рассматриваемой системе описывается дифференциальными уравнениями:

$$\begin{gathered}\mathrm{Pe}\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2};\\ z<0, \quad z>\frac{l}{R};\\ \mathrm{Pe}\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+\frac{q_{v_k}R^2}{\lambda}F_k(r);\\ 0<z\le\frac{l}{R}.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\mathrm{Pe}=\dfrac{UR}{a}$ — число Пекле; $\theta=T-T_W$, где T_W — температура на стенке; a и λ — коэффициенты температуропроводности и теплопроводности соответственно; q_{vk} — плотность мощности тепловыделения на оси канала внутри k-го сегмента. Температура газа на стенке T_W считается постоянной, а ее профиль в радиальном направлении симметричным.

Кроме этого накладываются условия непрерывности величин T и $\dfrac{\partial T}{\partial z}$ на границах сегментов.

Метод решения

Произвольная (радиальная) функция источника $F_k(r)$ может быть разложена в ряд Фурье-Бесселя по функциям $J_0(\mu_i r)$, $0\le r\le 1$, где μ_i — i-ый корень уравнения $J_0(x)=0$.

Другими словами,

$$F_k(r)=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ik}J_0(\mu_i r)$$

где

$$a_{ik}=\frac{1}{J_1^2(\mu_i)}\int_0^1 F_k(r)J_0(\mu_i r)rdr.$$

Отыскиваем функцию распределения избыточной температуры $\theta(r,z)$ в виде формулы:

$$\theta(r,z)=\sum_{i=1}f_i(z)J_0(\mu_i r). \tag{2}$$

По аналогии с [7], применим метод Канторовича-Галеркина [9] к уравнениям конвективного теплообмена (1), т. е. скалярно умножим указанные уравнения на базисные функции $J_0(\mu_i r)$. В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} Pe\times f_i'(z) = -\mu_i^2 f_i(z) + f_i''(z), \\ z<0, \quad z>l/R \\ Pe\times f_i'(z) = -\mu_i^2 f_i(z) + f_i''(z) + \dfrac{q_{v_k}R^2}{\lambda}\times a_{ik}, \\ z_{k-1}\le z\le z_k \end{cases} \qquad (3)$$

где a_{ik} — коэффициенты разложения радиальной функции источника $F_k(r)$ в каждом из сегментов $k = 1, 2, ... n$.

Очевидно, что первое уравнение системы (3) может быть записано в той же форме, что и второе, если ввести обозначения q_{v0} и q_{vN+1}, описывающие плотности мощности тепловыделения во входной и выходной зонах соответственно. При этом $q_{v0} = q_{vN+1} = 0$, $k = 0, 1, ... n, n + 1$.

Обозначим для простоты $f_i(z)$ как $f(z)$, μ_i как μ, а последнее слагаемое (источник) во втором уравнении системы (3) как S_k, т. е.

$$S_v = \frac{q_{v_k}R^2}{\lambda}\times a_{ik}.$$

Тогда второе уравнение системы (3) примет вид

$$f'' - \mu f - Pe\times f' + S_k = 0 \qquad (4)$$

где $S_0 = S_{n+1} = 0$, $S_k = \mathrm{const}$ в интервале $z\in[z_{k-1}, z_k]$. Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$f(z) = A_k e^{\alpha z} + B_k e^{\beta z} + \frac{S_k}{\mu^2},$$

где

$$\alpha = \frac{Pe + \sqrt{Pe^2 + 4\mu^2}}{2} > 0 \qquad (5)$$

$$\beta = \frac{Pe - \sqrt{Pe^2 + 4\mu^2}}{2} < 0. \qquad (6)$$

Неизвестными являются A_k и B_k. Определим их из условий "сшивания" $f(z)$ и $f'(z)$ в узлах z_k:

$$\begin{cases} A_k e^{\alpha z} + B_k e^{\beta z} + \dfrac{S_k}{\mu^2} = A_{k+1}e^{\alpha z} + B_{k+1}e^{\beta z} + \dfrac{S_{k+1}}{\mu^2} \\ \alpha A_k e^{\alpha z} + \beta B_k e^{\beta z} = \alpha A_{k+1}e^{\alpha z} + \beta B_{k+1}e^{\beta z} \end{cases}. \qquad (7)$$

