УДК 537.534.7 PACS: 41.85.-p, 41.85.Lc, 41.85.Qg, 41.90.+e

Об однородности скалярных и векторных потенциалов электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру

А. С. Бердников, И. А. Аверин, Н. К. Краснова, К. В. Соловьёв

Электрические и магнитные поля, однородные по Эйлеру, являются удобным инструментом для разработки электронно- и ионно-оптических систем. Принцип подобия траекторий, впервые применённый Ю. К. Голиковым, позволяет с помощью полей, принадлежащих этому классу, целенаправленно синтезировать корпускулярно-оптические системы с идеальными спектрографическими свойствами. До сих пор предполагалось само собой разумеющимся, что однородные по Эйлеру электрические и магнитные поля описываются потенциалами, представляющими собой однородные по Эйлеру функции. В данной работе этот вопрос исследуется математически строго. Важным результатом является то, что для полей, однородных по Эйлеру с нулевым показателем однородности, утверждение об обязательной однородности скалярного потенциала не является справедливым (возможно присутствие аддитивной логарифмической добавки, не являющейся однородной функцией), но это является единственным исключением из рассмотренного правила. Однако для векторного потенциала утверждение о существовании у однородного по Эйлеру поля однородного же векторного потенциала, обладающего соответствующим порядком однородности, будет справедливым при всех порядках однородности, включая нулевой.

Ключевые слова: электрические поля; магнитные поля; потенциальные векторные поля; соленоидальные векторные поля; функции, однородные по Эйлеру; принцип подобия траекторий в оптике заряженных частиц; уравнение Лапласа; теорема разложения Гельмгольца.

Введение

Электростатическими и магнитостатическими полями, однородными по Эйлеру, называются поля, напряжённость или индукция которых является функциями, однородными по Эйлеру в смысле, который придаётся этому термину в математическом анализе [1, 2]. А именно, при произвольных значениях параметра $\lambda > 0$ для напряжённости электростатического поля $\vec{E}(x, y, z)$ должно выполняться тождество $\vec{E}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \equiv \lambda^{k-1}\vec{E}(x, y, z)$, а для индукции магнитостатического поля $\vec{B}(x, y, z)$ – тождество $\vec{B}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \equiv \lambda^{k-1}\vec{B}(x, y, z)$ (число k является порядком однородности соответствующего поля и не обязано быть натуральным или целым числом)*. Для движения заряженных частиц в такого рода полях справедлив принцип подобия траекторий [3–9],

Бердников Александр Сергеевич[1], ведущий научный сотрудник.
Аверин Игорь Андреевич[1,2], младший научный сотрудник, аспирант.
Краснова Надежда Константиновна[2], доцент.
Соловьёв Константин Вячеславович[2], доцент.
[1] Институт Аналитического приборостроения РАН.
Россия, 190103, Санкт-Петербург, Рижский пр. 26.
E-mail: asberd@yandex.ru
[2] Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого.
Россия, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул. 29.

Статья поступила в редакцию 1 декабря 2016 г.

* Здесь тождество однородности для напряжённости электрического поля и для индукции магнитного поля сознательно использует степень k–1 вместо степени k, чтобы для скалярных и векторных потенциалов было выполнено тождество однородности со степенью k. Это позволяет сохранить систему обозначений, принятую в предшествующих работах по электрическим и магнитным полям, однородным по Эйлеру, в которых за основу бралась априорно предполагаемая однородность скалярного (векторного) потенциала, а однородность компонент напряжённости электрического поля или индукции магнитного поля уже выводилась из этого факта.

предложенный Ю. К. Голиковым, и это позволяет использовать такие поля, в частности, для разработки электростатических энергоспектрографов [3–7, 10–12] и магнитостатических масс-спектрографов [13–15] с идеально прямолинейными линиями фокусов и с равномерно высоким качеством фокусировки в любой точке линии фокусов. Простейшими примерами полей, однородных по Эйлеру, служат электрическое поле точечного заряда $\vec{E}(x, y, z) = \left(E_0 x/r^3,\ E_0 y/r^3,\ E_0 z/r^3\right)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, и магнитное поле линейного проводника с током $\vec{B}(x, y, z) = \left(-B_0 y\big/\left(x^2 + y^2\right),\ B_0 x\big/\left(x^2 + y^2\right), 0\right)$ [16, 17].

Следует отметить, что классическая оптика заряженных частиц [18–20], задачей которой является управление с помощью электрических и магнитных полей достаточно плотными пучками заряженных частиц (электронов и ионов), имеет свою специфику. Здесь исследователь имеет дело либо с достаточно медленно меняющимися полями, либо (наиболее частый случай) со статическими полями. «Медленность» полей понимается в смысле сравнения характерного времени изменения потенциалов на электродах, создающих электрическое поле, и/или токов в катушках, создающих магнитное поле, по сравнению со временем распространения со скоростью света электромагнитного возмущения в пределах габаритов устройства. В результате меняющиеся во времени поля, если они не превышают по частоте нескольких мегагерц, можно рассматривать в квазистатическом приближении – то есть, как статические поля, умноженные на заданную функцию времени, соответствующую закону изменения потенциалов на электродах и/или токов в катушках [20]. В силу этого электростатические и магнитостатические потенциалы являются одним из основных рабочих инструментов в оптике заряженных частиц: а) расчёт электрических и магнитных полей удобно осуществлять через аналитическое или численное решение уравнения Лапласа, записанного для скалярного потенциала с «потенциальными» же граничными условиями, б) если известно электрическое или магнитное поле, обеспечивающее оптимальное поведение пучка заряженных частиц, то профили проводящих электродов и/или профили магнитных полюсов с $\mu = \infty$, необходимые для создания такого поля, естественным образом определяются как эквипотенциальные поверхности, вычисленные для скалярного электрического потенциала и/или скалярного магнитного потенциала, соответственно.

Также классическая оптика заряженных частиц имеет дело с достаточно интенсивными потоками ионов и электронов, начиная от нескольких сотен частиц в пучке и более. Поэтому квантовые эффекты для столь больших ансамблей частиц с некоррелированными состояниями практически незаметны (единственный квантовый эффект, который оказывается необходимо учитывать – это дифракция электронов в электронных микроскопах, обусловленная корпускулярно-волновым дуализмом [19, 20]). В результате движение ионов и электронов с очень хорошей точностью можно рассматривать с помощью классической механики Ньютона или, в случае релятивистских скоростей, с помощью специальной теории относительности (СТО). Это не означает, что предмет оптики заряженных частиц становится тривиальным: хорошо управлять движением ионов и электронов, имея для этого в руках единственный и не слишком гибкий инструмент – электрические и магнитные поля, которые обязаны подчиняться уравнениям электромагнитного поля и удовлетворять законам сохранения энергии и др., в силу чего эти поля не могут быть совершенно произвольны, – не слишком-то просто. Тем не менее, возможность использовать для расчётов электронно- и ионно-оптических устройств уравнения механического движения сильно облегчает работу разработчиков этих приборов.

Эта статья продолжает исследования электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру, применительно к целям оптики заряженных частиц, которые были начаты в публикациях [9, 10, 13–15, 21–24]. Уже отмечалось выше, что принцип подобия траекторий [3–9] позволяет использовать электростатические и магнитостатические поля, однородные по Эйлеру, как эффективные энергоспектрографы [3–12] и как эффективные масс-спектрографы [13–15, 21, 22]. Однако этим отнюдь не ограничиваются перспективы использования такого рода полей для создания разнообразных приборов оптики заряженных частиц с полезными свойствами. В работе [23] даны соответствующие определения и рассмотрена общая задача синтеза оптических схем, применяемых для решения задач оптики заряженных частиц, с помощью функций с целочисленным порядком однородности по Эйлеру. В публикациях [10, 12, 14, 25] показана целесообразность применения для этих целей электрических и магнитных полей с нецелочисленными (дробными) порядками однородности, теория которых, к сожалению, разработана не столь подробно, как теория гармонических потенциалов с целочисленными порядками однородности (см. [23, 25–28]). Примеры аналитических формул для потенциалов электрических и магнитных полей, являющихся однородными по Эйлеру и характеризуемых нецелочисленными порядками однородности, можно найти в [29–33]. Эффективный численный способ вычисления электрических и магнитных полей, являющихся однородными по Эйлеру, рассматривается в публикации [12, 22].

Как правило, предполагается без доказательств, что у полей, однородных по Эйлеру (удовлетворяющих тождествам $\vec{E}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \equiv \lambda^{k-1}\vec{E}(x, y, z)$ или $\vec{B}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \equiv \lambda^{k-1}\vec{B}(x, y, z)$), потенциал также является однородной по Эйлеру функцией. Прямое утверждение справедливо и очевидно: если скалярный или векторный потенциал являются однородными по Эйлеру функциями, то в силу свойства однородности у производных однородных функций [1, 2] соответствующее поле будет, безусловно, однородным по Эйлеру. Однако обратное утверждение, что потенциал однородного по Эйлеру поля будет однородной по Эйлеру функцией (точнее, что среди возможных выражений для скалярного или векторного потенциала найдётся функция, однородная по Эйлеру), обеспечивается исключительно интуицией и, как оказывается при ближайшем рассмотрении, является не вполне верным.

