

УДК 532.529

**Моделирование влияния динамики изменения внутреннего пространства ванны алюминиевого электролизёра на МГД-процессы***Н. П. Савенкова, Р. Н. Кузьмин, С. В. Анпилов, А. В. Калмыков*

*В работе описана трёхмерная и трёхфазная математическая модель математическая процесса промышленного электролиза алюминия, которая основана на системе уравнений Навье-Стокса, системе уравнений Максвелла с использованием уравнения для поиска температуры в рабочем пространстве ванны. Характерной особенностью данной модели является непосредственное влияние температуры на форму рабочего пространства ванны, которое проявляется в размывии и кристаллизации настывли и гарнисажа алюминиевого электролизёра. С помощью представленной математической модели проводится численное исследование динамики изменения настывли при вариации начальной конфигурации рабочего пространства ванны. На основе графиков раздела сред для различной формы гарнисажа сделан вывод о наиболее МГД-стабильной форме электролизной ванны.*

PACS: 02.70.Bf, 47.10.ad, 03.50.De

*Ключевые слова:* электролиз алюминия, уравнение Навье-Стокса, система уравнений Максвелла.**Введение**

Алюминиевый электролизёр представляет собой сложный нелинейный объект с большим количеством параметров, влияющих на динамику процесса электролиза и конечный выход металла по току [1, 2]. Таковыми параметрами являются: плотность электрического тока, которую пропускают через ванну, толщина слоя жидкого металла, состав электролита (его криолитовое отношение) и многие другие. В данной работе рассматривается влияние различных форм ванн, динамически изменяющихся в процессе электролиза, на МГД-процессы, в частности, на колебания границы раздела фаз алюминий—электролит.

Внутренняя форма электролизной ванны является таким же динамическим объектом, влияющим на протекания процесса электролиза, как и

граница раздела фаз или зона обратного окисления металла. Как показывают измерения, проведённые на реальных электролизных ваннах, форма настывли (тугоплавкого настенного осадка) и внутренней футеровки ванны оказывает влияние на МГД-устойчивость, в частности, может приводить к увеличению амплитуды колебаний поверхности расплавленного алюминия. Основной причиной изменения настывли является его плавление под воздействием высоких температур с последующим размывием. Согласно экспериментальным наблюдениям сотрудников ИТЦ РУСАЛ, показано, что оптимальная работа электролизёра достигается при наведении настывли непосредственно под проекцию анодов, при этом форма скоса должна быть вогнутой [1].

**Постановка задачи**

Алюминиевый электролизёр представляет собой ванну, имеющей форму сглаженного параллелепипеда (см. рис. 1). В условиях рассматриваемой в работе развитой стадии процесса, внизу ванны находится жидкий металл — алюминий, сверху находится расплавленный глинозем со специальными добавками, под анодами в электролите присутствует газ, образовавшийся в процессе реакции. Сверху в ванну на небольшую глубину погружены графитовые электроды.

---

Савенкова Надежда Петровна, ведущий научный сотрудник.  
Кузьмин Рунар Николаевич, профессор.  
Анпилов Сергей Валерьевич, младший научный сотрудник.  
Калмыков Алексей Вадимович, аспирант.  
МГУ им. М. В. Ломоносова.  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, 1  
Тел. 8 (916) 092-27-12.  
E-mail: nsavenkova@cs.msu.su; alex\_2391@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24 мая 2016 г.

© Савенкова Н. П., Кузьмин Р. Н., Анпилов С. В., Калмыков А. В., 2016

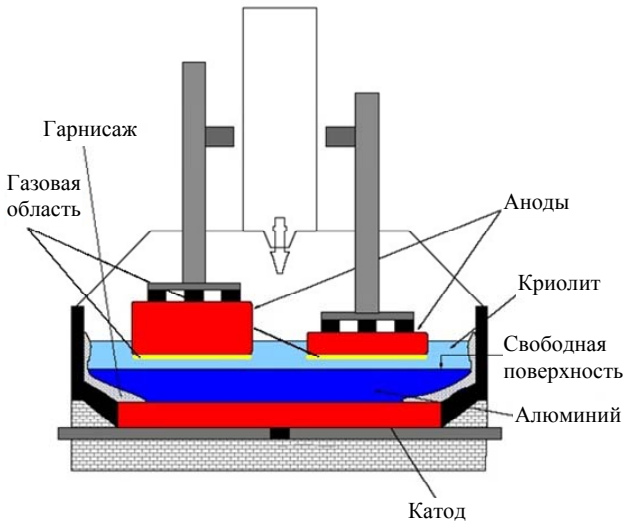


Рис. 1. Схема многоанодного электролизера в поперечном срезе.

