

УДК 533.9.01.15

О нанофокусировке света на вершине металлического микроострия, расположенного над плоскостной структурой

А. Б. Петрин

Исследуется фокусировка электромагнитной энергии оптического диапазона частот в наноразмерную пространственную область в окрестности нановершины металлического микроострия, расположенного вблизи слоистой структуры, состоящей из плоских диэлектрических и/или металлических слоев. Предполагается, что фокусировка возникает при симметричном схождении к нановершине поверхностной плазмонной ТМ-волны. Граница металла вблизи нановершины приближается поверхностью параболоида вращения. Разработан численный метод нахождения электрического поля в окрестности вершины острия, включая слоистую структуру. Результаты расчетов показали, что по сравнению с одиночным острием наличие структуры приводит к дополнительной концентрации электрического поля вблизи нановершины. Оказалось, что главное влияние на фокусировку оказывает верхняя плёнка слоистой структуры.

PACS: 78.67.-n; 68.37.Uv; 73.20.Mf

Ключевые слова: нанофокусировка, поверхностные плазмоны, плазмонный волновод.

Введение

Нанофокусировка световой энергии на вершинах микроострий — важнейшее явление, лежащее в основе перспективных нанотехнологических приложений. Оно состоит в необычайно резком возрастании интенсивности поверхностной плазмонно-поляритонной волны, симметрично возбуждаемой в основании металлического конического микроострия, при ее схождении к нановершине [1—3]. Это явление объясняется тем, что на геометрически идеальном металлическом острии может существовать осесимметричная электромагнитная стоячая волна с сингулярностью электрического поля на вершине [4]. Как показывают эксперименты [5, 6], эта волна может эффективно возбуждаться сходящейся к вершине поверхностной плазмонно-поляритонной ТМ-волной с той же осевой симметрией поля. Наличие сингулярности электрического поля хорошо объясняется в квазистатическом приближении, которое выполняется в окрестности нановершины металлического микроострия.

Реальная вершина микроострия не идеальна и имеет закругление на вершине. В работах [7, 8] для нахождения распределения электрического поля на закругленной вершине одиночного микроострия поверхность вершины была аппроксимирована параболоидом вращения. Задача была решена в параболоидальной системе координат. Было доказано, что размер фокального распределения на вершине убывает пропорционально радиусу закругления вершины, что принципиально и объясняет нанофокусировку (при уменьшении радиуса острия до нанометровых размеров размер фокальной области уменьшается в той же пропорции).

В данной работе исследуется вопрос о том, как будет изменяться фокальное распределение поля, когда вершина микроострия будет находиться вблизи плоской слоистой структуры, состоящей из диэлектрических и/или металлических пленок. Такая задача возникает, например, при сканировании плоской тонкопленочной структуры возбужденным микроострием. В данной работе в качестве конкретной тонкопленочной структуры мы будем рассматривать одну тонкую пленку на поверхности полупространства, заполненного другим материалом. Изложение решения задачи будет проведено таким образом, чтобы обобщение задачи на случай нескольких пленок было тривиальным.

Отметим, что ранее была решена аналогичная задача для случая, когда нанофокусировка проис-

Петрин Андрей Борисович, ведущий научный сотрудник.
Объединенный институт высоких температур РАН.
Россия, 125412, Москва, ул. Ижорская, 13, строение 2.
E-mail: a_petrin@mail.ru

Статья поступила в редакцию 8 июля 2016 г.

© Петрин А. Б., 2016

ходит на вершине острия, расположенного у плоской границы полупространства [9], которая решалась с помощью метода зеркальных отражений. Для плоскостройной структуры метод зеркальных отражений не годится, однако, как будет показано ниже, возможно применение другого аналогичного подхода. В заключение будут обсуждаться применения полученных результатов к приложениям, в которых присутствуют различные нелинейные эффекты.

Распределение электрического поля на нановершине металлического микроострия, расположенного вблизи плоской границы тонкопленочной структуры в квазистатическом приближении. Постановка задачи

Рассмотрим металлическое остриё с наноразмерным радиусом закругления вершины R . Пусть поверхность острия вблизи вершины представляется (осесимметричным относительно оси Z) параболоидом вращения $z = R/2 - (x^2 + y^2)/2R$ (рис. 1). Пусть вблизи острия находится первая плоская граница пленки $z = z_1$, где $z_1 \geq R/2$, а вторая граница рассматриваемой пленки толщины h будет $z = z_2$, где $z_2 = z_1 + h$. Комплексные диэлектрические проницаемости металла острия, внешней однородной среды, пленки и полубесконечной среды при $z \geq z_2$ обозначим $\epsilon_m, \epsilon_1, \epsilon_2$ и ϵ_3 соответственно (см. рис. 1).

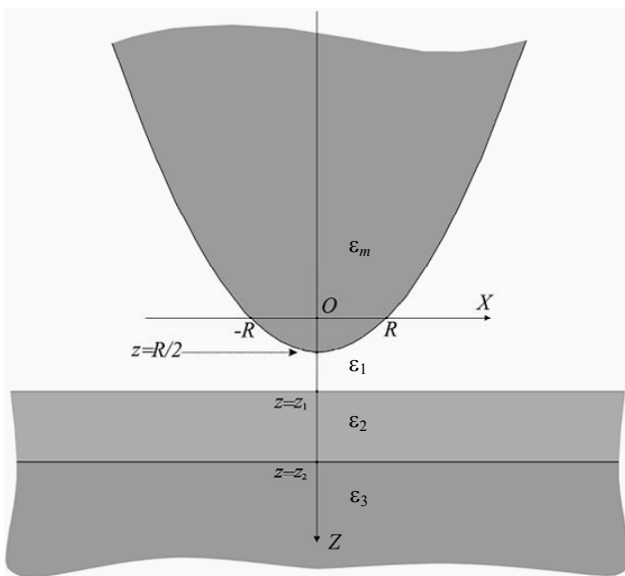


Рис. 1. Геометрия задачи.

При решении задачи будем использовать комплексное представление полей с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$, где ω — циклическая

частота. Задачу вблизи вершины можно решать в квазистатической формулировке [8], при которой потенциал электрического поля Φ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$, а нормальные и тангенциальные составляющие электрического поля на поверхности острия и двух плоских границах пленки должны соответствовать известным граничным условиям:

на поверхности острия $\epsilon_1 E_{1,n} = \epsilon_m E_{m,n}$ и $E_{1,\tau} = E_{m,\tau}$, (1)

на первой границе пленки $\epsilon_2 E_{2,n} = \epsilon_1 E_{1,n}$ и $E_{2,\tau} = E_{1,\tau}$, (2)

на второй границе пленки $\epsilon_3 E_{3,n} = \epsilon_2 E_{2,n}$ и $E_{3,\tau} = E_{2,\tau}$. (3)

Будем искать осесимметричное решение уравнения Лапласа, имеющее максимум поля на вершине острия, соответствующее фокусировке на нем поверхностной симметричной плазмонной ТМ-волны.

Кроме того, для автоматического удовлетворения граничных условий на плоских поверхностях пленки (2) и (3) будем использовать специальный метод, который будет изложен ниже. Пусть потенциал зарядов, находящихся на параболоидальном металлическом острие, в пространстве с проницаемостью ϵ_1 описывается функцией $\Phi_{tip}(\mathbf{r}) = \Phi_{tip}(x, y, z)$, где радиус-вектор $\mathbf{r} = (x, y, z)$ проведен из начала координат в точку нахождения потенциала. При этом потенциал индуцированных зарядов на границах пленки (заметим, что из уравнений Максвелла следует, что внутри однородного диэлектрика нет поляризационных зарядов, они могут быть только на границе), т. е. в пространстве с проницаемостью ϵ_1 , равен $\Phi_{ind}(\mathbf{r}) = \Phi_{ind}(x, y, z)$. Тогда полный потенциал в области, заполненной диэлектриком с проницаемостью ϵ_1 , описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\mathbf{r}) &= \Phi_{tip}(\mathbf{r}) + \Phi_{ind}(\mathbf{r}) = \\ &= \Phi_{tip}(x, y, z) + \Phi_{ind}(x, y, z). \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть потенциал электрического поля, возбуждаемого зарядами острия в областях с ϵ_2 и ϵ_3 , т. е. в пленке и в полупространстве за пленкой, равны $\Phi_2(\mathbf{r}) = \Phi_2(x, y, z)$ и $\Phi_3(\mathbf{r}) = \Phi_3(x, y, z)$.