Целью данной статьи является исследование вопроса: действительно ли из того, что трёхмерное векторное поле (напряжённость электрического поля, индукция магнитного поля) является однородной по Эйлеру векторной функцией, следует, что скалярный потенциал либо векторный потенциал рассматриваемого векторного поля тоже является однородной по Эйлеру функцией? Оказывается, что если поле является однородным по Эйлеру с нулевым порядком однородности, то его скалярный потенциал может содержать неустранимую аддитивную логарифмическую добавку, так что такой скалярный потенциал не может быть преобразован в функцию, однородную по Эйлеру. Во всех же остальных случаях если у векторного поля имеется скалярный потенциал (для этого необходимо и достаточно, чтобы ротор векторного поля равнялся нулю [34]), то среди всех скалярных потенциалов, отличающихся друг от друга на аддитивную константу, обязательно найдётся потенциал, однородный по Эйлеру. Удивительно, но для векторного потенциала (если он существует, для чего необходимо и достаточно, чтобы дивергенция векторного поля равнялась нулю [34]) это не так: у однородных по Эйлеру электрических полей (в области, свободной от зарядов и диэлектриков) и однородных по Эйлеру магнитных полей при любом порядке однородности среди имеющихся разнообразных векторных потенциалов обязательно найдётся векторный потенциал, однородный по Эйлеру.

Доказательство высказанных утверждений приводится далее. Следует отметить, что доказанные в работе теоремы справедливы для произвольных трёхмерных вектор-функций, однородных по Эйлеру, а не только для электростатических и магнитостатических полей, удовлетворяющих уравнениям Максвелла.

Теорема об однородности скалярных потенциалов для безвихревых трёхмерных полей, однородных по Эйлеру

Возьмём электростатическое поле $\vec{E}(x, y, z)$ или магнитостатическое поле $\vec{B}(x, y, z)$. В соответствии с уравнениями Максвелла, записанными в дифференциальной форме [16, 17], для электростатического поля везде, за исключением точек недифференцируемости, выполнено условие $\operatorname{rot} \vec{E}(x, y, z) = 0$, а для магнитостатического поля условие $\operatorname{rot} \vec{B}(x, y, z) = 0$ выполнено везде, где дополнительно отсутствуют электрические токи и магнитные материалы. Обращение ротора векторного поля $\vec{f}(x, y, z)$ в ноль в соответствии с формулой Стокса $\oint_{\partial S} \vec{f} dl = \iint_{S} \operatorname{rot}(\vec{f})\, \vec{dS}$ [35] гарантирует обращение в ноль интеграла по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в односвязной области, в каждой точке которой векторное поле имеет непрерывные производные второго порядка. Отсюда следует, что криволинейный интеграл от векторного поля от точки до точки не зависит от пути интегрирования, а только от расположения точек. Тем самым скалярная функция координат – криволинейный интеграл векторного поля от фиксированной точки до произвольной точки пространства – будет определена корректным образом, а градиентом (точнее, анти-градиентом) такой функции, которая и представляет собой искомый скалярный потенциал, будет рассматриваемое векторное поле. (Односвязность области, на которую не всегда обращают должное внимание, является важным моментом, равно как и существование в любой точке области непрерывных частных производных второго порядка, но рассмотрение подобных математических деталей выходит за пределы основной темы.)

Если электрический потенциал $U(x, y, z)$ или скалярный магнитный потенциал $\Phi(x, y, z)$ [35] являются однородными по Эйлеру функциями, то очевидно, что соответствующее электрическое или магнитное поле будет однородным по Эйлеру (это следует из правила дифференцирования однородных по Эйлеру функций [1, 2]). Обратное, вообще говоря, не обязательно верно и нуждается в обосновании. В этом разделе математически строго доказывается, что для электрических и магнитных полей, однородных по Эйлеру с ненулевым порядком однородности, скалярный потенциал *обязан* быть функцией, однородной по Эйлеру с порядком однородности, равным порядку однородности электрического или магнитного поля, если правильно выбрать аддитивную константу для потенциала. В случае же $k=0$, который рассматривается отдельно, кроме функции, однородной по Эйлеру с нулевым показателем однородности, потенциал может содержать аддитивную логарифмическую добавку, не являющуюся однородной функцией.

Далее изложение ведётся для электростатического поля, для которого использование скалярного потенциала является естественным выбором. Выкладки без изменений переносятся на магнитостатическое поле, заданное в односвязной области пространства без электрических токов и магнитных материалов с помощью скалярного магнитного потенциала $\Phi(x, y, z)$ [35].

Рассмотрим случай $k \neq 0$. Из условий $\Delta U(x, y, z) = -\int \vec{E}(x', y', z')d\vec{s}$ и $\vec{E}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \equiv \lambda^{k-1}\vec{E}(x, y, z)$ при интегрировании вдоль луча $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ следует, что

$$\begin{gathered} U(\lambda x, \lambda y, \lambda z) - U(x, y, z) = \\ = -\int_1^{\lambda} \vec{E}(\tau x, \tau y, \tau z)\vec{r}d\tau = -\frac{\lambda^k - 1}{k}\vec{E}(x, y, z)\vec{r}, \end{gathered} \qquad (1)$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$ – это вектор, направленный из начала координат в начальную точку интегрирования (x, y, z) (длина отрезка между $(\tau x, \tau y, \tau z)$ и $((\tau + d\tau)x, (\tau + d\tau)y, (\tau + d\tau)z)$, как легко проверить, равна $d\tau\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, т. е. $|\vec{r}|d\tau$, поэтому $d\vec{s} = \vec{r}d\tau$). Рассмотрим теперь интеграл $\int \vec{E}(x, y, z)d\vec{s}$ между двумя точками $\vec{r}_a = (x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{r}_b = (x_b, y_b, z_b)$, лежащими на поверхности зафиксированной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$. Его можно вычислить вдоль пути S, целиком лежащем на поверхности сферы, а можно сперва пройти по лучу $\lambda\vec{r}_a$, по масштабированному в λ раз пути $S' = \lambda S$ и вернуться назад по лучу $\lambda\vec{r}_b$ – результат должен быть одинаковым. В итоге для приращения потенциала $\Delta U = U(\vec{r}_b) - U(\vec{r}_a) = -\int_S \vec{E}(\vec{s})d\vec{s}$ между двумя точками рассматриваемой сферы выполнено равенство:

$$\begin{aligned} \Delta U &= -\int_1^{\lambda} \vec{E}(\tau\vec{r}_a)\vec{r}_a d\tau - \int_{S'} \vec{E}(\vec{s}')d\vec{s}' - \int_{\lambda}^{1} \vec{E}(\tau\vec{r}_b)\vec{r}_b d\tau = \\ &= -\frac{\lambda^k - 1}{k}\left(\vec{E}(\vec{r}_a)\vec{r}_a - \vec{E}(\vec{r}_b)\vec{r}_b\right) - \lambda^k \int_S \vec{E}(\vec{s})d\vec{s} = \\ &= -\frac{\lambda^k - 1}{k}\left(\vec{E}(\vec{r}_a)\vec{r}_a - \vec{E}(\vec{r}_b)\vec{r}_b\right) + \lambda^k \Delta U \end{aligned} \qquad (2)$$

(здесь $\vec{E}(\tau\vec{r}_a) = \tau^{k-1}\vec{E}(\vec{r}_a)$, $\vec{E}(\tau\vec{r}_b) = \tau^{k-1}\vec{E}(\vec{r}_b)$, $\vec{E}(\vec{s}') = \vec{E}(\lambda\vec{s}) = \lambda^{k-1}\vec{E}(\vec{s})$ и $d\vec{s}' = d(\lambda\vec{s}) = \lambda d\vec{s}$). Тем самым, при $k \neq 0$ $\forall\vec{r}_a, \vec{r}_b$ выполняется равенство $-\frac{1}{k}\left(\vec{E}(\vec{r}_b)\vec{r}_b - \vec{E}(\vec{r}_a)\vec{r}_a\right) = U(\vec{r}_b) - U(\vec{r}_a)$ и, следовательно, для всех точек сферы $U(\vec{r}) = -\frac{1}{k}\vec{E}(\vec{r})\vec{r} + U_0$, где константа U_0 пока что зависит от выбранной сферы $|\vec{r}|^2 = \text{const}$. С учётом (1) получаем соотношения:

$$\begin{gathered} U(\lambda\vec{r}) = -\frac{\lambda^k - 1}{k}\vec{E}(\vec{r})\vec{r} + U(\vec{r}) = \\ = -\frac{\lambda^k - 1}{k}\vec{E}(\vec{r})\vec{r} - \frac{1}{k}\vec{E}(\vec{r})\vec{r} + U_0 = -\frac{\lambda^k}{k}\vec{E}(\vec{r})\vec{r} + U_0, \\ U(\mu\vec{r}) = -\frac{\mu^k}{k}\vec{E}(\vec{r})\vec{r} + U_0, \\ U(\lambda\mu\vec{r}) = -\frac{(\lambda\mu)^k}{k}\vec{E}(\vec{r})\vec{r} + U_0, \\ U(\lambda\mu\vec{r}) - U_0 = \lambda^k\left(U(\mu\vec{r}) - U_0\right), \end{gathered}$$

где $\vec{r}$ принадлежит выбранной сфере, а λ, μ – произвольные положительные числа. Но когда радиус-вектор $\vec{r}$ пробегает поверхность выбранной сферы, то радиус-вектор $\mu\vec{r}$ пробегает всё пространство. Поэтому заключительное соотношение превращается в тождество $U(\lambda\vec{r}) - U_0 = \lambda^k\left(U(\vec{r}) - U_0\right)$, справедливое теперь уже для любой точки $\vec{r}$ рассматриваемой области пространства, а константа U_0 оказывается не зависящей от выбранной эталонной сферы. Аддитивную константу U_0 можно присоединить к потенциалу $U(\vec{r})$, поэтому для правильно нормированного потенциала будет выполнено соотношение $U(\lambda\vec{r}) = \lambda^k U(\vec{r})$, представляющее из себя условие однородности по Эйлеру с порядком однородности k. Следовательно, среди всех возможных скалярных потенциалов однородного электрического поля обязательно найдётся скалярный потенциал, однородный по Эйлеру.