С физической точки зрения, электроды являются анодом, часть дна ванны и расплавленный алюминий — катодом, расплавленный глинозем — электролитом. На катод и анод подается разность потенциалов, в верхней среде (электролите) присутствуют носители электрического тока — положительно и отрицательно заряженные ионы. В результате реакций, протекающих в электролите, образуется первичный алюминий и газообразная среда. Основными являются реакции образования солей алюминия вблизи анода и восстановления этих солей до металла вблизи катода или границы раздела сред алюминий—электролит.

Таким образом, в процессе имеется три основных среды: алюминий, электролит, газ [3, 4]. Из натурных данных известно, что электрохимические реакции идут вблизи электродов: анода и катода (поверхности жидкого алюминия). Поэтому возможно использование упрощенной физической модели, в которой задается область протекания реакций и соответственно распределенные по этой области источники и стоки вещества основных трех типов.

### Математическая модель

В основе модели находится многожидкостной или многоскоростной подход [5, 6]. Предполагается, что в гетерогенной смеси фаза занимает лишь часть элементарного объема, в связи с этим необходимо использовать величины  $\alpha_m$  ( $m = 1, 2, 3$ ), характеризующие доли объема смеси, занимаемые каждой фазой:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1. \quad (1)$$

Здесь и далее величины с индексом  $m = 1$  относятся к среде алюминия, с индексом 2 — к среде криолита, с индексом 3 — к газовой среде. Уравнение (1) является уравнением объемного баланса смеси.

В каждой точке объема, занятого смесью, также вводятся макроскопические скорости компонент смеси  $\vec{v}_m = (u_m, v_m, w_m)$ , давление  $p$ , напряженность магнитного поля  $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$ , сила Лоренца  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ , плотность электрического тока  $\vec{j} = (j_x, j_y, j_z)$  и температура смеси  $T$ . Все вышеперечисленные величины являются основными неизвестными математической модели.

Для расчёта изменения составляющей жидкой фазы используется уравнения неразрывности для всех трёх компонент смеси, с учётом описанного выше рабочей гипотезы они выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial \alpha_m \rho_m}{\partial t} + \text{div}(\alpha_m \rho_m \vec{v}_m) = J_m,$$

где  $\rho_m$  — плотность  $m$ -ой фазы, которая является постоянной,  $J_m$  — слагаемое, отвечающее за поступление  $m$ -ой фазы за счёт химической реакции. Учитывая неоднородность химической реакции в пространстве ванны  $J_m$  справедливо следующее:

- для фазы алюминия определена константа  $J_1$ , равная нулю везде, кроме границы раздела фаз алюминий — электролит;
- для фазы газа определена константа  $J_3$ , равная нулю везде, кроме области под анодами;
- для фазы электролита константа химической реакции  $J_2$  определена таким образом, что:  $J_2 = -J_1$  на границе раздела фаз алюминий — электролит,  $J_2 = -J_3$  в области под анодами;
- в каждой точке рабочего пространства электролизной ванны сумма констант массового поступления равна нулю.