Найдем теперь общий вид потенциала острия $\Phi_{tip}(\mathbf{r})$, удовлетворяющий уравнению Лапласа в однородном диэлектрическом пространстве (без слоистой структуры) снаружи и внутри острия, причем на границе острия должны удовлетворять-

ся граничные условия (1). Введем параболоидальные координаты [10] (систему параболических координат вращения) (α, β, ψ) , которые связаны с прямоугольными декартовыми координатами (x, y, z) формулами:

$$x = c\alpha\beta \cos \psi, \quad y = c\alpha\beta \sin \psi, \quad z = \frac{1}{2}c(\beta^2 - \alpha^2), \quad (5)$$

где c — масштабный постоянный множитель. В рассматриваемой системе координат с началом в точке O и осью Z (см. рис. 1) уравнение Лапласа для электрического потенциала Φ внутри и снаружи острия при аксиальной симметрии (Φ не зависит от ψ) можно записать следующим образом [10]:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c^2(\alpha^2 + \beta^2)} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} \right) = 0. \quad (6)$$

Общее решение (6) известно [10] и определяется выражением:

$$\Phi = \sum (B_1 J_0(p\alpha) + B_2 Y_0(p\alpha)) (C_1 I_0(p\beta) + C_2 K_0(p\beta)), \quad (7)$$

где p , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 — константы; J_0 , Y_0 — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка; I_0 , K_0 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка. Суммирование производится по решениям с различными значениями констант.

Пусть граница параболоидального острия определяется уравнением $\beta = \beta_0$. Из (5) следует, что граница острия $\beta = \beta_0$ в декартовых координатах (x, y, z) определяется уравнением $z = c\beta_0^2/2 - (x^2 + y^2)/2c\beta_0^2$. Несложно показать, что радиус кривизны вершины острия равен $R = c\beta_0^2$.

В дальнейшем мы будем использовать осесимметричные решения уравнения Лапласа. Поэтому для выполнения граничных условий на всей поверхности вращения острия, будет достаточно удовлетворить их на линии пересечения граничной поверхности острия с любой плоскостью симметрии, проходящей через ось Z . В качестве такой плоскости мы будем выбирать плоскость (x, z) . Легко доказать, что в нашем симметричном случае достаточно рассмотреть выполнение граничных условий только на границе пересечения полуплоскости $y = 0$ при $x \geq 0$ и поверхности параболоидального острия.

Имея в виду общность дальнейшего изложения, перейдем на плоскости (x, z) к безразмерным координатам: $\tilde{x} = x/R$, $\tilde{z} = z/R$ и $\tilde{\alpha} = \alpha/\beta_0$, $\tilde{\beta} = \beta/\beta_0$. Безразмерные параболоидальные $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ и декартовы координаты на плоскости (\tilde{x}, \tilde{z}) связаны между собой формулами $\tilde{\alpha} = \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}$ и $\tilde{\beta} = \tilde{x} / \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}$ при положительных \tilde{x} [8]. В этих координатах граница острия будет определяться функцией $\tilde{z} = 1/2 - \tilde{x}^2/2$, а уравнение Лапласа (6) в безразмерных координатах будет иметь вид:

$$\frac{1}{(\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2)} \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tilde{\alpha}^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tilde{\beta}^2} + \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\alpha}} + \frac{1}{\tilde{\beta}} \frac{\partial\Phi}{\partial\tilde{\beta}} \right) = 0.$$

Если из решения уравнения Лапласа будет найден осесимметричный потенциал, являющийся функцией только $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, то нормальные и тангенциальные размерные компоненты поля с двух сторон границы диэлектрика и металла можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_{d,\tau} &= -\frac{1}{R\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}} \frac{\partial\Phi_d}{\partial\tilde{\alpha}}, \\ E_{d,n} &= -\frac{1}{R\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}} \frac{\partial\Phi_d}{\partial\tilde{\beta}}, \\ E_{m,\tau} &= -\frac{1}{R\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}} \frac{\partial\Phi_m}{\partial\tilde{\alpha}}, \\ E_{m,n} &= -\frac{1}{R\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}} \frac{\partial\Phi_m}{\partial\tilde{\beta}}. \end{aligned}$$

Нормируем потенциал на его значение U в максимуме поля на вершине острия. Тогда можно перейти от размерного к безразмерному потенциалу $\tilde{\Phi} = \Phi/U$ и от размерных составляющих полей к их безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{d,\tau} &= \frac{R}{U} E_{d,\tau} = -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}} \frac{\partial\tilde{\Phi}_d}{\partial\tilde{\alpha}}, \\ \tilde{E}_{d,n} &= \frac{R}{U} E_{d,n} = -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}} \frac{\partial\tilde{\Phi}_d}{\partial\tilde{\beta}}, \\ \tilde{E}_{m,\tau} &= \frac{R}{U} E_{m,\tau} = -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}} \frac{\partial\tilde{\Phi}_m}{\partial\tilde{\alpha}}, \\ \tilde{E}_{m,n} &= \frac{R}{U} E_{m,n} = -\frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\beta}^2}} \frac{\partial\tilde{\Phi}_m}{\partial\tilde{\beta}}. \end{aligned}$$

В нормированных декартовых координатах в плоскости (\tilde{x}, \tilde{z}) компоненты нормированного электрического поля будут иметь вид: $\tilde{E}_{\tilde{x}} = -\partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{x}$, $\tilde{E}_{\tilde{z}} = -\partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{z}$.

Итак, исходя из общего решения (7), будем искать решение граничной задачи для электрического поля в окрестности острия, предполагая, что потенциалы $\tilde{\Phi}_{tip}$ снаружи ($\beta \geq \beta_0$) и внутри ($\beta \leq \beta_0$) границы металлического острия имеют вид соответственно

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{tip,l} &= \sum_{j=1}^N A_j J_0(\lambda_j \tilde{\alpha}) K_0(\lambda_j \tilde{\beta}), \\ \tilde{\Phi}_{tip,m} &= \sum_{j=1}^N B_j J_0(\lambda_j \tilde{\alpha}) I_0(\lambda_j \tilde{\beta}), \end{aligned} \tag{8}$$

где A_j , B_j и λ_j — константы. Значения λ_j можно выбрать в виде $\lambda_j = \mu_j/L$, где μ_j , $j=1, 2, \dots, N$ — первые N корней уравнения Бесселя $J_0(\mu_j) = 0$, а L некоторое безразмерное расстояние от вершины, на котором мы будем удовлетворять граничным условиям на поверхности острия. В пределе $N \rightarrow \infty$ система функций $J_0(\lambda_j \tilde{\alpha})$ с вышеуказан-

ным выбором λ_j на отрезке $0 \leq \tilde{\alpha} \leq L$ образуют полную систему функций [11].

Отметим, что выбор функциональных зависимостей (8) из общего решения (7) обусловлен естественными требованиями к сконцентрированному у вершины полю (которые и выделяют указанные зависимости однозначным образом):

а) снаружи острия потенциал поля должен уменьшаться при удалении от его поверхности, быть конечным и максимальным на вершине острия;

б) внутри металла острия потенциал должен быть конечным в начале координат. Кроме того, электрический потенциал должен быть непрерывен при переходе через границу.

Пусть функцию $\tilde{\Phi}_{ind}(\tilde{x}, \tilde{z})$, соответствующую $\tilde{\Phi}_{tip,l}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j J_0(\lambda_j \tilde{\alpha}) K_0(\lambda_j \tilde{\beta})$, можно представить в виде:

$$\tilde{\Phi}_{ind}(\tilde{x}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j H_j(\tilde{x}, \tilde{z}) \tag{9}$$

где функции $H_j(\tilde{x}, \tilde{z})$ зависят от λ_j . Ниже будет найден точный вид этих функций.