Проделанные нами выкладки перестают работать при $k=0$, то есть для электрических и магнитных полей, однородные по Эйлеру с нулевым порядком однородности. В случае $k=0$ соотношение (1) приобретает вид:

$$U(\lambda\vec{r})-U(\vec{r})=-\int_1^{\lambda}\vec{E}(\tau\vec{r})\vec{r}d\tau=-\ln(\lambda)\vec{E}(\vec{r})\vec{r}, \quad (3)$$

а формула (2), выражающая независимость приращения потенциала от пути интегрирования, превращается в тождество $\vec{E}(\vec{r}_a)\vec{r}_a-\vec{E}(\vec{r}_b)\vec{r}_b=0$. Поэтому $\vec{E}(\vec{r})\vec{r}=-U_0$, где константа U_0 пока что зависит от выбранной сферы $|\vec{r}|^2=\text{const}$, но не от положения точки $\vec{r}$ на поверхности этой сферы. После этого с помощью формулы (3) получаем цепочку соотношений $U(\lambda\vec{r})-U(\vec{r})=\ln(\lambda)U_0$, $U(\mu\vec{r})-U(\vec{r})=\ln(\mu)U_0$, $U(\lambda\mu\vec{r})-U(\vec{r})=$ $=\ln(\lambda\mu)U_0$, и в конечном итоге равенство $U(\lambda\mu\vec{r})-U(\mu\vec{r})=\ln(\lambda)U_0$, где $\vec{r}$ принадлежит выбранной сфере, а λ, μ – произвольные положительные числа. Следовательно, $U(\lambda\vec{r})-U(\vec{r})=$ $=\ln(\lambda)U_0$, где $\vec{r}$ – теперь уже произвольная точка пространства (когда $\vec{r}$ пробегает поверхность сферы, то $\mu\vec{r}$ пробегает всё пространство), а константа U_0 оказывается не зависящей от эталонной сферы. Если теперь сделать замену

$$U(x,y,z)=\hat{U}(x,y,z)+ \\ +U_0\ln\left(\left(x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\Big/R\right), \quad (4)$$

где R – нормировочная константа, задающая масштаб длины, то из тождества $U(\lambda\vec{r})-U(\vec{r})=$ $=\ln(\lambda)U_0$ следует условие $\hat{U}(\lambda\vec{r})-\hat{U}(\vec{r})=0$, что является тождеством однородности нулевого порядка для функции $\hat{U}(x,y,z)$. Тем самым наш скалярный потенциал необходимым образом будет обязан иметь вид (4), где $\hat{U}(x,y,z)$ является функцией, однородной по Эйлеру с нулевым порядком однородности. (Здесь интересно, что произвольная аддитивная константа, присоединённая к потенциалу $\hat{U}(x,y,z)$, не разрушает свойства его однородности.) Очевидно и обратное утверждение: при любом выборе константы U_0 потенциалы вида (4), где $\hat{U}(x,y,z)$ однородная по Эйлеру функция с нулевым порядком однородности, порождают однородные по Эйлеру электрические поля нулевого порядка. Следует также отметить, что выражение (4) может быть интерпретировано ещё и как логарифм функции, однородной по Эйлеру с порядком однородности, равным $\exp(U_0)$.

Логарифмическая поправка в формуле (4) удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому для того, чтобы уравнению Лапласа удовлетворяла функция $U(x,y,z)$, необходимо и достаточно, чтобы уравнению Лапласа удовлетворяла функция $\hat{U}(x,y,z)$. Вопрос о наиболее общем представлении функций $\hat{U}(x,y,z)$, гармонических и однородных по Эйлеру с нулевым порядком однородности, решается с помощью формулы Донкина [26–30, 36–38]:

$$\hat{U}(x,y,z)= \\ =F\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right), \quad (5)$$

где $F(p,q)$ – произвольная функция, удовлетворяющая двумерному уравнению Лапласа $\partial^2F/\partial p^2+\partial^2F/\partial q^2=0$.

Фиксированная логарифмическая добавка в формуле (4) может быть записана и в другом виде. Например, потенциал бесконечной и равномерно заряженной нити $U_0\ln\left(\sqrt{y^2+z^2}\Big/R\right)$ при подстановке в условие $U(\lambda\vec{r})-U(\vec{r})=\ln(\lambda)U_0$ работает ничуть не хуже. На роль логарифмической добавки годится любая функция вида (4), где в качестве $\hat{U}(x,y,z)$ используется фиксированная гармоническая функция нулевого порядка, вычисленная по формуле Донкина (5). Однако, как показывает пример с потенциалом $U_0\ln\left(\sqrt{y^2+z^2}\Big/R\right)$, не всегда с первого взгляда можно разглядеть в математическом выражении для логарифмического потенциала его эквивалентную форму, выраженную через подстановки (4) и (5).

Теорема об однородности векторных потенциалов для бездивергентных трёхмерных полей, однородных по Эйлеру

Из результатов, полученных в предыдущем разделе, следует, что поскольку скалярный потенциал определён с точностью до аддитивной константы, а аддитивная константа разрушает математическую однородность функции, то однородность скалярного потенциала, вообще говоря, реализуется только при специальном выборе аддитивной константы (само же поле при этом не меняется). Похожая, но более сложная проблема возникает для векторного потенциала, который имеет гораздо больше возможностей *не быть* однородной по Эйлеру функцией. Векторный потенциал задаётся с точностью до градиента произвольной скалярной функции [16, 17, 34, 39–41], и эта добавка может разрушать или, наоборот, восстанавливать однородность векторного потенциала весьма непредсказуемым образом. Обязательно ли существуют среди всех возможных векторных потенциалов, описывающих однородное по Эйлеру магнитное поле, векторные потенциалы, являющиеся однородными по Эйлеру функциями? Рассмотрению данного вопроса посвящён этот раздел.

Теорема Гельмгольца [34] постулирует разложение произвольного векторного поля на потенциальное (с нулевым ротором, т. е. безвихревое; такое поле можно представить в виде градиента скалярного потенциала) и соленоидальное (с нулевой дивиргенцией, такое поле можно представить в виде ротора векторного потенциала). В силу того, что магнитостатическое поле $\vec{B}(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Максвелла $\operatorname{div}\vec{B}(x, y, z)=0$ (везде, кроме точек, в которых нарушается дифференцируемость магнитного поля), а электростатическое поле $\vec{E}(x, y, z)$ – уравнению $\operatorname{div}\vec{E}(x, y, z)=0$ (при дополнительном требовании об отсутствии в рассматриваемой области электрических зарядов), возможно задание как магнитостатического, так и электростатического поля с помощью векторного потенциала (хотя, конечно, использование векторного потенциала для электрического поля является скорее формальной возможностью, чем физической необходимостью).

Далее изложение ведётся для магнитостатического поля, для которого использование векторного потенциала является естественным выбором. Логика выкладок без изменений переносится на электростатическое поле, заданное с помощью векторного потенциала в односвязной области пространства, не содержащей свободных электрических зарядов, диэлектрических материалов, металлических электродов и т. д.

Рассмотрим*, как можно вычислить векторный потенциал $\vec{A}(x, y, z)=(A_X, A_Y, A_Z)$ по заданному магнитному полю с магнитной индукцией $\vec{B}(x, y, z)=(B_X, B_Y, B_Z)$, и заодно докажем, что при условии $\operatorname{div}\vec{B}=0$ действительно найдётся такая вектор-функция $\vec{A}(x, y, z)$, что $\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}$. Используем для $\vec{A}(x, y, z)=(A_X, A_Y, A_Z)$ специальным образом сконструированную подстановку

$$\begin{aligned}
A_X &= C_X(x, y, z)+\int_{z_0}^{z}\left(\frac{1}{3}B_Y(x, y, \xi)+\frac{1}{6}B_Y(x, y_0, \xi)\right)d\xi-\int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{3}B_Z(x, \xi, z)+\frac{1}{6}B_Z(x, \xi, z_0)\right)d\xi,\\
A_Y &= C_Y(x, y, z)+\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{3}B_Z(\xi, y, z)+\frac{1}{6}B_Z(\xi, y, z_0)\right)d\xi-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{1}{3}B_X(x, y, \xi)+\frac{1}{6}B_X(x_0, y, \xi)\right)d\xi,\\
A_Z &= C_Z(x, y, z)+\int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{3}B_X(x, \xi, z)+\frac{1}{6}B_X(x_0, \xi, z)\right)d\xi-\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{3}B_Y(\xi, y, z)+\frac{1}{6}B_Y(\xi, y_0, z)\right)d\xi,
\end{aligned}\qquad (6)$$

где x_0, y_0, z_0 – произвольная фиксированная точка, в окрестности которой поле не имеет особенностей и поэтому операции интегрирования и дифференцирования выполняются без каких-либо проблем. Поскольку в подстановке (6) $C_X(x, y, z)$, $C_Y(x, y, z)$, $C_Z(x, y, z)$ – это произвольные функции, то запись вектор-функции $\vec{A}(x, y, z)$ в виде (6) не снижает общности задания векторного потенциала.

Требуется, чтобы выполнялось векторное соотношение $\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}$, то есть, дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned}
B_X(x, y, z) &= \frac{\partial A_Z(x, y, z)}{\partial y}-\frac{\partial A_Y(x, y, z)}{\partial z},\\
B_Y(x, y, z) &= -\frac{\partial A_Z(x, y, z)}{\partial x}+\frac{\partial A_X(x, y, z)}{\partial z},\\
B_Z(x, y, z) &= \frac{\partial A_Y(x, y, z)}{\partial x}-\frac{\partial A_X(x, y, z)}{\partial y}.
\end{aligned}\qquad (7)$$

* Это элементарное, хотя и не вполне очевидное доказательство, насколько известно авторам, ранее не приводилось. Классическое доказательство, использующее достаточно тонкие элементы математического анализа, можно найти, например, в [34].