Принимая во внимание закон сохранения массы при различных физико-химических превращениях, в любой точке пространства ванны выполняется следующее соотношение:

$$\sum_{m=1,2,3} J_m = 0.$$

Для описания изменения импульса в каждой точке рабочего пространства алюминиевого электролизера используется уравнение Навье-Стокса, которое с учётом гипотезы модели выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \alpha_m \rho_m \bar{v}_m}{\partial t} + (\bar{v}_m, \bar{\nabla})(\alpha_m \rho_m \bar{v}_m) = -\alpha_m \nabla p + \mu_m \Delta \bar{v}_m + \alpha_m \rho_m \bar{g} + \bar{P}_m + \alpha_m \bar{F}_m,$$

где  $\mu_m$  — вязкости среды,  $F_m$  — объёмная плотность силы, обусловленная электромагнитным полем (сила Лоренца):

$$\bar{F}_m = \mu_0 [\text{rot} \bar{H} \times \bar{H}],$$

$P_m$  — объёмная плотность силы трения (стоксовой силы) между компонентами смеси за счёт вязких сил, которая определяется из соотношений:

$$\bar{P}_1 = -\bar{P}_2 = \alpha_1 \alpha_2 K (\bar{v}_1 - \bar{v}_2),$$

где  $K = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$ .

Для уравнения Навье-Стокса на границе области выполняется условие прилипания:

$$\bar{v}_m|_r = 0.$$

Модель для поиска давления удобно получить путём сложения уравнений Навье-Стокса для трёх фаз с учётом выполнения уравнения баланса [7]:

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \left( \sum_{m=1,2,3} \left( \frac{\alpha_m}{\rho_m} \right) \bar{\nabla} p \right) &= \nabla (\bar{L}), \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= (\bar{L})_n / \sum_{m=1,2,3} \left( \frac{\alpha_m}{\rho_m} \right), \end{aligned} \right.$$

где

$$\bar{L} = \sum_{m=1,2,3} \left[ \begin{aligned} &(\bar{v}_m, \bar{\nabla})(\alpha_m \bar{v}_m) + \frac{\alpha_m \mu_m}{\rho_m} \Delta \bar{v}_m + \alpha_m \bar{g} \\ &+ \frac{1}{\rho_m} \sum_{m \neq n} \alpha_m \alpha_n (\alpha_m \mu_m + \alpha_n \mu_n) (\bar{v}_m - \bar{v}_n) + \\ &+ \frac{\alpha_m}{\rho_m} \bar{F}_m \end{aligned} \right].$$

Уравнение для поиска потенциала электрического поля получается из уравнения для дивергенции электрического поля и его связи с потенциалом [8]. Ионы растворённых в криолите бокситов создают области, в которых суммарный заряд смеси отличен от нуля, в частности, вблизи анода и катода. Однако толщина таких областей составляет порядка  $10^{-5}$  м, что на много порядков меньше, чем шаг используемой в расчёте сетки. В связи с этим смесь расплавов считается квазинейтраль-

ной, а уравнение для поиска потенциала принимает вид:

$$\nabla \left( \sum_{m=1,2,3} (\alpha_m \sigma_m) \nabla \varphi \right) = \nabla \left( \mu_0 [\bar{v}, \bar{H}] \sum_{m=1,2,3} (\alpha_m \sigma_m) \right),$$

где  $\sigma_m$  — проводимость  $m$ -ой фазы.

Потенциал на аноде считается известным. В непроводящей части границы ванны нормальная производная потенциала равна нулю. Таким образом, граничные условия имеют вид:

$$\varphi|_{\text{анод}} = 4, \quad \varphi|_{\text{катод}} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_r = 0.$$

В силу возникновения дополнительного индуцированного электрического поля, вызванного движением среды, плотность электрического тока получается из соотношения:

$$\bar{j} = \sum_{m=1,2,3} (\alpha_m \sigma_m) (\mu_0 [\bar{v}, \bar{H}] - \nabla \varphi).$$

Токами смещения пренебрегаем, поскольку изменение электрического потенциала в ванне со временем мало.

Магнитное поле является соленоидальным векторным полем и, следовательно, имеет векторный потенциал  $\bar{A}$ , для нахождения которого воспользуемся калибровкой Кулона, которая имеет вид:

$$\text{div} \bar{A} = 0.$$

Исходя из оценки вязкости магнитного поля, при моделировании можно использовать квазистационарное приближение. В результате получим следующую задачу Неймана для поиска векторного потенциала:

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \bar{A} &= -\bar{j} \\ \frac{\partial \bar{A}}{\partial n}|_r &= 0 \end{aligned} \right.$$

Используя векторный потенциал, найдём само магнитное поле по формуле  $\bar{H} = \text{rot} \bar{A}$ .