Подставляя (8) и (9) в (4), получим на плоскости (\tilde{x}, \tilde{z}) потенциал в среде с ϵ_1 в виде:

$$\tilde{\Phi}_1(\tilde{x}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N \left[J_0\left(\lambda_j \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}\right) K_0\left(\lambda_j \tilde{x} / \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}\right) + H_j(\tilde{x}, \tilde{z}) \right] A_j. \tag{10}$$

Аналогично в металле острия в плоскости (\tilde{x}, \tilde{z}) потенциал можно представить в виде:

$$\tilde{\Phi}_m(\tilde{x}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N B_j J_0\left(\lambda_j \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}\right) I_0\left(\lambda_j \tilde{x} / \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}\right). \tag{11}$$

На границе острия (при $\tilde{z} = 1/2 - \tilde{x}^2/2$) единичные векторы нормали и касательной представляются формулами

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_{\tilde{x}} \left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{1 + \tilde{x}^2}} \right) + \mathbf{e}_{\tilde{z}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{x}^2}} \right);$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_{\tilde{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tilde{x}^2}} \right) + \mathbf{e}_{\tilde{z}} \left(-\frac{\tilde{x}}{\sqrt{1 + \tilde{x}^2}} \right).$$

Тогда граничные условия для нормальных и тангенциальных полей на поверхности острия можно записать, используя $\tilde{E}_{\tilde{x}} = -\partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{x}$ и $\tilde{E}_{\tilde{z}} = -\partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{z}$, соответственно в виде выражений:

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon_1 \left\{ \left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{1+\tilde{x}^2}} \right) \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1+\tilde{x}^2}} \right) \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \tilde{z}} \right\} \Bigg|_{\tilde{z}=1/2-\tilde{x}^2/2} + \\
& + \varepsilon_m \left\{ \left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{1+\tilde{x}^2}} \right) \frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{1+\tilde{x}^2}} \right) \frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial \tilde{z}} \right\} \Bigg|_{\tilde{z}=1/2-\tilde{x}^2/2} = 0,
\end{aligned} \quad (12)$$

$$-\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{1+\tilde{x}^2}} \right) \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \tilde{x}} - \left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{1+\tilde{x}^2}} \right) \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \tilde{z}} \right\} \Bigg|_{\tilde{z}=1/2-\tilde{x}^2/2} + \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{1+\tilde{x}^2}} \right) \frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial \tilde{x}} - \left(\frac{\tilde{x}}{\sqrt{1+\tilde{x}^2}} \right) \frac{\partial \tilde{\Phi}_m}{\partial \tilde{z}} \right\} \Bigg|_{\tilde{z}=1/2-\tilde{x}^2/2} = 0. \quad (13)$$

Если подставить в (12), (13) выражения (10), (11), то получим линейные уравнения относительно A_j , B_j , которые можно представить в виде

$$-\varepsilon_1 \sum_{j=1}^N A_j a_j(\lambda_j, \tilde{x}) + \varepsilon_m \sum_{j=1}^N B_j b_j(\lambda_j, \tilde{x}) = 0, \quad (14)$$

$$-\sum_{j=1}^N A_j c_j(\lambda_j, \tilde{x}) + \sum_{j=1}^N B_j d_j(\lambda_j, \tilde{x}) = 0. \quad (15)$$

Ради экономии места, мы не будем здесь выписывать функции $a_j(\lambda_j, \tilde{x})$, $b_j(\lambda_j, \tilde{x})$, $c_j(\lambda_j, \tilde{x})$ и $d_j(\lambda_j, \tilde{x})$ в явном виде, которые получаются при указанной тривиальной подстановке.

В данной работе уравнения (14), (15) решались методом коллокаций [12]. Указанные уравнения записывались в $(N-1)$ точках на поверхности острия. В результате были получены $(2N-2)$ линейных алгебраических уравнений с $2N$ неизвестными коэффициентами A_j и B_j . Для получения однозначного решения, были добавлены еще два уравнения, а именно, были приравнены потенциалы на вершине острия, снаружи и внутри острия, к единице. В результате решения полученной системы из $2N$ уравнений находились A_j и B_j , и уже по ним — распределения потенциал и электрического поля во всем пространстве. При этом распределение потенциала получалось нормированное на единицу на вершине острия.

Нахождение потенциала снаружи и внутри слоистой структуры

Рассмотрим сначала (см. рис. 2) элементарный точечный единичный заряд, расположенный на оси Z , у поверхности слоистой структуры:

$$q = \delta(x)\delta(y)\delta(z-z_q), \quad (16)$$

где $\delta(x)$ — дельта функция; z_q — координата заряда по оси Z .

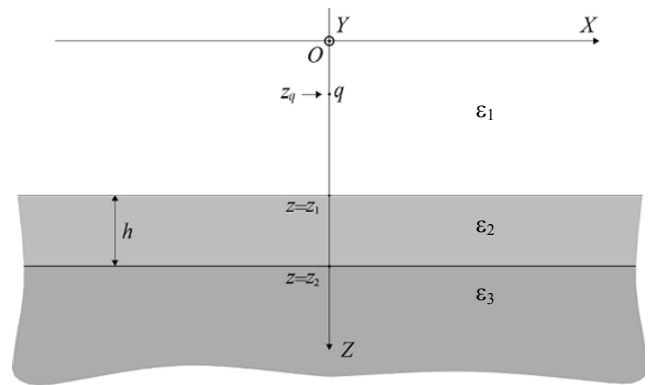


Рис. 2. Геометрия задачи о точечном заряде у слоистой структуры.

Всем величинам, характеризующим полупространство, в котором расположен заряд (16), будем присваивать индекс $k=1$, область внутри пленки — индексом $k=2$, а полупространство за пленкой — индекс $k=3$.

Уравнения электростатики (или квазиэлектростатики) можно записать через потенциал φ_k в областях в виде:

$$\Delta \varphi_k = -\frac{q}{\varepsilon_k \varepsilon_0}, \quad (17)$$

где Δ — оператор Лапласа; ε_k — относительная диэлектрическая проницаемость k -й области; ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

Граничные условия на двух поверхностях пленки требуют непрерывности тангенциальных составляющих полей \mathbf{E} , а также нормальных составляющих полей $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ (в системе СИ).

Электрическое поле и потенциал можно представить в виде Фурье разложений:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{i\xi x + i\eta y} \hat{\mathbf{E}}(\xi, \eta, z), \\
\varphi(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{i\xi x + i\eta y} \hat{\varphi}(\xi, \eta, z). \quad (18)
\end{aligned}$$

Аналогичное выражение можно написать для q :

$$q(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{i\xi x + i\eta y} \hat{q}(\xi, \eta, z).$$

Отсюда Фурье-образ распределения заряда (16) можно записать в виде:

$$\hat{q}(\xi, \eta, z) = \delta(z - z_q).$$

Используя Фурье-представления полей, уравнение (17) в трех областях можно записать в виде:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2 - \eta^2 \right) \hat{\phi}_k(\xi, \eta, z) = -\frac{1}{\varepsilon_k \varepsilon_0} \delta(z - z_q),$$

$$k = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Уравнения (19) при фиксированных значениях ξ и η есть обыкновенные дифференциальные уравнения относительно переменной z . Задача состоит в нахождении из уравнений (19) функций $\hat{\phi}_k$ в рассматриваемых областях. По известному Фурье-образу потенциала $\hat{\phi}_k$ составляющие $\hat{\mathbf{E}}_k$ определяются выражениями: $\hat{E}_{kx} = -i\xi \hat{\phi}_k$; $\hat{E}_{ky} = -i\eta \hat{\phi}_k$; $\hat{E}_{kz} = -\partial \hat{\phi}_k / \partial z$.

В области нахождения заряда уравнение (19) при $k = 1$ есть неоднородное уравнение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \xi^2 - \eta^2 \right) \hat{\phi}_1 = -\frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} \delta(z - z_q).$$

Частным решением этого уравнения является функция:

$$(\hat{\phi}_1)_{part} = \frac{1}{2\varepsilon_1 \varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} |z - z_q|\right).$$

Тогда общее решение уравнения в рассматриваемой области можно записать в виде:

$$\hat{\phi}_1 = T_1 \exp\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2} z\right) + S_1 \exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} z\right) + \frac{1}{2\varepsilon_1 \varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} |z - z_q|\right),$$

где T_1 и S_1 — коэффициенты, не зависящие от z .