Введем обозначения: $\Delta A_{k+1} = A_{k+1} - A_k$, $\Delta B_{k+1} = B_{k+1} - B_k$. Тогда система линейных алгебраических уравнений принимает вид

$$\begin{cases} e^{\alpha z}\Delta A_{k+1} + e^{\beta z}\Delta B_{k+1} = \dfrac{S_k - S_{k+1}}{\mu^2} \\ \alpha e^{\alpha z}\Delta A_{k+1} + \beta e^{\beta z}\Delta B_{k+1} = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

и легко решается относительно ΔA_{k+1} и ΔB_{k+1}.

В результате имеем следующие выражения:

$$\Delta A_{k+1} = \frac{\beta}{\beta-\alpha}\cdot\frac{S_k - S_{k+1}}{\mu^2\cdot e^{\alpha Z_k}}$$

и

$$\Delta B_{k+1} = \frac{\beta}{\alpha-\beta}\cdot\frac{S_k - S_{k+1}}{\mu^2\cdot e^{\beta Z_k}}.$$

Остается получить A_k и A_{k+1} из ΔA_{k+1} и B_k и B_{k+1} из ΔB_{k+1}. Из выражений (5) для α и (6) для β очевидно, что последние имеют вещественные и противоположные по знаку значения. Для определенности будем считать, что справедливы неравенства:

$$\left[\begin{array}{l} \alpha>0 \\ \beta<0 \end{array}\right..$$

Заметим, что в области $z<z_0=0$ и $z>z_n=\dfrac{l}{R}$ у нас исчезает по одному из неизвестных. В противном случае функция $f(z)$ стремилась бы к бесконечности, что, разумеется, лишено физического смысла.

Итак, из

$$f(z) = A_0 e^{\alpha z} + B_0 e^{\beta z} + \frac{S_0}{\mu_2} = 0, \quad z<z_0=0$$

следует $B_0 = 0$.

Аналогично из

$$f(z) = A_{n+1}e^{\alpha z} + B_{n+1}e^{\beta z} + \frac{S_{n+1}}{\mu_2} = 0, \quad z>z_n=\frac{l}{R}$$

следует $A_{n+1} = 0$.

Используя рекуррентные соотношения

$$A_k = A_{k+1} - \Delta A_{k+1}$$

и

$$B_{k+1} = B_k + \Delta B_{k+1},$$

а также начальные значения $A_n = -\Delta A_{n+1}$, т. к. $A_{n+1}=0$, ΔA_{n+1} известны и $\Delta B_1 = B_1 - B_0 = B_1 - 0 = B_1$, получаем окончательное решение поставленной задачи (2).

Очевидно, что приведенные выше соотношения легко сводятся к полученным в [7] при $n = 1$, т. е. когда область внутреннего тепловыделения — однородна. Однако представленная здесь модель позволяет рассчитать влияние неоднородности распределения источников тепла на температурный профиль при наличии ($Pe \neq 0$) и отсутствии потока газа ($Pe = 0$).

Заключение

В данной работе расчет температурного поля движущегося газа с внутренним источником тепла обобщается на случай неравномерного распределения источников тепла.