Для поиска температуры в рабочем пространстве ванны ставится модель, в которой неизвестная величина температуры  $T$  является скалярной характеристикой смеси и изменяется за счёт конвекции, градиента теплового потока и источника поступления джоулева тепла:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho T}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho T \vec{v}) = \frac{1}{\zeta} \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(T)) + \frac{1}{\zeta}(\vec{j}, \vec{E}), \\ \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\substack{\text{гарнисаж} \\ \text{настыль}}} = \frac{1}{\zeta} Q, \\ T|_{\substack{\text{верхняя} \\ \text{корка}}} = T_0. \end{cases}$$

Здесь  $T(x, y, z)$  — температура в расчётном объёме,  $\zeta$  — средневзвешенная теплоёмкость,  $Q$  — константа теплового потока на границе электролизной ванны,  $T_0$  — температура корки образующейся во время электролиза.

### Численный эксперимент

Ниже описываются результаты численных расчётов [9, 10] для различных начальных форм настыли:

- настыль подводится под проекцию анода;
- настыль не доходит до проекции анода;
- настыль заходит за границу проекции анода.

Приводится графическая иллюстрация изменения рабочего пространства ванны при плавлении и нарастании боковых стенок ванны. Обсуждаются графики динамики МПР (поверхности раздела фаз) для всех трёх случаев начальной формы настыли.

1. Математическое моделирование изменения формы рабочего пространства ванны для случая, когда в начальный момент форма внутреннего объёма ванны приближается линейным скосом под проекцию анодов. Данное приближение является довольно грубым, однако удовлетворяет основному требованию для формы настыли. На рис. 2 представлены график распределения температур в срезе XZ в момент времени  $t = 0$  с и в момент времени  $t = 16$  с.

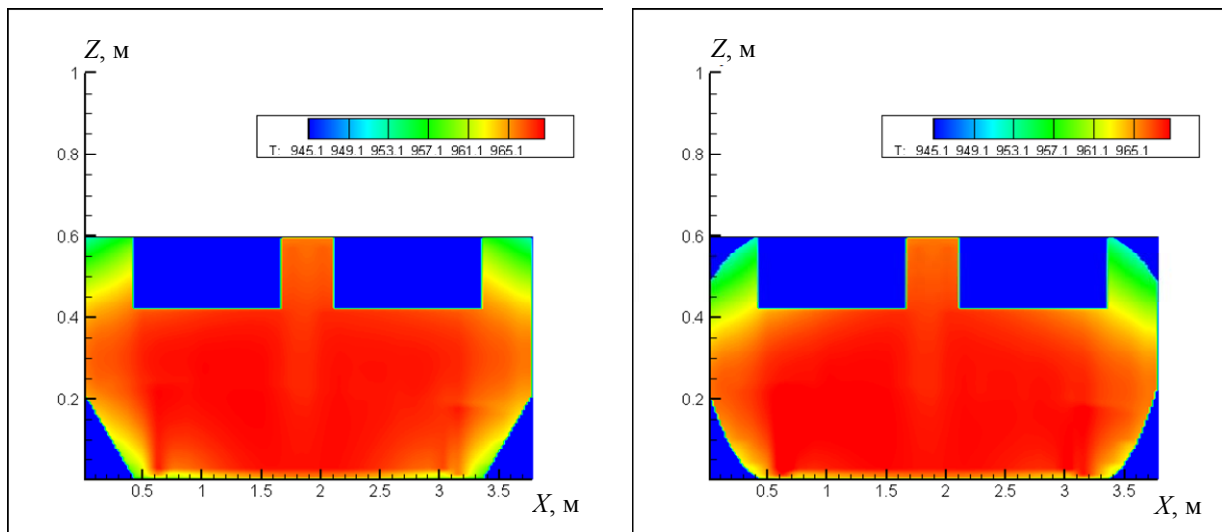


Рис. 2. Распределение температур в момент времени  $t = 0$  с и в момент времени  $t = 16$  с.