Условие невозрастания решения при $z \rightarrow -\infty$ (при удалении точки наблюдения на бесконечно большое расстояние от заряда) дает $S_1 = 0$. Следовательно,

электрический потенциал в области нахождения заряда будет иметь вид:

$$\hat{\phi}_1 = T_1 \exp\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2} z\right) + \frac{1}{2\varepsilon_1 \varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} |z - z_q|\right). \quad (20)$$

В области $k = 2$ (в пленке) есть два линейно независимых решения (уравнение (19) в этой области однородное), поэтому справедливо выражение:

$$\hat{\phi}_2 = T_2 \exp\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2} (z - z_2)\right) + S_2 \exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} (z - z_1)\right), \quad (21)$$

где T_2 и S_2 — коэффициенты, не зависящие от z , а z_1 и z_2 — границы пленки (см. рис. 2).

В полупространстве $k = 3$ также есть два линейно независимых решения однородного в этой области уравнения (19), однако необходимо отбросить решение, стремящееся в бесконечность при $z \rightarrow +\infty$. В результате, получаем для этой области решение:

$$\hat{\phi}_3 = S_3 \exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} (z - z_2)\right), \quad (22)$$

где S_3 — коэффициент, не зависящий от z .

Полученные решения уравнения (19) должны еще удовлетворять граничным условиям на двух границах пленки: $z = z_1$ и $z = z_2$. Запишем условия непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей электрического поля \hat{E}_{kx} , \hat{E}_{ky} и нормальной составляющей индукции электрического поля $\varepsilon_k \hat{E}_{kz}$ на границах:

При $z = z_1$ получим:

$\hat{\phi}_1|_{z=z_1} = \hat{\phi}_2|_{z=z_1}$ — равенство тангенциальных составляющих электрического поля;

$\varepsilon_1 \frac{\partial \hat{\phi}_1}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = \varepsilon_2 \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial z} \Big|_{z=z_1}$ — равенство нормальных компонент индукции.

При $z = z_2$:

$\hat{\phi}_2|_{z=z_2} = \hat{\phi}_3|_{z=z_2}$ — равенство тангенциальных составляющих электрического поля;

$\varepsilon_2 \frac{\partial \hat{\phi}_2}{\partial z} \Big|_{z=z_2} = \varepsilon_3 \frac{\partial \hat{\phi}_3}{\partial z} \Big|_{z=z_2}$ — равенство нормальных компонент индукции.

Запишем более компактно выражения для потенциалов (20), (21) и (22) в трех областях

$$\hat{\phi}_1 = T_1 \exp(\beta z) + \alpha, \quad (23)$$

$$\hat{\phi}_2 = T_2 \exp(\beta(z - z_2)) + S_2 \exp(-\beta(z - z_1)), \quad (24)$$

$$\hat{\phi}_3 = S_3 \exp(-\beta(z - z_2)), \quad (25)$$

где $\alpha = \exp(-\beta|z_1 - z_q|) / 2\varepsilon_1\varepsilon_0\beta$ и $\beta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

Подставляя в граничные условия выражения (23), (24) и (25) для Фурье-образов потенциалов, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} T_1 \exp(\beta z_1) + \alpha = T_2 \exp(-\beta h) + S_2 \\ \varepsilon_1 T_1 \exp(\beta z_1) - \varepsilon_1 \alpha = \varepsilon_2 T_2 \exp(-\beta h) - \varepsilon_2 S_2 \\ T_2 + S_2 \exp(-\beta h) = S_3 \\ \varepsilon_2 T_2 - \varepsilon_2 S_2 \exp(-\beta h) = -\varepsilon_3 S_3 \end{cases}. \quad (26)$$

Уравнение (26) можно представить в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \exp(\beta z_1) & -\exp(-\beta h) & -1 & 0 \\ \varepsilon_1 \exp(\beta z_1) & -\varepsilon_2 \exp(-\beta h) & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 1 & \exp(-\beta h) & -1 \\ 0 & \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \exp(-\beta h) & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \varepsilon_1 \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Решая уравнение (27), получим коэффициенты

$$T_1 = -\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \exp(-2\beta h) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2) \exp(-\beta(2z_1 - z_q))}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2\beta h) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} \frac{\exp(-\beta(2z_1 - z_q))}{2\varepsilon_1\varepsilon_0\beta}, \quad (28)$$

$$T_2 = -\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2\beta h) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} \frac{\exp(-\beta(z_2 - z_q))}{\varepsilon_0\beta}, \quad (29)$$

$$S_2 = \frac{(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2\beta h) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} \frac{\exp(-\beta(z_1 - z_q))}{\varepsilon_0\beta}, \quad (30)$$

$$S_3 = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2\beta h) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} \frac{2 \exp(-\beta(z_2 - z_q))}{\varepsilon_0\beta}. \quad (31)$$

Нахождение потенциала в области с индексом $k = 1$ (в области нахождения заряда)

Исходя из полученного коэффициента T_1 (28), получим Фурье-образ потенциала в этой области в виде

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\exp(-\beta|z - z_q|)}{2\varepsilon_1\varepsilon_0\beta} - \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \exp(-2\beta h) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2) \exp(-\beta(2z_1 - z_q - z))}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2\beta h) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} \frac{\exp(-\beta(2z_1 - z_q - z))}{2\varepsilon_1\varepsilon_0\beta}. \quad (32)$$

С помощью обратного преобразования Фурье для потенциала (18) найдем из (32) потенциал в данной области. Известно, что первый член в (32) — это Фурье-образ потенциала единичного точечного заряда, расположенного в точке $(x, y, z) = (0, 0, z_q)$, поэтому обратное преобразование Фурье первого слагаемого в (32) есть

$$(2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{i\xi x + i\eta y} \frac{\exp(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} |z - z_q|)}{2\varepsilon_1\varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_q)^2}}. \quad (33)$$

Кроме того, учитывая, что в рассматриваемой области ($k=1$) выполняются неравенства $z_q \leq z_1$ и $z \leq z_1$, и, по аналогии с (33), можно записать:

$$\mathfrak{A}_1(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{i\xi x + i\eta y} \frac{\exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} (2z_1 - z_q - z)\right)}{2\varepsilon_1 \varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (2z_1 - z_q - z)^2}}. \quad (34)$$

Выражение (34) есть потенциал точечного единичного заряда, расположенного в зеркальной точке расположения заряда $(x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}) = (0, 0, (2z_1 - z_q))$ при отражении от плоскости $z = z_1$.

Вводя функцию

$$\hat{R}_1(\xi, \eta) = -\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \exp\left(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp\left(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} \quad (35)$$

и применяя теорему о свертке, получим, обратным преобразованием (32), потенциал в первой области

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1 \varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_q)^2}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(u, v) \mathfrak{A}_1(x - u, y - v, z) dudv, \quad (36)$$

где $R_1(u, v) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{R}_1(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v}$.