Продифференцировав первое уравнение системы (7) по x, второе по y, третье по z и сложив их, из перестановочности смешанных производных немедленно получим, что для выполнения соотношений (7) необходимо, чтобы $\operatorname{div}\vec{B}=0$:

$$\frac{\partial B_X(x, y, z)}{\partial x}+\frac{\partial B_Y(x, y, z)}{\partial y}+\frac{\partial B_Z(x, y, z)}{\partial z}\equiv 0. \quad (8)$$

Иными словами, выполнение соответствующего уравнения Максвелла является абсолютно необходимым для возможности введения векторного потенциала магнитного поля.

Можно показать, что условие (8) является не только необходимым, но и достаточным [34]. С помощью подстановки (6) этот факт доказывается особенно просто. Если подставить (6) в (7), принять во внимание (8) и привести подобные члены, то получим, что для того, чтобы для вектор-функции $\vec{A}(x, y, z)$ из уравнений (6) выполнялись условия (7), необходимо и достаточно, чтобы неизвестная нам вектор-функция $\vec{C}(x, y, z)=(C_X, C_Y, C_Z)$ удовлетворяла уравнениям $\partial C_Z/\partial y-\partial C_Y/\partial z=0$, $-\partial C_Z/\partial x+\partial C_X/\partial z=0$, $\partial C_Y/\partial x-\partial C_X/\partial y=0$, то есть условию $\operatorname{rot}\vec{C}=0$. В частности, годится выбор $C_X=C_Y=C_Z=0$. Например, для первого уравнения $B_X=\partial A_Z/\partial y-\partial A_Y/\partial z$ в результате элементарных преобразований, учитывающих тождество (8), получаем следующие выражения:

$$0=\frac{\partial A_Z}{\partial y}-\frac{\partial A_Y}{\partial z}-B_X==+\frac{\partial C_Z(x, y, z)}{\partial y}+\frac{1}{3}B_X(x, y, z)+\frac{1}{6}B_X(x_0, y, z)-\frac{1}{3}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial B_Y(\xi, y, z)}{\partial y}d\xi-$$

$$-\frac{\partial C_Y(x, y, z)}{\partial z}-\frac{1}{3}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial B_Z(\xi, y, z)}{\partial z}d\xi+\frac{1}{3}B_X(x, y, z)+\frac{1}{6}B_X(x_0, y, z)-B_X(x, y, z)=$$

$$=\frac{\partial C_Z(x, y, z)}{\partial y}-\frac{\partial C_Y(x, y, z)}{\partial z}-\frac{1}{3}B_X(x, y, z)+\frac{1}{3}B_X(x_0, y, z)+\frac{1}{3}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial B_X(\xi, y, z)}{\partial x}d\xi=\frac{\partial C_Z}{\partial y}-\frac{\partial C_Y}{\partial z}.$$

Требование $\operatorname{rot}\vec{C}=0$ равносильно тому, что вектор-функция $\vec{C}$ должна быть градиентом (антиградиентом) некоторой скалярной функции: для неё существует такая функция $F(x, y, z)$, что $C_X=-\partial F/\partial x$, $C_Y=-\partial F/\partial y$, $C_Z=-\partial F/\partial z$ [34]. При таком и только таком выборе вектор-функции $\vec{C}(x, y, z)$ формула (6) обеспечивает выполнение тождества (7). Поэтому при выполнении условия $\operatorname{div}\vec{B}=0$ векторный потенциал $\vec{A}(x, y, z)$ действительно существует и может быть вычислен в явном виде с помощью формулы (6) при дополнительном (необходимом и достаточном) условии $C_X=-\partial F/\partial x$, $C_Y=-\partial F/\partial y$, $C_Z=-\partial F/\partial z$. Из проделанных выкладок также следует, что векторный потенциал будет уникальным с точностью до градиента произвольной скалярной функции.

Примечание 1. То, что магнитное поле, которое только и имеет физический смысл, не меняется, если к его векторному потенциалу прибавить градиент произвольной скалярной функции (т. н. калибровочная инвариантность), является легко проверяемым и хорошо известным фактом ([16], §18). Нашей основной целью было получение явной формулы (6) для векторного потенциала, которая будет использоваться в дальнейшем при выкладках, а не доказательство калибровочной инвариантности векторного потенциала. Однако то, что никакое другое преобразование векторного потенциала не оставляет неизменным магнитное поле, и что никакой иной свободы, кроме аддитивной добавки в виде градиента скалярной функции, при конструировании векторного потенциала по заданному магнитному полю не наблюдается, не всегда обосновывается в учебниках по электромагнетизму на должном уровне строгости, так что нам хотелось подчеркнуть здесь этот факт.

Примечание 2. Для полноты картины* приведём аналогичную явную формулу для скалярного потенциала электрического поля. А именно, пусть заданы функции $E_X(x, y, z)$, $E_Y(x, y, z)$, $E_Z(x, y, z)$ и требуется найти функцию $U(x, y, z)$, обеспечивающую выполнение уравнений $E_X=-\partial U/\partial x$, $E_Y=-\partial U/\partial y$, $E_Z=-\partial U/\partial z$, характерных для электрического поля. Для разре-

* В частности, с помощью такой формулы можно получить альтернативное доказательство теоремы об однородности скалярного потенциала из предыдущего раздела, если использовать схему рассуждений, которая в этом разделе применяется к векторному потенциалу.

шимости этих уравнений будет необходимо и достаточно выполнение условий $\partial E_Z/\partial y - \partial E_Y/\partial z = 0$, $-\partial E_Z/\partial x + \partial E_X/\partial z = 0$, $\partial E_Y/\partial x - \partial E_X/\partial y = 0$, то есть условие $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$. Необходимость следует из перестановочности порядка дифференцирования у смешанных производных для функции U. Достаточность получается, если представить решение для функции $U(x, y, z)$ в виде

$$U = f(x, y, z) - \int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{3}E_X(\xi, y, z) + \frac{1}{6}E_X(\xi, y_0, z) + \frac{1}{6}E_X(\xi, y, z_0) + \frac{1}{3}E_X(\xi, y_0, z_0)\right)d\xi -$$
$$-\int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{3}E_Y(x, \xi, z) + \frac{1}{6}E_Y(x_0, \xi, z) + \frac{1}{6}E_Y(x, \xi, z_0) + \frac{1}{3}E_Y(x_0, \xi, z_0)\right)d\xi - \tag{9}$$
$$-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{1}{3}E_Z(x, y, \xi) + \frac{1}{6}E_Z(x_0, y, \xi) + \frac{1}{6}E_Z(x, y_0, \xi) + \frac{1}{3}E_Z(x_0, y_0, z)\right)d\xi,$$

(такая форма записи не снижает общности у потенциала U в силу произвольности функции f). Подстановка выражения (9) в уравнения $E_X = -\partial U/\partial x$, $E_Y = -\partial U/\partial y$, $E_Z = -\partial U/\partial z$ с учётом того, что выполнены условия $\partial E_Z/\partial y = = \partial E_Y/\partial z$, $\partial E_Z/\partial x = \partial E_X/\partial z$, $\partial E_Y/\partial x = \partial E_X/\partial y$, показывает, что формула (9) обеспечивает нужное нам решение тогда и только тогда, если $\partial f/\partial x = 0$, $\partial f/\partial y = 0$, $\partial f/\partial z = 0$, то есть при выборе $f(x, y, z) = \text{const}$.

Если можно в формуле (6) в качестве стартовой использовать точку $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, то для однородного поля $\vec{B}(x, y, z)$ при выборе $\vec{C} = 0$ вектор-функция $\vec{A}$, определённая в соответствии с (6), будет однородной по Эйлеру с порядком однородности, равным k (здесь важно, что функции $\vec{B}(0, y, z)$, $\vec{B}(x, 0, z)$, $\vec{B}(x, y, 0)$ тоже будут однородными). Действительно, если $G(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = = \lambda^{k-1}G(x, y, z)$ – однородная функция порядка $(k-1)$, то её интеграл по любой координате, отсчитываемый от нуля (если такой интеграл имеет смысл) будет однородной функцией порядка k:

$$H(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \int_0^{\lambda x} G(\xi, \lambda y, \lambda z)\,d\xi =$$
$$= \int_0^{x} G(\lambda\xi', \lambda y, \lambda z)\,d(\lambda\xi') =$$
$$= \lambda^k \int_0^{x} G(\xi', y, z)\,d\xi' = \lambda^k H(x, y, z).$$

Если такой выбор стартовой точки возможен, тогда для того, чтобы векторный потенциал (6) был функцией, однородной по Эйлеру с порядком однородности k, необходимо и достаточно, чтобы используемая в формуле (6) вектор-функция $\vec{C} = \operatorname{grad} F$ была однородной по Эйлеру с порядком однородности k. Это значит, как показывает предыдущий раздел, что при $k \neq -1$ вектор-функция $\vec{C}$ должна быть градиентом скалярной функции F, однородной по Эйлеру с порядком однородности $(k+1)$, а при $k = -1$ в скалярной функции F, порождающей вектор-функцию $\vec{C}$, кроме однородной функции нулевого порядка могут присутствовать аддитивные логарифмические члены вида (4). Тем самым мы не только показали, что для полей без неинтегрируемых особенностей в нуле среди векторных потенциалов всегда найдутся однородные по Эйлеру вектор-функции, но и очертили в явном виде класс таких векторных потенциалов.