Из рис. 2 видно, что нижняя часть ванны размывается, приближаясь к форме, которая, из наблюдения работы ванны в цехе, считается оптимальной с точки зрения МГД стабильности. Так же видно нарастание гарнисажа сверху, рядом с анодами. Данное изменение обусловлено остыванием верхней части ванны и смещением наиболее горячей зоны ближе ко дну ванны. Заметим, что именно такую форму рабочего пространства стабильно работающей ванны фиксируют технологи в промышленном производстве. Характерная величина изменения рабочего пространства ванны равны 2 см.

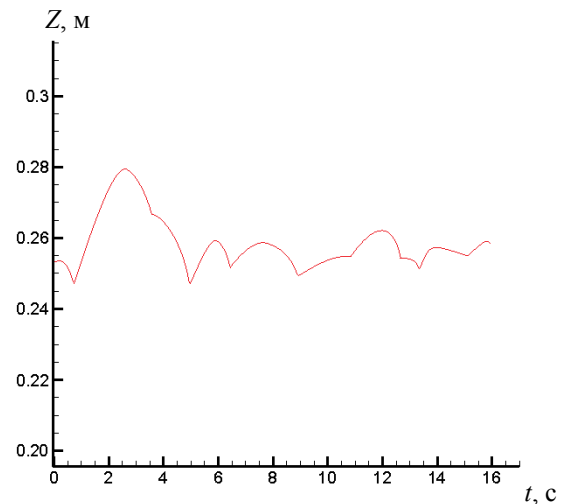


Рис. 3. Динамика МПР.

Динамика МПР, представленная на рис. 3, имеет существенный подъём границы раздела в первые четыре секунды расчётного времени. Данное поведение связано с начальными распределениями основных величин, в частности с начальной формой рабочего пространства электролизной ванны. При этом средняя амплитуда колебаний границы раздела фаз в процессе электролиза не превышает 26 см.

2. Математическое моделирование динамики формы настыли в случае, когда настыль не дохо-

дит до проекции анода. В данном численном эксперименте рассматривается ситуация когда изначально берётся настыль, который не доходит до проекции анодов на дно ванны. Данная конфигурация считается заведомо менее устойчивой, чем в предыдущем численном эксперименте. На рис. 4 представлены график распределения температур в срезе  $XZ$  в момент времени  $t = 0$  с и в момент времени  $t = 16$  с. Характерная величина изменения рабочего пространства ванны равны 3,5 см.

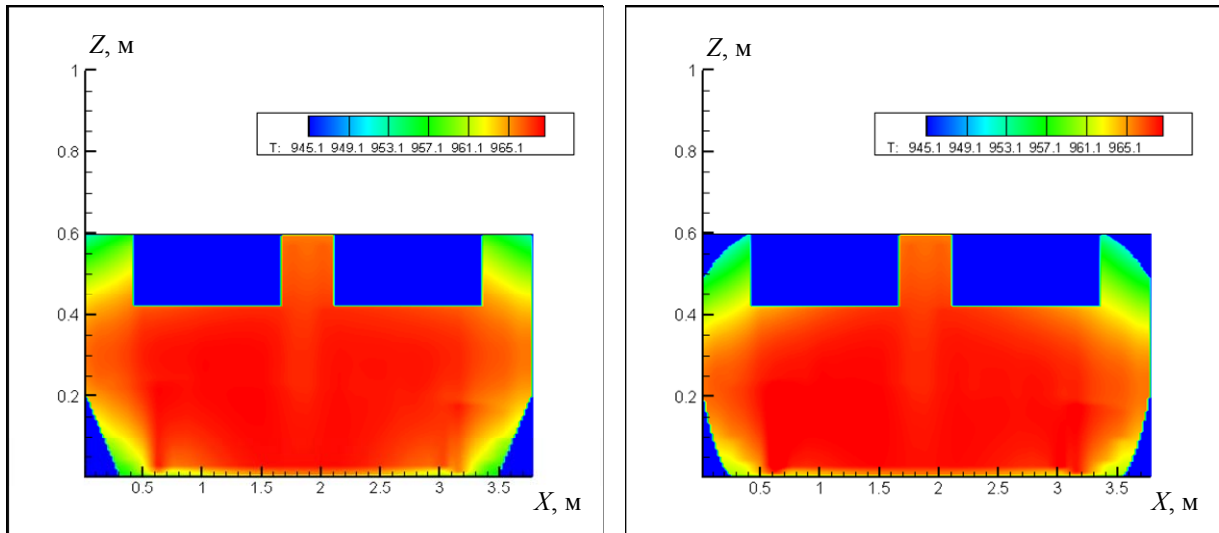


Рис. 4. Распределение температур в момент времени  $t = 0$  с и в момент времени  $t = 16$  с.