Нахождение потенциала в области с индексом $k = 2$ (в пленке)

Используя полученные выражения (29) и (30) для T_2 и S_2 , запишем Фурье-образ потенциала в пленке в виде:

$$\hat{\phi}_2 = \hat{F}_2(\xi, \eta) \frac{\exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} (2z_2 - z_q - z)\right)}{\varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + \hat{G}_2(\xi, \eta) \frac{\exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} (z - z_q)\right)}{\varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

где

$$\hat{F}_2(\xi, \eta) = -\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp\left(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)}, \quad (37)$$

$$\hat{G}_2(\xi, \eta) = \frac{(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp\left(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)}. \quad (38)$$

Тогда, заметив, что

$$\mathfrak{A}_2(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{i\xi x + i\eta y} \frac{\exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} (2z_2 - z_q - z)\right)}{\varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (2z_2 - z_q - z)^2}},$$

$$\mathfrak{B}_2(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{i\xi x + i\eta y} \frac{\exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} (z - z_q)\right)}{\varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_q)^2}},$$

по теореме о свертке, получим потенциал во второй области

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \hat{F}_2(\xi, \eta) \frac{\exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} (2z_2 - z_q - z)\right)}{\varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + \hat{G}_2(\xi, \eta) \frac{\exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} (z - z_q)\right)}{\varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \right\} e^{i\xi x} e^{i\eta y} d\xi d\eta = \quad (39) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ F_2(u, v) \mathfrak{A}_2(x - u, y - v, z) + G_2(u, v) \mathfrak{B}_2(x - u, y - v, z) \right\} dudv, \end{aligned}$$

где

$$F_2(u, v) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{F}_2(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v},$$

$$G_2(u, v) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{G}_2(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v}.$$

Нахождение потенциала в области с индексом $k = 3$ (в полупространстве)

Используя выражение (31) для S_3 , найдем Фурье-образ потенциала в полупространстве $k = 3$:

$$\hat{\varphi}_3 = \hat{G}_3(\xi, \eta) \frac{2 \exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} (z - z_q)\right)}{\varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

где

$$\hat{G}_3(\xi, \eta) = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp\left(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)}. \quad (40)$$

Вводя функцию

$$\mathfrak{B}_3(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{i\xi x + i\eta y} \frac{2 \exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} (z - z_q)\right)}{\varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{1}{\pi \varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_q)^2}},$$

по теореме о свертке, получим потенциал в третьей области

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}_3(\xi, \eta) \frac{2 \exp\left(-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} (z - z_q)\right)}{\varepsilon_0 \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} e^{i\xi x} e^{i\eta y} d\xi d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_3(u, v) \mathfrak{B}_3(x - u, y - v, z) dudv, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\text{где } G_3(u, v) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{G}_3(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v}.$$

До сих пор мы считали, что единичный точечный заряд расположен в точке $(0, 0, z_q)$. Пусть теперь величина заряда будет e , и он будет расположен в точке (x_q, y_q, z_q) , следовательно $q = e\delta(x - x_q)\delta(y - y_q)\delta(z - z_q)$. Тогда потенциалы в трех областях будут выражаться формулами

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{e}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0\sqrt{(x-x_q)^2 + (x-x_q)^2 + (z-z_q)^2}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(u, v) e\mathfrak{A}_1(x-x_q-u, y-y_q-v, z) dudv;$$

$$\Phi_2(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \{F_2(u, v) e\mathfrak{A}_2(x-x_q-u, y-y_q-v, z) + G_2(u, v) e\mathfrak{B}_2(x-x_q-u, y-y_q-v, z)\} dudv;$$

$$\Phi_3(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_3(u, v) e\mathfrak{B}_3(x-x_q-u, y-y_q-v, z) dudv.$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) = & \frac{e}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0\sqrt{(x-x_q)^2 + (x-x_q)^2 + (z-z_q)^2}} + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{eR_1(u, v) dudv}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0\sqrt{(x-x_q-u)^2 + (y-y_q-v)^2 + (2z_1-z_q-z)^2}}; \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, y, z) = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{eF_2(u, v) dudv}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x-x_q-u)^2 + (y-y_q-v)^2 + (2z_2-z_q-z)^2}} + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{eG_2(u, v) dudv}{2\pi\epsilon_0\sqrt{(x-u-x_q)^2 + (y-v-y_q)^2 + (z-z_q)^2}}; \end{aligned} \tag{43}$$

$$\Phi_3(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{eG_3(u, v) dudv}{\pi\epsilon_0\sqrt{(x-u-x_q)^2 + (y-v-y_q)^2 + (z-z_q)^2}}. \tag{44}$$

Вернемся к задаче об острие над слоистой структурой. Представим потенциал зарядов, находящихся на острие, в виде суммы потенциалов от большого числа $N_q \rightarrow \infty$ точечных зарядов

$$\Phi_{tip}(\mathbf{r}) = \Phi_{tip}(x, y, z) = \sum_{n=1}^{N_q} \frac{e_n}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0\sqrt{(x-x_n)^2 + (x-x_n)^2 + (z-z_n)^2}}.$$

Тогда, используя (42), потенциал в первой среде от этой системы зарядов будет

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) = & \Phi_{tip}(x, y, z) + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(u, v) \sum_{n=1}^{N_q} \frac{e_n}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0\sqrt{(x-x_n-u)^2 + (y-y_n-v)^2 + (2z_1-z_n-z)^2}} dudv = \\ & = \Phi_{tip}(x, y, z) + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(u, v) \Phi_{tip}(x-u, y-v, 2z_1-z) dudv. \end{aligned} \tag{45}$$

Во второй среде, аналогично, используя (43), получим

$$\Phi_2(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\epsilon_1 F_2(u, v) \Phi_{tip}(x-u, y-v, 2z_2-z) dudv + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\epsilon_1 G_2(u, v) \Phi_{tip}(x-u, y-v, z) dudv. \tag{46}$$

Наконец, используя (44), в третьей среде получим

$$\Phi_3(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} 4\epsilon_1 G_3(u, v) \Phi_{tip}(x-u, y-v, z) dudv. \tag{47}$$

Частный случай № 1. Толщина пластины $h = 0$.

Применим полученные результаты к случаю $h = 0$. В этом случае

$$\hat{R}_1(\xi, \eta) = -\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} = -\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 + \varepsilon_1}$$

тогда $R_1(u, v) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{R}_1(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v} = -\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 + \varepsilon_1} \delta(u) \delta(v)$ и мы получим $\Phi_1(x, y, z) = \Phi_{\text{ип}}(x, y, z) - \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 + \varepsilon_1} \Phi_{\text{ип}}(x, y, 2z_1 - z)$.

В этом же частном случае, при $h = 0$, получим в третьей среде (второй среды в данном частном случае нет) выражения

$$\hat{G}_3(\xi, \eta) = \frac{1}{2(\varepsilon_3 + \varepsilon_1)} \Rightarrow G_3(u, v) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{G}_3(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v} = \frac{1}{2(\varepsilon_3 + \varepsilon_1)} \delta(u) \delta(v).$$

$$\Phi_3(x, y, z) = \frac{4\varepsilon_1}{2(\varepsilon_3 + \varepsilon_1)} \Phi_{\text{ип}}(x, y, z) = \frac{2\varepsilon_1}{(\varepsilon_3 + \varepsilon_1)} \Phi_{\text{ип}}(x, y, z).$$

Частный случай № 2. Потенциал от одного точечного заряда в третьей среде при условии $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$ и $\varepsilon_2 = -1 + i\delta_\varepsilon$.

Потенциал в третьей среде от точечного заряда в первой выражается формулой (44) и при $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$ и $\varepsilon_2 = -1 + i\delta_\varepsilon$ мы получим

$$\hat{G}_3(\xi, \eta) = i \frac{(\delta_\varepsilon^3 + 5i\delta_\varepsilon^2 - 8\delta_\varepsilon - 4i) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{(\delta_\varepsilon^4 + 4i\delta_\varepsilon^3 - 4\delta_\varepsilon^2) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) - \delta_\varepsilon^4} + \frac{1 - i\delta_\varepsilon}{\delta_\varepsilon^2},$$

где первый член в правой части быстро стремится к нулю при $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow \infty$, а второй не зависит от ξ и η .

Тогда, применив обратное преобразование Фурье, получим

$$G_3(u, v) = \frac{1 - i\delta_\varepsilon}{\delta_\varepsilon^2} \delta(u) \delta(v) + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \left\{ i \frac{(\delta_\varepsilon^3 + 5i\delta_\varepsilon^2 - 8\delta_\varepsilon - 4i) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{(\delta_\varepsilon^4 + 4i\delta_\varepsilon^3 - 4\delta_\varepsilon^2) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) - \delta_\varepsilon^4} \right\} e^{i\xi u + i\eta v}.$$

Второй член легко интегрируется численно. Обозначив его функцией $p_3(u, v, \delta_\varepsilon)$, получаем потенциал от точечного заряда e в третьей среде

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, y, z) = & \frac{4(1 - i\delta_\varepsilon)}{\delta_\varepsilon^2} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2}} + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e p_3(u, v, \delta_\varepsilon) dudv}{\pi\varepsilon_0 \sqrt{(x - u - x_q)^2 + (y - v - y_q)^2 + (z - z_q)^2}}. \end{aligned} \quad (48)$$

Первый член в правой части (48) представляет собой потенциал исходного точечного заряда в первой среде, умноженный на $4(1 - i\delta_\varepsilon)/\delta_\varepsilon^2$. Второй — можно рассматривать как потенциал зарядов, распределенных на плоскости $z = z_q$ в первой среде. Отметим, в связи с этим, что в третьей среде никаких особенностей потенциала и электрического поля быть не может в принципе, даже при сколь угодно малом поглощении δ_ε в пластине.