Понятно, что если в качестве функции F выбрать неоднородную функцию или однородную функцию неподходящего порядка, то результирующий векторный потенциал окажется неоднородной функцией. Однако для наших целей важно, что, по крайней мере, какие-то из возможных векторных потенциалов обязательно окажутся однородными функциями. Поэтому, последовательно перебирая все возможные однородные векторные потенциалы, мы не пропустим ни одного интересующего нас магнитного поля, однородного по Эйлеру, хотя, возможно, некоторые магнитные поля при этом встретятся несколько раз.

К сожалению, у интегралов (6) могут иметься сингулярные точки (в частности, сингулярной может оказаться точка $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ и, например, при $k \le 0$ именно ею она, как правило, и оказывается). Тогда рассмотренные выше интегралы будут расходиться, либо операции дифференцирования и интегрирования нельзя будет столь свободно менять местами, как это было сделано. Если же в окрестностях сингулярных точек выкладки, проделанные выше для формулы (6), оказываются некорректными, то некорректным становится и вывод об однородности векторного потенциала вида (6). Вопрос требует аккуратного исследования – не столько даже в плане нахождения доказательства, использующего более слабые базовые предположения о регулярности анализируемого векторного поля, сколько в исследовании вопроса, а справедливо ли вообще данное утверждение при такой ситуации. В частности, результаты, полученные в предыдущем разделе, подсказывают, что для однородных полей нулевого порядка вывод о существовании однородных векторных потенциалов может и не быть верным. Действительно, аналогичные по форме рассуждения можно применить и к выражению (9), если электрическое поле $\vec{E}(x, y, z)$ будет однородным, а $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, но из предыдущего раздела известно, что тогда будут упущены из виду неоднородные логарифмические добавки вида (4), сингулярные в окрестности нуля и не сводимые к однородному скалярному потенциалу.

Пусть выполнено условие $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, обеспечивающее существование векторного потенциала. Тогда векторный потенциал может быть вычислен по формуле:

$$\begin{aligned}
A_X &= \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} + \int_{z_0}^{z}\left(\frac{1}{3}B_Y(x, y, \xi) + \frac{1}{6}B_Y(x, y_0, \xi)\right)d\xi - \int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{3}B_Z(x, \xi, z) + \frac{1}{6}B_Z(x, \xi, z_0)\right)d\xi,\\
A_Y &= \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} + \int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{3}B_Z(\xi, y, z) + \frac{1}{6}B_Z(\xi, y, z_0)\right)d\xi - \int_{z_0}^{z}\left(\frac{1}{3}B_X(x, y, \xi) + \frac{1}{6}B_X(x_0, y, \xi)\right)d\xi,\\
A_Z &= \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{3}B_X(x, \xi, z) + \frac{1}{6}B_X(x_0, \xi, z)\right)d\xi - \int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{3}B_Y(\xi, y, z) + \frac{1}{6}B_Y(\xi, y_0, z)\right)d\xi,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $B_X(x, y, z)$, $B_Y(x, y, z)$, $B_Z(x, y, z)$ – известные функции, однородные по Эйлеру с порядком однородности k, а $F(x, y, z)$ – пока неизвестная скалярная функция, которую надо выбрать таким образом, чтобы функции A_X, A_Y, A_Z, вычисленные в соответствии с формулами (10), были однородными по Эйлеру с порядком однородности, равным k.

Для того, чтобы дифференцируемые функции A_X, A_Y, A_Z, заданные соотношениями (10), были однородными функциями, необходимо и достаточно, чтобы для них были выполнены дифференциальные соотношения Эйлера [1, 2]:

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial A_X(x, y, z)}{\partial x} + y\frac{\partial A_X(x, y, z)}{\partial y} + z\frac{\partial A_X(x, y, z)}{\partial z} - kA_X(x, y, z) = 0,\\
x\frac{\partial A_Y(x, y, z)}{\partial x} + y\frac{\partial A_Y(x, y, z)}{\partial y} + z\frac{\partial A_Y(x, y, z)}{\partial z} - kA_Y(x, y, z) = 0,\\
x\frac{\partial A_Z(x, y, z)}{\partial x} + y\frac{\partial A_Z(x, y, z)}{\partial y} + z\frac{\partial A_Z(x, y, z)}{\partial z} - kA_Z(x, y, z) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Из первого уравнения (11) следует, что для функции $F(x, y, z)$ должно быть выполнено следующее условие, в котором для сокращения записи частные производные по x, y, z заменены на нижние индексы, обозначенные строчными буквами:

$$xF_{xx}(x,y,z)+yF_{xy}(x,y,z)+zF_{xz}(x,y,z)-kF_x(x,y,z)=$$
$$=-\frac{1}{3}\int_{z_0}^{z}\left(x\frac{\partial B_Y}{\partial x}(x,y,\xi)+y\frac{\partial B_Y}{\partial y}(x,y,\xi)d\xi+\xi\frac{\partial B_Y}{\partial z}(x,y,\xi)-(k-1)B_Y(x,y,\xi)\right)d\xi-$$
$$-\frac{1}{6}\int_{z_0}^{z}\left(x\frac{\partial B_Y}{\partial x}(x,y_0,\xi)+y_0\frac{\partial B_Y}{\partial y}(x,y_0,\xi)+\xi\frac{\partial B_Y}{\partial x}(x,y_0,\xi)-(k-1)B_Y(x,y_0,\xi)\right)d\xi+$$
$$+\frac{1}{3}\int_{y_0}^{y}\left(x\frac{\partial B_Z}{\partial x}(x,\xi,z)+\xi\frac{\partial B_Z}{\partial y}(x,\xi,z)+z\frac{\partial B_Z}{\partial z}(x,\xi,z)-(k-1)B_Z(x,\xi,z)\right)d\xi+$$
$$+\frac{1}{6}\int_{y_0}^{y}\left(x\frac{\partial B_Z}{\partial x}(x,\xi,z_0)+\xi\frac{\partial B_Z}{\partial y}(x,\xi,z_0)+z_0\frac{\partial B_Z}{\partial z}(x,\xi,z_0)-(k-1)B_Z(x,\xi,z_0)\right)d\xi+$$
$$+\frac{1}{3}\int_{z_0}^{z}\left(\xi\frac{\partial B_Y}{\partial z}(x,y,\xi)+B_Y(x,y,\xi)\right)d\xi-\frac{1}{3}zB_Y(x,y,z)-$$
$$-\frac{1}{3}\int_{y_0}^{y}\left(\xi\frac{\partial B_Z}{\partial y}(x,\xi,z)+B_Z(x,\xi,z)\right)d\xi+\frac{1}{3}yB_Z(x,y,z)+$$
$$+\frac{1}{6}\int_{z_0}^{z}\left(\xi\frac{\partial B_Y}{\partial x}(x,y_0,\xi)+B_Y(x,y_0,\xi)d\xi\right)-\frac{1}{6}zB_Y(x,y_0,z)-$$
$$-\frac{1}{6}\int_{y_0}^{y}\left(\xi\frac{\partial B_Z}{\partial y}(x,\xi,z_0)+B_Z(x,\xi,z_0)\right)d\xi+\frac{1}{6}yB_Z(x,y,z_0)+$$
$$+\frac{1}{6}\int_{z_0}^{z}y_0\frac{\partial B_Y}{\partial y}(x,y_0,\xi)d\xi-\frac{1}{6}\int_{y_0}^{y}z_0\frac{\partial B_Z}{\partial z}(x,\xi,z_0)d\xi.$$

Здесь прибавлены и вычтены специальным образом подобранные выражения, чтобы под знаками интеграла получились дифференциальные соотношения Эйлера для функций B_Y и B_Z при соответствующих значениях аргумента. Первые четыре интеграла обращаются в ноль в силу свойства однородности для поля $\vec{B}(x,y,z)$. Следующие четыре интеграла берутся аналитически (подынтегральные выражения являются полными производными по переменной интегрирования от функций zB_Y и yB_Z). В последних двух интегралах «неудобные» производные выражаются с помощью условия $\operatorname{div}\vec{B}=0$, после чего эти интегралы можно частично вычислить. В итоге получаем соотношение:

$$\begin{gathered}xF_{xx}+yF_{xy}+zF_{xz}-kF_x=-\frac{y_0}{6}\int_{z_0}^{z}\frac{\partial B_X}{\partial x}(x,y_0,\xi)d\xi+\frac{z_0}{6}\int_{y_0}^{y}\frac{\partial B_X}{\partial x}(x,\xi,z_0)d\xi-\\-\frac{z_0}{6}B_Y(x,y,z_0)+\frac{y_0}{6}B_Z(x,y_0,z)-\frac{z_0}{3}B_Y(x,y_0,z_0)+\frac{y_0}{3}B_Z(x,y_0,z_0).\end{gathered}\tag{12а}$$

Аналогичным образом упрощаются условия однородности (11) для $A_Y(x,y,z)$ и $A_Z(x,y,z)$:

$$\begin{gathered}xF_{xy}+yF_{yy}+zF_{yz}-kF_y=-\frac{z_0}{6}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial B_Y}{\partial y}(\xi,y,z_0)d\xi+\frac{x_0}{6}\int_{z_0}^{z}\frac{\partial B_Y}{\partial y}(x_0,y,\xi)d\xi-\\-\frac{x_0}{6}B_Z(x_0,y,z)-\frac{x_0}{3}B_Z(x_0,y,z_0)+\frac{z_0}{6}B_X(x,y,z_0)+\frac{z_0}{3}B_X(x_0,y,z_0),\end{gathered}\tag{12б}$$

$$xF_{xz} + yF_{yz} + zF_{zz} - kF_z = -\frac{x_0}{6}\int_{y_0}^{y}\frac{\partial B_Z}{\partial z}(x_0, \xi, z)\,d\xi + \frac{y_0}{6}\int_{x_0}^{x}\frac{\partial B_Z}{\partial z}(\xi, y_0, z)\,d\xi -$$
$$-\frac{y_0}{6}B_X(x, y_0, z) - \frac{y_0}{3}B_X(x_0, y_0, z) + \frac{x_0}{6}B_Y(x_0, y, z) + \frac{x_0}{3}B_Y(x_0, y_0, z). \tag{12в}$$