Как и в первом случае, настыль в момент времени  $t = 16$  с приближается к стабильной форме, однако не достигает ее и не доходит до проекции анодов на дно ванны. Таким образом, получившаяся конфигурация способствует развитию МГД-нестабильности, в частности, увеличивается амплитуда колебаний поверхности раздела фаз, что показано на рис. 5.

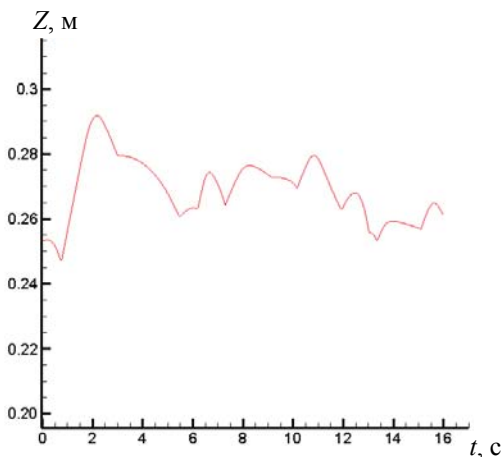


Рис. 5. Динамика МПР.

Динамика МПР, представленная на рис. 5, имеет сходный с рис. 3 вид, она имеет скачок в первые 5 секунд расчёта, но в дальнейшем колебания границы раздела относительно стабилизируются. Однако в представленном численном эксперименте амплитуда начального подъёма границы выше, чем при стабильной форме ванны, последующие колебания так же имеют большую амплитуду, которая достигает 28 см, что говорит о возможном развитии МГД неустойчивости в дальнейшем.

3. Математическое моделирование изменения формы рабочего пространства ванны для случая, когда настыль заходит под проекцию анодов. Как и в предыдущих численных экспериментах, начальная форма представлена линейным скосом, который формирует благоприятные условия для возникновения МГД неустойчивости. На рис. 6 представлены график распределения температур в срезе  $XZ$  в момент времени  $t = 0$  с. И в момент времени  $t = 16$  с. Характерная величина изменения рабочего пространства ванны равны 4 см.