Вернемся теперь к общим формулам для потенциалов системы зарядов в трех рассматриваемых областях (45), (46) и (47). Пользуясь приемом, использованным в предыдущем частном случае № 2, при выводе (48), разобьем Фурье-образы (35), (37), (38) и (40) каждый на сумму двух членов:

$$\hat{R}_1(\xi, \eta) = -\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} = -\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} + \hat{r}_1(\xi, \eta), \quad (49)$$

где

$$\hat{r}_1(\xi, \eta) = -\frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_3 - \varepsilon_2) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\left[(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2) \right] (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}; \quad (50)$$

$$\hat{F}_2(\xi, \eta) = -\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} = -\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} + \hat{f}_2(\xi, \eta), \quad (51)$$

где

$$\hat{f}_2(\xi, \eta) = \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\left[(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2) \right] (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)}; \quad (52)$$

$$\hat{G}_2(\xi, \eta) = \frac{(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} = \frac{1}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} + \hat{g}_2(\xi, \eta), \quad (53)$$

где

$$\hat{g}_2(\xi, \eta) = -\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\left[(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2) \right] (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)}; \quad (54)$$

$$\hat{G}_3(\xi, \eta) = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} + \hat{g}_3(\xi, \eta), \quad (55)$$

где

$$\hat{g}_3(\xi, \eta) = -\frac{\varepsilon_2(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\left[(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \exp(-2h\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2) \right] \left[(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2) \right]}. \quad (56)$$

Тогда, применив к (49), (51), (53) и (55) обратное преобразование Фурье, получим

$$R_1(u, v) = -\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \delta(u) \delta(v) + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{r}_1(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v}, \quad (57)$$

$$F_2(u, v) = -\frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} \delta(u) \delta(v) + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{f}_2(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v}, \quad (58)$$

$$G_2(u, v) = \frac{1}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \delta(u) \delta(v) + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{g}_2(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v}, \quad (59)$$

$$G_3(u, v) = \frac{\varepsilon_2}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} \delta(u) \delta(v) + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{g}_3(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v}. \quad (60)$$

Именно выражения (57), (58), (59) и (60) будут использоваться в формулах (45), (46) и (47) для нахождения потенциалов системы зарядов.

Определение функций $H_j(\tilde{x}, \tilde{z})$

В предыдущем разделе мы показали, как найти потенциал снаружи острия, расположенного рядом со слоистой структурой, если известен потенциал зарядов острия снаружи. При решении задачи, в разделе 2, мы представили осесимметричный потенциал снаружи острия линейной комбинации функций в полуплоскости (\tilde{x}, \tilde{z}) при $\tilde{x} \geq 0$. С учетом осевой симметрии, этот потенциал в трех измерениях можно записать в виде:

$$\tilde{\Phi}_{tip,1}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \mathbb{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad (61)$$

где

$$\mathbb{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = J_0 \left(\lambda_j \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - \tilde{z}} \right) K_0 \left(\lambda_j \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} / \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - \tilde{z}} \right). \quad (62)$$

Подставим (61) в выражение (45), выраженное в нормированных координатах. Тогда, при $\tilde{y} = 0$, получим

$$\tilde{\Phi}_1(\tilde{x}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \mathbb{F}_j(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) + \sum_{j=1}^N A_j \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(u, v) \mathbb{F}_j(\tilde{x} - u, -v, 2\tilde{z}_1 - \tilde{z}) dudv.$$

Подставляя сюда выражение (57), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(\tilde{x}, \tilde{z}) = & \sum_{j=1}^N A_j \mathbb{F}_j(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) - \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \sum_{j=1}^N A_j \mathbb{F}_j(\tilde{x}, 0, 2\tilde{z}_1 - \tilde{z}) + \\ & + \sum_{j=1}^N A_j \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_1(u, v) \mathbb{F}_j(\tilde{x} - u, -v, 2\tilde{z}_1 - \tilde{z}) dudv, \end{aligned} \quad (63)$$

где $r_1(u, v) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{r}_1(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v}$, а $\hat{r}_1(\xi, \eta)$ вычисляется по формуле (50), $\mathbb{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ — по формуле (62), а h — толщина пленки.

Из (63) следует, что функции $H_j(\tilde{x}, \tilde{z})$ из (9) представляются в виде

$$H_j(\tilde{x}, \tilde{z}) = -\frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \mathbb{F}_j(\tilde{x}, 0, 2\tilde{z}_1 - \tilde{z}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_1(u, v) \mathbb{F}_j(\tilde{x} - u, -v, 2\tilde{z}_1 - \tilde{z}) dudv. \quad (64)$$

Вычислив функцию $H_j(\tilde{x}, \tilde{z})$ из (64), найдем все коэффициенты уравнений задачи (14), (15) и затем все коэффициенты разложений A_j , B_j . Зная эти коэффициенты из (63) и (11), получим потенциал в плоскости (\tilde{x}, \tilde{z}) , как снаружи острия в первой среде, так и внутри острия.

Наконец, по известным значениям A_j , выпишем выражения для потенциала острия в пленке (среде с ε_2) и полупространстве с ε_3 . Из (46), (58), (59) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2(\tilde{x}, \tilde{z}) = & -\frac{2\varepsilon_1(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} \sum_{j=1}^N A_j \mathbb{F}_j(\tilde{x}, 0, 2\tilde{z}_2 - \tilde{z}) + 2\varepsilon_1 \sum_{j=1}^N A_j \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(u, v) \mathbb{F}_j(\tilde{x} - u, -v, 2\tilde{z}_2 - \tilde{z}) dudv + \\ & + \frac{2\varepsilon_1}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \sum_{j=1}^N A_j \mathbb{F}_j(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) + 2\varepsilon_1 \sum_{j=1}^N A_j \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(u, v) \mathbb{F}_j(\tilde{x} - u, -v, \tilde{z}) dudv, \end{aligned} \quad (65)$$

где

$\mathbb{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ вычисляется по формуле (62);

$$f_2(u, v) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{f}_2(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v}, \text{ причем } \hat{f}_2(\xi, \eta) \text{ определяется (52);}$$

$$g_2(u, v) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{g}_2(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v}, \text{ а } \hat{g}_2(\xi, \eta) \text{ определяется (54).}$$

Аналогично, из (47), (60), получим

$$\tilde{\Phi}_3(\tilde{x}, \tilde{z}) = \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2)} \sum_{j=1}^N A_j \mathbb{F}_j(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) + 4\varepsilon_1 \sum_{j=1}^N A_j \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_3(u, v) \mathbb{F}_j(\tilde{x} - u, -v, \tilde{z}) dudv, \quad (66)$$

где $g_3(u, v) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \hat{g}_3(\xi, \eta) e^{i\xi u + i\eta v}$, а $\hat{g}_3(\xi, \eta)$ вычисляется по формуле (56), $\mathbb{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ — по формуле (62).

В итоге, формулы (63), (65) и (66) решают задачу нахождения потенциала снаружи острия и в слоистой структуре по известным значениям A_j .