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\begin{aligned} &xF_{xx}(x, y, z) + yF_{xy}(x, y, z) + zF_{xz}(x, y, z) - kF_x(x, y, z) = H_X(x, y, z),\\ &xF_{xy}(x, y, z) + yF_{yy}(x, y, z) + zF_{yz}(x, y, z) - kF_y(x, y, z) = H_Y(x, y, z),\\ &xF_{xz}(x, y, z) + yF_{yz}(x, y, z) + zF_{zz}(x, y, z) - kF_z(x, y, z) = H_Z(x, y, z)\end{aligned} \tag{13}$$

относительно неизвестной функции $F(x, y, z)$ и с известными правыми частями $H_X(x, y, z)$, $H_Y(x, y, z)$, $H_X(x, y, z)$. Введём в рассмотрение функцию

$$G(x, y, z) = xF_x(x, y, z) + yF_y(x, y, z) + zF_z(x, y, z) - (k+1)F(x, y, z).$$

Для её частных производных выполняются тождества

$$\begin{aligned} &G_x(x, y, z) \equiv xF_{xx}(x, y, z) + yF_{xy}(x, y, z) + zF_{xz}(x, y, z) - kF_x(x, y, z) = H_X(x, y, z),\\ &G_y(x, y, z) \equiv xF_{xy}(x, y, z) + yF_{yy}(x, y, z) + zF_{yz}(x, y, z) - kF_y(x, y, z) = H_Y(x, y, z),\\ &G_z(x, y, z) \equiv xF_{xz}(x, y, z) + yF_{yz}(x, y, z) + zF_{zz}(x, y, z) - kF_z(x, y, z) = H_Z(x, y, z).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для того, чтобы система уравнений (13) имела решение, необходимо, чтобы вектор-функция $\vec{H}(x, y, z) = (H_X, H_Y, H_Z)$ была градиентом некоторой скалярной функции (впрочем, скоро будет показано, что это условие является одновременно и достаточным).

Как уже говорилось выше, для справедливости условия $\vec{H}(x, y, z) = \operatorname{grad} G(x, y, z)$ необходимым и достаточным образом должно выполняться легко проверяемое условие $\operatorname{rot}\vec{H}(x, y, z) = 0$, то есть $\partial H_X/\partial y = \partial H_Y/\partial x$, $\partial H_X/\partial z = \partial H_Z/\partial x$, $\partial H_Y/\partial z = \partial H_Z/\partial y$. Значит, если выполнено условие $\operatorname{rot}\vec{H}(x, y, z) = 0$, то обязательно существует и подходящая скалярная функция $K(x, y, z)$, градиентом которой является вектор-функция $\vec{H}(x, y, z)$. При этом искомая функция $K(x, y, z)$ определяется однозначным образом с точностью до аддитивной константы и может быть найдена, например, с помощью формулы (9).

Остаётся решить уравнение

$$xF_x(x, y, z) + yF_y(x, y, z) + zF_z(x, y, z) - \\ -(k+1)F(x, y, z) = K(x, y, z) + K_0 \tag{14}$$

с известной и фиксированной правой частью $K(x, y, z)$ и произвольной константой K_0. Будем искать решение для уравнения (14) в виде $F(x, y, z) = x^{k+1}J(x,\ y/x, z/x)$. После подстановки этого выражения в уравнение (14) и замены переменных $y = px$, $z = qx$ получаем, что функция $J(x, p, q)$ должна удовлетворять уравнению:

$$x^{k+1}J_x(x, p, q) = K(x, px, qx) + K_0, \tag{15}$$

откуда легко можно получить нужную нам функцию $J(x, p, q)$ с помощью интегрирования по переменной x. Функция $J(x, p, q)$, получаемая из уравнения (15), будет определена с точностью до аддитивной добавки – произвольной функции двух переменных $J_0(p, q)$ (не считая свободной константы K_0, введённой в рассмотрение ранее). В результате мы не только показали, что условие $\operatorname{rot}\vec{H}(x, y, z) = 0$ является достаточным для разрешимости системы (13), но и смогли найти в явном виде её общее решение.

Правые части полученных ранее уравнений (12) удовлетворяют условию $\partial H_X/\partial y = \partial H_Y/\partial x$, $\partial H_X/\partial z = \partial H_Z/\partial x$, $\partial H_Y/\partial z = \partial H_Z/\partial y$, а частный случай функции $K(x, y, z)$, для которой выполняются условия $K_x = H_X$, $K_y = H_Y$, $K_z = H_Z$, как легко проверить, может быть записан в виде формулы

$$K(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} \left[-\frac{z_0}{6} B_Y(\xi, y, z_0) - \frac{z_0}{3} B_Y(\xi, y_0, z_0) + \frac{y_0}{6} B_Z(\xi, y_0, z) + \frac{y_0}{3} B_Z(\xi, y_0, z_0) \right] d\xi +$$
$$+ \int_{y_0}^{y} \left[-\frac{x_0}{6} B_Z(x_0, \xi, z) - \frac{x_0}{3} B_Z(x_0, \xi, z_0) + \frac{z_0}{6} B_X(x, \xi, z_0) + \frac{z_0}{3} B_X(x_0, \xi, z_0) \right] d\xi +$$
$$+ \int_{z_0}^{z} \left[-\frac{y_0}{6} B_X(x, y_0, \xi) - \frac{y_0}{3} B_X(x_0, y_0, \xi) + \frac{x_0}{6} B_Y(x_0, y, \xi) + \frac{x_0}{3} B_Y(x_0, y_0, \xi) \right] d\xi.$$

Тем самым мы показали, что обязательно существует такая функция $F(x, y, z)$, вычисляемая в явном виде с помощью подстановки $F(x, y, z) = x^{k+1} J(x, y/x, z/x)$ и формулы (15), для которой векторный потенциал, вычисленный по формуле (10), будет вектор-функцией, однородной по Эйлеру с порядком однородности k.

Все другие однородные по Эйлеру векторные потенциалы должны будут отличаться от найденного решения на аддитивную добавку в виде однородной вектор-функции порядка k, представляющей собой градиент некоторой скалярной функции. То, что такие вектор-функции представляют собой либо градиент однородной скалярной функции порядка $(k+1)$, (при $k \neq -1$), либо градиент однородной скалярной функции нулевого порядка с логарифмической добавкой вида (4) (при $k = -1$), было установлено в предыдущем разделе. Впрочем, к этому же выводу можно прийти, если учесть, что при конструировании функции $F(x, y, z)$ имеется свобода выбора произвольной функции $J_0(p, q)$ и константы K_0.

Интересно, что для скалярного потенциала нулевой порядок однородности стал исключительной ситуацией, которая приводит к логарифмической неоднородной добавке (4). В то же время для векторного потенциала функция $F(x, y, z)$, обеспечивающая однородность векторного потенциала (10), без проблем находится при любых порядках однородности, включая $k = 0$. Действительно, пусть $\vec{B}_0 = \operatorname{grad} \Phi_0$, где $\Phi_0(x, y, z) = C_0 \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ (потенциал Φ_0 является модифицированным вариантом универсальной аддитивной логарифмической добавки из формулы (4) и полностью ему эквивалентен в этом плане). Такое поле, как легко проверить, удовлетворяет условию $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, и поэтому его можно представить с помощью векторного потенциала. Из формулы (10) при $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ получаем $A_X^0 = +C_0 yz \big/ \left(x^2 + y^2\right)$, $A_Y^0 = -C_0 xz \big/ \left(x^2 + y^2\right)$, $A_Z^0 = 0$, то есть однородную функцию нулевого порядка, хотя и с особенностью в нуле.

Однако далеко не всегда выбор однородного векторного потенциала выглядит так просто. Рассмотрим, например, поле $B_X = -C_0 y \big/ \left(x^2 + y^2\right)$, $B_Y = +C_0 x \big/ \left(x^2 + y^2\right)$, $B_Z = 0$ с нулевым порядком однородности* (т. е. поле бесконечного линейного проводника с током [16, 17]). Ему соответствует векторный потенциал $A_X = 0$, $A_Y = 0$, $A_Z = C_0 \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2} \big/ R\right)$ с логарифмической особенностью при $x = y = 0$, который, очевидно, не является однородной функцией. Однородные версии векторного потенциала для этого поля тоже существуют, но они имеют куда как более сложный вид – например, таким векторным потенциалом будет

$$A_X = C_0 \frac{z\left(3x^2 + 8xy + y^2\right)}{6x\left(x^2 + y^2\right)},$$

$$A_Y = C_0 \frac{z\left(x^2 - 8xy + 3y^2\right)}{6x\left(x^2 + y^2\right)},$$

$$A_Z = \frac{2C_0}{3} \arctan\left(\frac{x^2 - y^2}{2xy}\right) + \frac{C_0}{6} \ln\left(\frac{xyz^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right).$$

---

* В соответствии с введёнными ранее обозначениями порядок однородности поля – это ожидаемый порядок однородности у скалярного либо векторного потенциала поля, а не порядок однородности для вектор-функции, задающей напряжённость электрического поля или же индукцию магнитного поля.