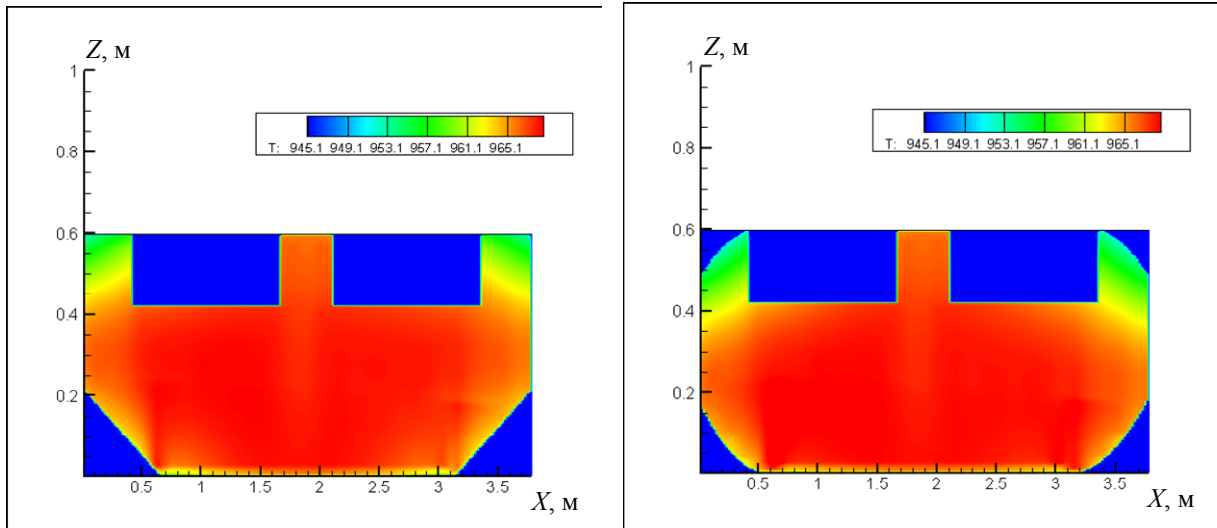


Рис. 6. Распределение температур в момент времени  $t = 0$  с и в момент времени  $t = 16$  с.

В текущем численном эксперименте наблюдается самое сильное размытие настыли в процессе работы электролизёра. В момент времени  $t = 16$  с рассчитанная форма ванны отличается от стабильной формы рабочего пространства, однако сравнивая с результирующей формой второго численного эксперимента, в данном численном эксперименте получается лучшее приближение к конфигурации, которая считается стабильной.

Соответственно из рис. 7 видно, что, как начальный подъём границы раздела, так и дальнейшие ее колебания меньше, чем во втором численном эксперименте. В сравнении со стабильной формой рабочего пространства ванны, данная форма настыли, исходя из графика МПР, является менее МГД-стабильной.

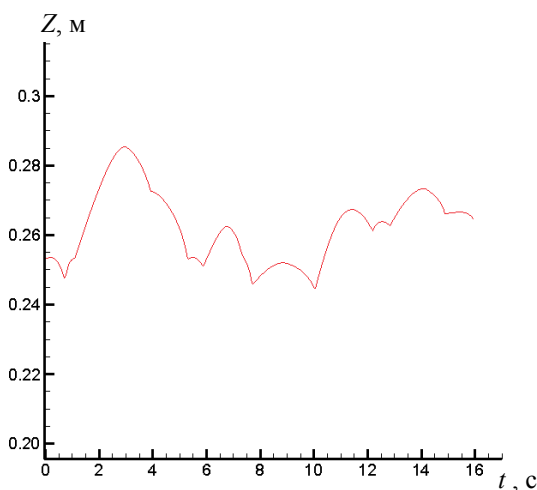


Рис. 7. Динамика МПР.

### Заключение

Проведённые при помощи разработанной ма-

тематической модели численные эксперименты показали, что наиболее МГД-стабильный режим работы ванны соответствует форме рабочего пространства для случая, когда настыль подходит непосредственно к границе проекции анодов на дно ванны (первый численный эксперимент). Результаты этого численного расчёта соответствуют практическим наблюдениям при промышленной эксплуатации ванны. При варьировании формы рабочего пространства ванны сравнивались еще два варианта начальной геометрии ванны (второй и третий численные эксперименты). Оказалось, что более МГД-стабильной работе ванны соответствует конфигурация, когда настыль заходит за проекцию анодов (третий численный эксперимент), чем когда настыль не доходит до проекции анодов на дно ванны (второй численный эксперимент). При этом в третьем численном эксперименте колебания границы раздела сред имеют меньшую амплитуду на тех же временах и носят более стабильный характер, осциллируя в ограниченной полосе, допустимой для производства, чем во втором. Ширина полос осцилляции во втором и третьем численных экспериментах существенно шире, чем в первом численном эксперименте.

Стоит отметить, что ни в одном из представленных численных экспериментов не наблюдается развитие МГД-нестабильности, однако в двух последних случаях форма рабочего пространства ванны больше способствует ее развитию.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Белолипецкий В. М., Пискажова Т. В. Математическое моделирование процесса электролитического получения алюминия. Решение задач управления технологией. — Красноярск, 2012.

2. Dagoberto S. Severo, André F. Schneider, Elton C. V. Pinto, Vanderlei Gusberti, Vinko Potocnik MODELING MAGNETOHYDRODYNAMICS OF ALUMINUM ELECTROLYSIS CELLS WITH ANSYS AND CFX. Light Metals 2005. The Minerals, Metals & Materials Society.

3. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. — М.: Наука, 1978.