Рассмотренный подход представляется перспективным, т. к., во-первых, позволяет аппроксимировать достаточно широкий класс функций распределения источников тепла, т. е. учитывать неоднородность области внутреннего тепловыделения при расчетах локального и интегрального баланса энергии газа при ламинарном, а также турбулентном режимах течения в цилиндрическом канале. Во-вторых, позволяет исследовать обратную (синтетическую) задачу, т. е. вопрос о том, каким должно быть распределение источников тепла для синтеза температурного профиля с заданной точностью. Использованный нами подход дает возможность решить также связанную задачу об оптимизации энерговклада, т. е. ответить на вопрос о том, каким образом расположить источники тепла для того, чтобы получить желаемое распределение температур в области, представляющей максимальный интерес, например, в зоне химической реакции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуков М. Ф., Смоляков В. И., Урюков Б. А.* Электродуговые нагреватели газа. — Новосибирск: Наука. 1973.
2. *Слетери Дж. С.* Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах. — М.: Энергия, 1978.
3. *Сергеев В. Л.* Генераторы низкотемпературной плазмы. — Минск, 1986. С. 19.
4. *Герасимов А. В., Кирпичников А. П.* // Доклады Академии Наук. 2003. Т. 389. № 2. С. 177.
5. *Gerasimov A. V., Kirpichnikov A. P., Rachevsky L. A.* // Thermal Science. 2005. Vol. 9. No. 1. P. 131.
6. *Герасимов А. В., Кирпичников А. П.* // Теплофизика и аэромеханика. 2013. № 4. С. 439.
7. *Герасимов А. В., Кирпичников А. П., Рачевский Л. А.* // Успехи прикладной физики. 2013. Т. 1. № 1. С. 30.
8. *Gerasimov A. V., Kirpichnikov A. P., Rachevsky L. A.* // Thermal Science. 2015. No. 2. P. 735.
9. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. — М.-Л.: Гостехиздат. 1949.

About a temperature field of the gas moving in a cylindrical channel in presence of internal heat sources unevenly distributed on an axial coordinate

A. V. Gerasimov, A. P. Kirpichnikov, and L. A. Rachevskiy

Kazan National Research Technological University
68 Karl Marx str., Kazan, 420015, Russia
E-mail: gerasimov@kstu.ru; kirpichnikov@kstu.ru; rachevsky@gmail.com

Received April 12, 2016

Calculation of the temperature field of a moving strip with internal heat source is generalized to the case of uneven distribution of heat sources. The axisymmetric distribution in the zone of internal heat release is approximated by a set of segments of different lengths on the axial coordinate, in each of which the power density is assumed to be constant, and the radial source function is specific only for this segment. Thus, the gas sequentially passes through $N + 2$: input $z < 0$, and the output area, internal heat dissipation, represented by N segments. The obtained analytical solutions allow to calculate a heat balance for the wide class of problems, the feature of which is the blowout and the uneven distribution of heat along the axial coordinate.

PACS: 52.80.Pi

Keywords: non-uniform distribution of sources, convective heat transfer, moving gas, internal source, temperature, boundary value problem.

REFERENCES

1. M. F. Zhukov, V. J. Smolyakov, and B. A. Uryukov, *Electroarc Heaters of Gas* (Nauka, Moscow, 1973) [in Russian].
2. J. C. Slattery, *Momentum, Energy and Mass Transfer in Continua* (Energiya, Moscow, 1978) [in Russian].
3. V. L. Sergeev, in Proceedings of 10th Union Conference on Low-Temperature Plasma Generators, (Minsk, USSR, 1986), pp. 19–20.
4. A. V. Gerasimov and A. P. Kirpichnikov, Doklady Physics **389** (2), 177 (2003).
5. A. V. Gerasimov, A. P. Kirpichnikov, and L. A. Rachevsky, Thermal Science **9** (1), 131 (2005).
6. A. V. Gerasimov and A. P. Kirpichnikov, Thermophysics and Aeromechanics, No. 4, 439 (2013).
7. A. V. Gerasimov, A. P. Kirpichnikov, and L. A. Rachevsky, Uspekhi Prikladnoi Fiziki **1** (1), 30 (2013).
8. A. V. Gerasimov, A. P. Kirpichnikov, and L. A. Rachevsky, Thermal Science, No. 2, 735 (2015).
9. L. V. Kantorovich and V. I. Krylov, *Approximate Methods of Higher Analysis* (Gostekhizdat, Moscow — Leningrad, 1949) [in Russian].