Калибровка векторного потенциала для статических полей

Поскольку векторный потенциал может быть задан с большой степенью свободы, на него принято налагать дополнительные условия (называемые калибровкой), позволяющие приспособить его наилучшим образом для решения имеющейся физической задачи [16, 17, 36–41]. Интересно рассмотреть, как сочетается требование для векторного потенциала быть однородной по Эйлеру функцией с типичными калибровочными ограничениями [39, 40]. В связи с тем, что для оптики заряженных частиц характерны статические и квазистатические задачи, в данном разделе рассматриваются только стационарные калибровки векторного потенциала магнитного (магнитостатического) поля, не затрагивающие электрический потенциал.

Рассмотрим, например, кулоновскую калибровку* $\operatorname{div}\vec{A}=0$ или, в более общем случае, калибровку $\operatorname{div}\vec{A}=\varphi$, где $\varphi(x, y, z)$ – фиксированная функция с порядком однородности $(k-1)$. Если $\vec{A}^0(x, y, z)$ – найденный ранее частный случай однородного векторного потенциала с порядком однородности k, соответствующий заданному однородному бездивергентному полю, то при $k\neq-1$ все остальные однородные векторные потенциалы обязаны отличаться от него на градиент скалярной однородной функции: $\vec{A}=\vec{A}^0+\nabla F$, где $F(x, y, z)$ – скалярная функция, однородная по Эйлеру с порядком однородности $(k+1)$. В таком случае для функции F должно выполняться уравнение Пуассона с однородной правой частью: $\nabla^2 F=H$, где $H(x, y, z)=\varphi(x, y, z)-\operatorname{div}\vec{A}^0(x, y, z)$ – функция, однородная по Эйлеру с порядком однородности, равным $(k-1)$. Остаётся лишь убедиться, что для уравнения Пуассона с однородной правой частью найдётся однородное же решение нужного порядка. Таким решением, например, будет частное решение уравнения Пуассона, записанное в виде ньютоновского потенциала ([34], §19):

$$F(x, y, z)= \\ =\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{H(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}dV', \qquad (16)$$

где интегрирование выполняется по всему пространству R^3, и которое, как можно проверить, является однородной по Эйлеру функцией. При $k=-1$ ход поиска решения не изменится: логарифмическая добавка (4) при подстановке

$$F(x, y, z)=\hat{F}(x, y, z)+ \\ +F_0\ln\left(\left(x+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\Big/R\right), \qquad (17)$$

где $\hat{F}(x, y, z)$ – однородная скалярная функция нулевого порядка, является гармонической функцией (т. е., дивергенция её градиента равна нулю), поэтому однородная функция $\hat{F}(x, y, z)$ должна будет удовлетворять тому же самому уравнению Пуассона. Значит, частное решение для $\hat{F}(x, y, z)$ снова может быть вычислено по формуле (16). Тем самым мы доказали, что для бездивергентного векторного поля, однородного по Эйлеру, всегда существует однородный векторный потенциал, удовлетворяющий кулоновской калибровке.

Точно так же разбираются и другие калибровочные условия, приведённые в [39, 40]. В частности, расширенная калибровка Пуанкаре (мультиполярная калибровка), записанная в виде $\vec{r}\cdot\vec{A}==xA_X+yA_Y+zA_Z=\chi(x, y, z)$, при заданной в правой части однородной функции $\chi(x, y, z)$ порядка $(k+1)$ приводится к уравнению $x\,\partial F/\partial x+y\,\partial F/\partial y+z\,\partial F/\partial z=h(x, y, z)$, где $h==\chi-\left(xA_X^0+yA_Y^0+zA_Z^0\right)$ будет однородной функцией порядка $(k+1)$. Поскольку при этом и сама функция F должна быть однородной, то есть удовлетворять дифференциальному соотношению Эйлера $x\,\partial F/\partial x+y\,\partial F/\partial y+z\,\partial F/\partial z=(k+1)F$, то отсюда при $k\neq-1$ получается явное выражение в виде $F(x, y, z)=h(x, y, z)/(k+1)$ (однородная функция). Но при $k=-1$ после подстановки (17) в силу тождества $x\,\partial\hat{F}/\partial x+y\,\partial\hat{F}/\partial y+z\,\partial\hat{F}/\partial z=0$ (поскольку $\hat{F}$ – однородная функция нулевого порядка) вместо уравнения для функции $\hat{F}$ получаем условие $F_0=h(x, y, z)$ для константы F_0. Это означает, что при $k=-1$ попытка обеспечить калибровочное условие Пуанкаре может привести к однородному векторному потенциалу только в специальных случаях, т. е. когда $h(x, y, z)=\text{const}$. (Естественно, это не означает, что при $k=-1$ калибровка Пуанкаре невозможна – просто её результатом больше не будет векторный потенциал, однородный по Эйлеру.)

---

* Кулоновская калибровка оказывается полезной при решении нерелятивистских магнитостатических задач, а также при конструировании разложения Гельмгольца [34].

Определённый интерес представляет также т. н. симметричная калибровка, которая в расширенной форме приобретает вид $\vec{A}-c\left[\vec{B}\times\vec{r}\right]=\vec{\Omega}(x, y, z)$, где c – константа, $\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}$ – исходное векторное поле, а $\vec{\Omega}(x, y, z)$ – заданная в правой части вектор-функция (как правило, равная нулю). Однако для того, чтобы обеспечить выполнение сразу трёх условий калибровки, в нашем распоряжении имеется лишь единственный рычаг воздействия – скалярная функция $F(x, y, z)$, с помощью которой выполняется переход к новому векторному потенциалу по формулам $A_X \to \partial F/\partial x + A_X^0$, $A_Y \to \partial F/\partial y + A_Y^0$, $A_Z \to \partial F/\partial z + A_Z^0$, где $\vec{A}^0=\left(A_X^0, A_Y^0, A_Z^0\right)$ – исходный векторный потенциал. Тем не менее, эта задача имеет решение, если $\vec{\Omega}(x, y, z)=\nabla\omega(x, y, z)$ – градиент скалярной функции, $A_X^0(x, y, z)$, $A_Y^0(x, y, z)$, $A_Z^0(x, y, z)$ – однородные функции одного и того же порядка k (точнее, удовлетворяют дифференциальным соотношениям Эйлера для однородных функций соответствующего порядка), константа $c=1/(k+1)$. Тогда калибровочная функция $F(x, y, z)$ конструируется как

$$F(x, y, z)=-\frac{xA_X^0(x, y, z)+yA_Y^0(x, y, z)+zA_Z^0(x, y, z)}{(k+1)}+\omega(x, y, z). \tag{18}$$

Когда $\nabla\omega(x, y, z)=\vec{\Omega}(x, y, z)$ – однородная функция порядка k, то, как показано выше, при $k\neq-1$ функция $\omega(x, y, z)$ обязана быть однородной функцией порядка $(k+1)$. Тогда функция $F(x, y, z)$, вычисляемая по формуле (18), тоже будет однородной и, соответственно, однородным будет новый векторный потенциал $\vec{A}(x, y, z)$. В результате симметричная калибровка, когда она осуществима, в типичном случае приводит к однородному векторному потенциалу. Как и в предыдущем случае, $k=-1$ является исключением, для которого решение существует лишь при специальным образом выбранных правых частях $\vec{\Omega}(x, y, z)$.

Наконец, рассмотрим калибровку $\vec{e}_0\cdot\vec{A}=\alpha(x, y, z)$, где $\vec{e}_0$ – постоянный вектор, а $\alpha(x, y, z)$ – заданная однородная функция порядка k. Без ограничения общности можно считать, что $\vec{e}$ будет единичным вектором, направленным вдоль оси OZ. Тогда функция $F(x, y, z)$, управляющая окончательным видом векторного потенциала $\vec{A}(x, y, z)$, должна будет удовлетворять условию $\partial F(x, y, z)/\partial z=\alpha(x, y, z)-A_Z^0(x, y, z)=J(x, y, z)$, где $J(x, y, z)$ – однородная функция порядка k. Теперь для однородной функции $J(x, y, z)$ нужно сконструировать однородную же первообразную. Это выполняется с помощью стандартной для однородных функций замены $F(x, y, z)=x^{k+1}f(y/x,\ z/x)$, $J(x, y, z)=x^k j(y/x, z/x)$ (см. [1, 2]), после чего для вспомогательных функций $f(p, q)$ и $j(p, q)$ получается соотношение $\partial f(p, q)/\partial q=j(p, q)$, всегда разрешимое. Из выполнимости этой калибровки, в частности, следует, что однородный векторный потенциал всегда можно привести к виду, когда одна из его заранее выбранных компонент станет нулём, а свойство однородности сохранится.

Разложение Гельмгольца для трёхмерных полей, однородных по Эйлеру

Теорема разложения Гельмгольца [34] постулирует возможность разложения любого дифференцируемого векторного поля на сумму потенциального и соленоидального полей (то есть, представимых как градиент скалярной функции и как ротор векторной функции). Вопреки распространённому (особенно для англоязычных источников) мнению такое разложение не является единственным*, поскольку всегда можно сконструировать вспомогательное поле, одновременно и потенциальное, и соленоидальное (то есть, с нулевым ротором и нулевой дивергенцией) – такое поле необходимым образом будет являться градиентом гармонического скалярного потенциала (т. е. удовлетворяющего уравнению Лапласа). Если

* Единственность разложения Гельмгольца имеет смысл, если векторное поле определено во всём пространстве R^3, нигде не имеет особых точек, а на бесконечности задано условие достаточно быстрого стремления векторных полей к нулю – ведь по теореме Лиувилля гармоническая функция, не имеющая особых точек во всём пространстве R^3, включая сюда и бесконечно удалённую точку, обязана быть константой. Во всех же других случаях данное утверждение не верно.