Исследование фокального распределения электрического поля у вершины наноострия вблизи плоской поверхности слоистой структуры

Были проведены численные расчеты для серебряного острия вблизи плоской слоистой структуры. Уравнения (14), (15) решались методом коллокаций в отдельных точках границы вблизи вершины острия. Диэлектрическая проницаемость металла острия приближенно описывалась формулой Друдэ $\varepsilon_m = 1 - \omega_p^2 / (\omega^2 + i\omega\Gamma)$, где ω_p — плазменная частота металла, Γ — коэффициент, учитывающий потери. Для серебра принимались следующие параметры: $\omega_p \approx 1,36 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$, $\Gamma \approx 2 \times 10^{14} \text{ с}^{-1}$ [13]. Удобно выражать ε_m через нормированную частоту $\varpi = \omega / \omega_p$ и нормированный коэффициент поглощения $\gamma = \Gamma / \omega_p$ по формуле $\varepsilon_m = 1 - 1 / (\varpi^2 + i\varpi\gamma)$. Для серебра $\gamma = 0,01471$.

В данной работе мы исследовали распределение максимального значения электрического поля за период колебаний E_a в плоскости (\tilde{x}, \tilde{z}) . Метод вычисления следующий [14]. Сначала в рассматриваемой точке находились комплексные компоненты $\tilde{E}_{\tilde{x}} = -\partial\tilde{\Phi} / \partial\tilde{x}$ и $\tilde{E}_{\tilde{z}} = -\partial\tilde{\Phi} / \partial\tilde{z}$ комплексного вектора электрического поля. Затем, находились действительные составляющие компонент

$\text{Re}(\tilde{E}_{\tilde{x}} e^{-i\omega t})$ и $\text{Re}(\tilde{E}_{\tilde{z}} e^{-i\omega t})$ в некоторый момент времени t . И, наконец, вычислялась максимальное значение электрического поля за период

$$E_a = \max_{0 \leq \omega t \leq 2\pi} \sqrt{\left[\text{Re}(\tilde{E}_{\tilde{x}} e^{-i\omega t}) \right]^2 + \left[\text{Re}(\tilde{E}_{\tilde{z}} e^{-i\omega t}) \right]^2}.$$

Сначала были проведены расчеты распределения E_a для серебряного острия, расположенного в вакууме $\varepsilon_1 = 1$, рядом со слоистой структурой, состоящей из пленки толщины $h = 1$ диэлектрика с $\varepsilon_2 = 4$, и полупространства с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_3 = 2$. Границы пленки определяются уравнениями $\tilde{z} = \tilde{z}_1 = 1$ и $\tilde{z} = \tilde{z}_2 = 2$. В этой геометрии вершина металлического острия расположена на расстоянии $\Delta\tilde{z} = 0,5$ от поверхности пленки. На рис. 3, а показаны распределения $E_a(\tilde{z})$ при различных значениях $\tilde{x} = 0$, $\tilde{x} = 0,2$, $\tilde{x} = 0,4$, $\tilde{x} = 0,6$ на частоте $\varpi = 0,62252$. Хорошо видны скачки поля на границе острия и на границах пленки. Распределения поля вблизи второй границы пленки показаны более подробно на рис. 3, б с увеличением по оси ординат. Заметим, что при $\tilde{x} = 0$ электрическое поле нормально к граничным поверхностям острия и пленки (в силу симметрии задачи), поэтому скачки E_a соответствуют скачкам модуля диэлектрической проницаемости в полном соответствии с граничными условиями.

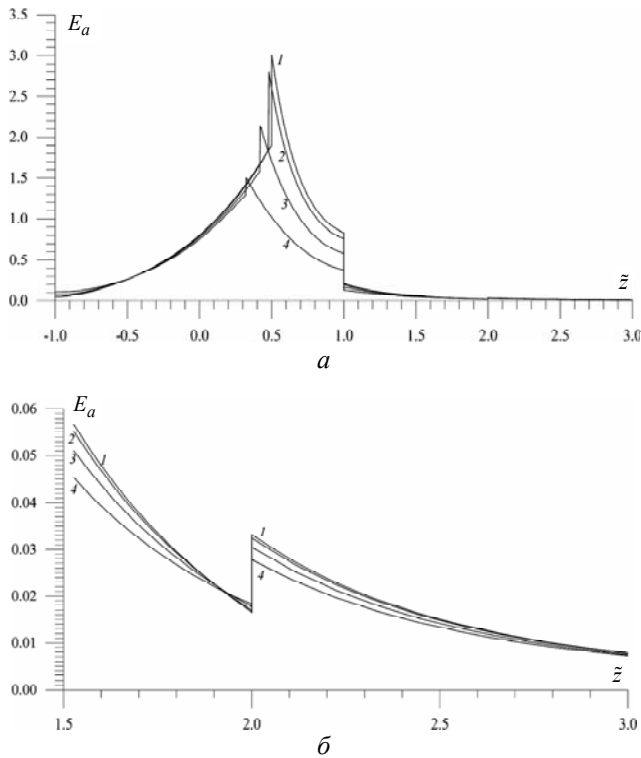


Рис. 3. Зависимости максимального поля E_a от координаты \tilde{z} при различных значениях $\tilde{x}=0$ (кривая 1), $\tilde{x}=0,2$ (кривая 2), $\tilde{x}=0,4$ (кривая 3), $\tilde{x}=0,6$ (кривая 4) на частоте $\omega=0,62252$ для серебряного острия $\varepsilon_m = \varepsilon_{Ag}$ над диэлектрической пленкой $\varepsilon_2 = 4$. Параметры задачи $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_3 = 2$, $\tilde{z}_1 = 1$, $\tilde{z}_2 = 2$. Показан переход через все границы задачи (а) и через вторую границу пленки более подробно (б).

На рис. 4 показаны распределения $E_a(\tilde{z})$, аналогичные распределениям рис. 3, для случая, когда пленка с $\varepsilon_2 = 4$ заменена на серебряную пленку с $\varepsilon_2 = \varepsilon_m = \varepsilon_{Ag}$ в той же геометрии. Все остальные параметры были такие же, как в предыдущем случае.

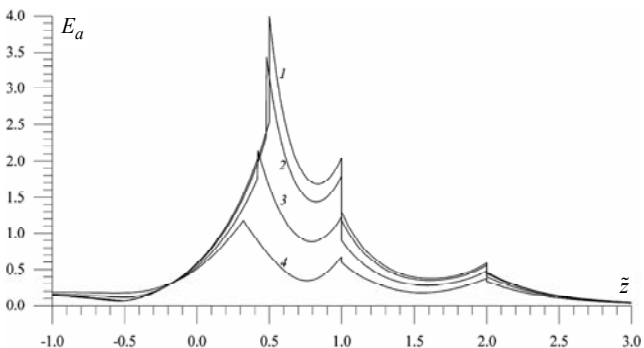


Рис. 4. Зависимости максимального поля E_a от координаты \tilde{z} при различных значениях $\tilde{x}=0$ (кривая 1), $\tilde{x}=0,2$ (кривая 2), $\tilde{x}=0,4$ (кривая 3), $\tilde{x}=0,6$ (кривая 4) на частоте $\omega=0,62252$ для серебряного острия $\varepsilon_m = \varepsilon_{Ag}$ над серебряной пленкой. Параметры задачи $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{Ag}$, $\varepsilon_3 = 2$, $\tilde{z}_1 = 1$, $\tilde{z}_2 = 2$.

Из рис. 4 видно, что по сравнению с предыдущим рассмотрением в данном случае серебряной пленки распределение поля более остро локализовано в окрестности фокуса, поле от острия проникает значительно лучше в полупространство за пленкой с $\varepsilon_3 = 2$. Кроме того, поле в фокальном пятне на поверхности серебряной пленки ближе по величине к полю на вершине острия по сравнению с предыдущим случаем (см. рис. 3). Очевидно, что указанные свойства могут иметь технологические применения.

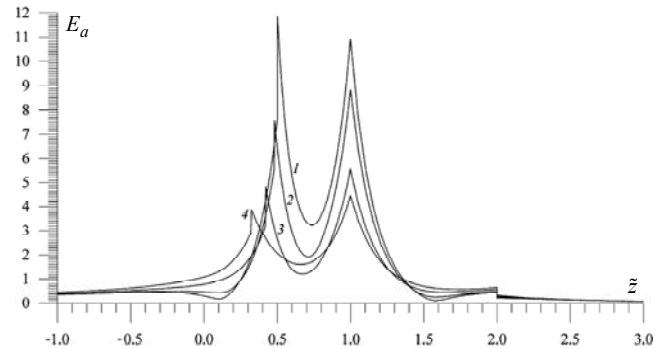


Рис. 5. Зависимости максимального поля E_a от координаты \tilde{z} при различных значениях $\tilde{x}=0$ (кривая 1), $\tilde{x}=0,2$ (кривая 2), $\tilde{x}=0,4$ (кривая 3), $\tilde{x}=0,6$ (кривая 4) на частоте $\omega=0,62252$ для серебряного острия $\varepsilon_m = \varepsilon_{Ag}$ над металлической пленкой с $\varepsilon_2 = -1 + i0,042$. Параметры задачи $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_3 = 2$, $\tilde{z}_1 = 1$, $\tilde{z}_2 = 2$.