4. Дорохов И. Н., Кафаров В. В., Нигматулин Р. И. // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. № 3. С. 485.

5. Савенкова Н. П., Анпилов С. В., Кузьмин Р. Н., Проворова О. Г., Пискажова Т. В. / Сборник докладов третьего международного конгресса «Цветные металлы – 2011». — Красноярск. С. 282—286.

6. Савенкова Н. П., Анпилов С. В., Кузьмин Р. Н., Проворова О. Г., Пискажова Т. В. // Прикладная физика. 2011. № 6. С. 25.

7. Савенкова Н. П., Анпилов С. В., Калмыков А. В., Кузьмин Р. Н., Проворова О. Г., Пискажова Т. В. / Сб. тезисов XX конференции "Математика. Компьютер. Образование". С. 151.

8. Алаторцев А. В., Кузьмин Р. Н., Проворова О. Г., Савенкова Н. П. // Прикладная физика. 2004. № 5. С. 33—42.

9. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. — М.: Наука, 1980.

10. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984.

## Mathematical modeling of influence of an electrolysis reduction cell shape on MHD processes

*N. P. Savenkov, R. N. Kuzmin, S. V. Anpilov, and A. V. Kalmykov*

Lomonosov Moscow State University  
1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia  
E-mail: nsavenkova@cs.msu.su; alex\_2391@mail.ru

*Received May 24, 2016*

***In the paper, a multiphase three-dimensional model of industrial aluminum electrolysis cell is presented. The model is based on the Navier–Stokes equations and Maxwell's equations with a temperature formula for the operating space of the bath. The characteristic feature of this model is the direct effect of temperature on the shape of the operating space of the bath defined by the blur and crystallization of border of the reduction cell. The numerical analysis of the border change was carried out by means of the regarded model using the variations of the initial shape of the bath operating space. The ACD behavior in time shows the most MHD-stable case of the bath.***

PACS: 02.70.Bf, 47.10.ad, 03.50.De

*Keywords:* electrolysis of aluminum, the Navier-Stokes equation, Maxwell equations.

### REFERENCES

1. V. M. Belolipeckii and T. V. Piskazhova, *Mathematical modeling of the process of electrolytic production of aluminum. Solution technology management tasks* Krasnoyarsk, 2012) [in Russian].

2. Dagoberto S. Severo, André F. Schneider, Elton C. V. Pinto, Vanderlei Gusberti, and Vinko Potocnik MODELING MAGNETOHYDRODYNAMICS OF ALUMINUM ELECTROLYSIS CELLS WITH ANSYS AND CFX. (Light Metals 2005. The Minerals, Metals & Materials Society).

3. R. I. Nigmatulin, *Heterogeneous media mechanics fundamentals* (Nauka, Moscow, 1978) [in Russian].

4. I. N. Dorohov, V. V. Kafarov, and R. I. Nigmatulin, *Prikladnaya Matematika i Mekhanika* **39**, 485 (1975).

5. N. P. Savenkova, S. V. Anpilov, R. N. Kuzmin, O. G. Provorova, and T. V. Piskazhova, in *Proceedings of the Third International Congress "Light Metals – 2011"* (Krasnoyarsk). P. 282.

6. N. P. Savenkova, S. V. Anpilov, R. N. Kuzmin, O. G. Provorova, and T. V. Piskazhova, *Prikladnaya Fizika*, No. 6, 25 (2011).

7. N. P. Savenkova, S. V. Anpilov, A. V. Kalmykov, R. N. Kuzmin, O. G. Provorova, and T. V. Piskazhova, in *Abstracts XX Conference "Mathematics. Computer. Education"*. P. 151.

8. A. V. Alatorcev, R. N. Kuzmin, O. G. Provorova, and N. P. Savenkov, *Prikladnaya Fizika*. No. 5, 33 (2004).

9. A. A. Samarskii and Yu. P. Popov, *Difference Methods of Solving Gas Dynamics Problems* (Nauka, Moscow, 1980) [in Russian].

10. S. Patankar, *Numerical Methods for Solving Heat Transfer and Fluid Dynamics Problems* (Energoatomizdat, Moscow, 1984) [in Russian].