Наконец, был рассмотрен случай, когда пленка сделана из металла с такой диэлектрической проницаемостью, что на рассматриваемой частоте $\omega=0,62252$ его действительная часть диэлектрической проницаемости равна минус единице. То, что в этом случае можно ожидать необычную фокусировку подсказал рассмотренный ранее пример № 2. В расчетах $E_a(\tilde{z})$, показанных на рис. 5, геометрия задачи была такая же, что и в предыдущих случаях, а диэлектрические проницаемости сред принимались следующими: $\varepsilon_m = \varepsilon_{Ag}$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1 + i0,042$, $\varepsilon_3 = 2$. Распределения рис. 5 показывают, что максимальное поле в ближайшей к острию точке на поверхности пленки практически равно максимальному полю на вершине острия. Это явление может быть использовано для изучения рамановского излучения от молекул на поверхности металлической пленки при ее сканировании возбужденным наноострием.

Заключение

Разработан метод нахождения фокального распределения электрического поля в окрестности нановершины металлического микроострия, рас-

положенного вблизи слоистой пленочной структуры, при возбуждении вершины сходящейся по поверхности острия, к вершине, поверхностной плазмонной ТМ-волной. В качестве примера такой пленочной структуры рассматривалась одна пленка материала, расположенная на плоской границе полупространства. Предложенный метод может быть без труда обобщен на случай многопленочной структуры.

Результаты расчетов показали, что пленка вблизи острия несколько усиливает фокусировку по сравнению со свободным острием. Показано, что присутствие металлической пленки вблизи острия не разрушает фокусирующих свойств наноострия, что позволяет исследовать рамановское (комбинационное) рассеяние молекул находящихся на плоской металлической поверхности в области фокусировки.

Следует отметить, что возможные приложения полученных результатов не ограничиваются исследованием рамановского рассеяния молекул на поверхности плоскостройной структуры. Кажется перспективным использование фокального наноразмерного пятна для засвечивания фоторезиста и получения, таким образом, поверхностных наноструктур, которые потом можно использовать в качестве шаблона для копирования известными методами нанолитографии (roll-to-roll nanoimprint lithography [15, 16]). Также, результаты настоящей работы могут быть применены для создания наногradientных тонкопленочных структур [17, 18, 19].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации (научный проект «Создание электрооптических gradientных тонкопленочных структур для прецизионной оптики и ана-

литического приборостроения». Соглашение о предоставлении субсидии с Министерством образования и науки Российской Федерации от 23.10.2014 г. № 14.579.21.0066, уникальный идентификатор RFMEFI 57914 X 0066).

ЛИТЕРАТУРА

1. De Angelis F. et al. // Nature Nanotech., 2010. Vol. 5. P. 67.
2. Frey H. G., Keilmann F., Kriele, A. Guckenberger R. // Appl. Phys. Lett. 2002. Vol. 81. P. 5030.
3. Stockman M. I. // Phys. Rev. Lett., 2004. Vol. 93. P. 137404.
4. Petrin A. B. // High Temperature 2012. Vol. 50. No. 1. P. 15.
5. Giugni A., Allione M., Torre B. et al. // J. Opt. 2014. Vol. 16. P. 114003.
6. Giugni A., Torre B., Toma A. et al. // Nature Nanotech. 2013. Vol. 8. No. 11. P. 845.
7. Петрин А. Б. // Успехи прикладной физики. 2015. Т. 3. № 3. С. 236.
8. Петрин А. Б. // Квантовая электроника. 2015. Т. 45. № 7. С. 658.
9. Петрин А. Б. // Квантовая электроника, (представлено 14.03.2016).
10. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука, 1967.
11. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.
12. Численные методы теории дифракции (Математика. Новое в зарубежной науке. Вып. 29): Сб. статей. Пер. с англ. (М.: Мир, 1982).
13. Fox M. Optical Properties of Solids — N.Y.: Oxford University Press Inc. 2003.
14. Петрин А. Б. // Квантовая электроника. 2016. Т. 46. № 2. С. 159.
15. Kooy N. et al. // Nanoscale Research Letters. 2014. Vol. 9. P. 320.
16. Lim H. et al. // Microelectronic Engineering. 2014. Vol. 123. P. 18.
17. Shvartsburg A.B. et al. // Opt. Mater. Express. 2014. Vol. 4. No. 11. P. 2250.
18. Шварцбург А. Б. // УФН. 2005. Т. 175. № 8. С. 833.
19. Шварцбург А. Б. // УФН. 2007. Т. 177. № 1. С. 43.

On the nanofocusing of light at the apex of a metal microtip near the multilayer thin film structure

A. B. Petrin

Institute for High Temperatures
Bld. 2, 13 Izhorskaya str., Moscow, 125412, Russia
E-mail: a_petrin@mail.ru

Received July 8, 2016

Consideration is given to the focusing of electromagnetic energy at optical frequencies into a nanoscale spatial region in the vicinity of the nanoapex of the metal microtip located near a layered structure consisting of planar dielectric and/or metal layers. It is assumed that the nanofocusing is

produced by the surface plasmon TM wave on the microtip symmetrically focused on the nanoapex. The top of the metal in the vicinity of the nanoapex is approximated by the surface of the paraboloid of revolution. A numerical method for finding the electric field near the nanoapex including the layered structure is developed. The calculation results showed that compared to a single microtip the presence of the structure leads to further concentration of the electric field near the nanoapex. It turned out that the most important influence on the nanofocusing has the top film of the layered structure.

PACS: 78.67.-n; 68.37.Uv; 73.20.Mf

Keywords: nanofocusing, surface plasmons, plasmonic waveguide.

REFERENCES

1. F. De Angelis et al., *Nature Nanotech.* **5**, 67 (2010).
2. H. G. Frey, F. Keilmann, A. Kriele, and R. Guckenberger, *Appl. Phys. Lett.*, **81**, 5030 (2002).
3. M. I. Stockman, *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 137404 (2004).
4. A. B. Petrin, *High Temperature* **50**, 15 (2012).
5. A. Giugni, M. Allione, B. Torre, et al., *J. Opt.* **16**, 114003 (2014).
6. A. Giugni, B. Torre, A. Toma, et al., *Nature Nanotech.*, **8**, 845 (2013).
7. A. B. Petrin, *Uspekhi Prikladnoi Fiziki* **3**, 236 (2015).
8. A. B. Petrin, *Quantum Electronics* **45**, 658 (2015).
9. A. B. Petrin, *Quantum Electronics* (2016, in press).
10. A. Ango, *Mathematics for Electro and Radio Engineers* (Nauka, Moscow, 1967) [in Russian].
11. A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].
12. *Numerical Methods of Diffraction Theory* (Mathematics. News of Foreign Science. Issue 29): Collected articles. Translated from English (Mir, Moscow, 1982) [in Russian].
13. M. Fox, *Optical Properties of Solids* (N. Y.: Oxford University Press Inc. 2003).
14. A. B. Petrin, *Quantum Electronics* **46**, 159 (2016).
15. N. Kooy et al., *Nanoscale Research Letters* **9**, 320 (2014).
16. H. Lim et al., *Microelectronic Engineering*, **123**, 18 (2014).
17. A. B. Shvartsburg et al., *Opt. Mater. Express*, **4**, 2250 (2014).
18. A. B. Shvartsburg, *Physics-Uspekhi* **175**, 833 (2005).
19. A. B. Shvartsburg, *Physics-Uspekhi* **177**, 43 (2007).