прибавить это вспомогательное поле к одной части разложения и вычесть из другой части разложения, мы получим новое разложение Гельмгольца для того же самого векторного поля. Однако то, что любое векторное поле можно разбить (хотя бы и не единственным образом) на сумму поля с ненулевой дивергенцией и нулевым ротором и поля с нулевой дивергенцией и ненулевым ротором, где первое поле представимо в виде градиента скалярной функции, а второе поле представимо в виде ротора векторной функции, является важным. Подробное и аккуратное доказательство теоремы Гельмгольца можно найти в [34].

Из приведённых ранее рассуждений следует, что если поле является однородным с ненулевым порядком однородности, то можно выбрать разложение Гельмгольца так, чтобы обе компоненты разложения были однородными по отдельности, а не только в сумме, а скалярный потенциал для потенциальной компоненты и векторный потенциал для соленоидальной компоненты, в свою очередь, были однородными по Эйлеру функциями. Но при нулевом порядке однородности у скалярного потенциала, градиент которого (потенциальная компонента разложения Гельмгольца) остаётся однородной вектор-функцией, кроме однородной части может присутствовать неоднородная логарифмическая добавка вида (4), разрушающая однородность скалярного потенциала.

Доказательство выглядит следующим образом. Дивергенция однородного векторного поля и ротор однородного векторного поля очевидным образом являются однородными функциями соответствующего порядка. Частные решения проблемы Гельмгольца для поля $\vec{F}_D(x, y, z)$ с ненулевой дивергенцией $D(x, y, z)$ и нулевым ротором и для поля $\vec{F}_R(x, y, z)$ с ненулевым ротором $\vec{R}(x, y, z)$ и нулевой дивергенцией, устанавливаемые формулами:

$$\begin{gathered}\vec{F}_D(\vec{r}) = \operatorname{grad}\left(-\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{D(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'\right),\\ \vec{F}_R(\vec{r}) = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\vec{R}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'\right)\end{gathered} \tag{19}$$

(см. формулу (77) из §19 в [34]), где интегрирование выполняется по всему трёхмерному пространству, а вектор-функция $\vec{R}$ удовлетворяет необходимому и достаточному условию $\operatorname{div}\vec{R} = 0$. Выражения (19) оказываются однородными функциями, когда функции $D(x, y, z)$ и $\vec{R}(x, y, z)$ будут однородными, а интегралы сходящимися. Поэтому рассматриваемое однородное векторное поле будет представлено как сумма трёх однородных полей $\vec{F}_D(x, y, z)$, $\vec{F}_R(x, y, z)$ и $\vec{F}_0(x, y, z)$, где поле $\vec{F}_0(x, y, z)$ – поле, у которого и ротор, и дивергенция являются нулевыми, – получается при вычитании из исходного однородного поля однородных полей $\vec{F}_D(x, y, z)$ и $\vec{F}_R(x, y, z)$.

Примечание. Здесь следует аккуратно рассматривать отрицательные показатели однородности, приводящие к сингулярному поведению функций $D(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ в начале координат, и, в частности, случай нулевого порядка однородности. Но для того, чтобы сконструировать однородные частные решения $\vec{F}_D(x, y, z)$ и $\vec{F}_R(x, y, z)$, выраженные с помощью градиента однородного скалярного потенциала $U(x, y, z)$ и ротора однородного векторного потенциала $\vec{A}(x, y, z)$, вообще говоря, нет необходимости использовать формулы (19) и полагаться на сходимость соответствующих интегралов. После «однородной» параметризации типа Донкина [23, 26–28, 36–38], имеющей вид $U(x, y, z) = \rho^k u(p, q)$, $\vec{A}(x, y, z) = \rho^k \vec{a}(p, q)$, $D(x, y, z) = \rho^{k-2} d(p, q)$, $\vec{R}(x, y, z) = \rho^{k-2} \vec{r}(p, q)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $p = y/(x+\rho)$, $q = z/(x+\rho)$, задача сводится к неоднородным двумерным эллиптическим уравнениям для неизвестных функций $u(p, q)$ и $\vec{a}(p, q)$, на которые уже не наложено никаких дополнительных ограничений. Новые уравнения не имеют сингулярных точек и у них всегда будут иметься подходящие решения, причём с достаточной степенью произвола [42]. Математические детали, связанные с этим вариантом нахождения частных решений для однородной задачи Гельмгольца, выходят за рамки данной статьи.

Для найденных частных решений $\vec{F}_D(x, y, z)$, $\vec{F}_0(x, y, z)$ ротор равен нулю, поэтому каждую из них можно представить как градиент скалярного потенциала. Для частных решений $\vec{F}_D(x, y, z)$, $\vec{F}_0(x, y, z)$ дивергенция равна нулю, поэтому каждую из них можно представить как ротор векторного потенциала. В соответствии с доказанными ранее теоремами и скалярные потенциалы, и векторные потенциалы могут быть выбраны как однородные функции. Исключением является нулевой порядок однородности, при котором скалярный потенциал может содержать логарифмическую неоднородную добавку вида (4). При этом представлять ли бездивергентное и безвихревое поле $\vec{F}_0(x, y, z)$ как градиент скалярного потенциала, как ротор векторного потенциала или в смешанной форме, зависит от выбора исследователя.

Рассмотрим, однако, более внимательно логарифмическую поправку скалярного потенциала, записанную в форме (4). Дивергенция градиента этого скалярного потенциала равна нулю, поэтому такое поле можно представить и как градиент однородного скалярного потенциала с неоднородной аддитивной логарифмической особенностью, и как ротор однородного векторного потенциала. Поэтому можно *всегда* свести разложение Гельмгольца к сумме однородного потенциального поля с однородным скалярным потенциалом и однородного соленоидального поля с однородным векторным потенциалом. Но при этом для нулевого порядка однородности в разложении может возникать неустранимое соленоидальное поле даже тогда, когда у исходного поля ротор равен нулю и следует ожидать присутствие в разложении лишь потенциальной компоненты. Подобные разложения выглядят странно, так что для таких случаев сохранение неоднородной логарифмической особенности у скалярного потенциала может оказаться более предпочтительным выходом.

Обратное утверждение для задачи о восстановлении векторного поля по заданной дивергенции $D(x, y, z)$ и заданному ротору $\vec{R}(x, y, z)$, когда функции $D(x, y, z)$ и $\vec{R}(x, y, z)$ будут однородными, является неверным: поле с однородной дивергенцией и однородным ротором не всегда будет однородным и поэтому не всегда может быть выражено через однородный скалярный потенциал и однородный векторный потенциал. В качестве примера возьмём сумму полей $\vec{F}_D(x, y, z)$, $\vec{F}_R(x, y, z)$ и $\vec{F}_0(x, y, z)$, где $\vec{F}_D(x, y, z)$ – однородная вектор-функция с однородной дивергенцией и нулевым ротором, являющаяся градиентом однородного скалярного потенциала, $\vec{F}_R(x, y, z)$ – однородная вектор-функция с однородным ротором и нулевой дивергенцией, являющаяся ротором однородного векторного потенциала, а $\vec{F}_0(x, y, z)$ – неоднородная вектор-функция, которая, однако, является градиентом неоднородной гармонической функции и поэтому имеет нулевые дивергенцию и ротор. Тем не менее, при однородности дивергенции и ротора всегда возможно представление векторного поля в виде суммы $\vec{F}_D(x, y, z)$, $\vec{F}_R(x, y, z)$ и $\vec{F}_0(x, y, z)$, где векторные поля $\vec{F}_D(x, y, z)$ (потенциальное поле с нулевым ротором и заданной дивергенцией) и $\vec{F}_R(x, y, z)$ (соленоидальное поле с нулевой дивергенцией и заданным ротором) являются однородными, а поле $\vec{F}_0(x, y, z)$ является безвихревым и бездивергентным с неопределённым статусом однородности. При этом такое представление осуществимо в том числе и тогда, когда дивергенция и ротор имеют разные порядки однородности.

Авторы посвящают эту статью памяти нашего общего учителя и наставника Юрия Константиновича Голикова, создателя и бессменного руководителя лаборатории аналитической корпускулярной оптики при кафедре физической электроники Ленинградского политехнического института (ныне Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого).

Авторы считают своей прямой обязанностью выразить глубокую благодарность создателям, сотрудникам и спонсорам сайта rspl.royalsocietypublishing.org (Proceedings of the Royal Society of London), благодаря работе которых, в частности, имеется возможность свободно познакомиться с уникальными и раритетными ссылками [27, 28].

Для проведения и проверки аналитических выкладок использовалась программа Wolfram Mathematica версии 11 [43].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Физматлит, 2001.

2. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 1. – М.: Наука, 1974.

3. *Голиков Ю. К., Краснова Н. К.* // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. № 2. С. 9.

4. *Голиков Ю. К., Краснова Н. К.* Теория синтеза электростатических энергоанализаторов. – Санкт-Петербург: Издательство Политехнического университета, 2010.

5. *Краснова Н. К.* Теория и синтез диспергирующих и фокусирующих электронно-оптических сред: дис. ... докт. физ.-мат. наук: – СПб, 2013.

6. *Голиков Ю. К., Краснова Н. К.* // Прикладная физика. 2007. № 2. С. 5.

7. *Голиков Ю. К., Краснова Н. К., Абрамёнок О. А.* // Прикладная физика. 2011. № 5. С. 69.

8. *Голиков Ю. К., Краснова Н. К.* // Научное приборостроение. 2014. Т. 24. № 1. С. 50.

9. *Аверин И. А., Бердников А. С., Галль Н. Р.* // Письма в ЖТФ. 2017. Т. 43. Вып. 3. С. 39.

10. *Аверин И. А.* // Научное приборостроение. 2015. Т. 25. № 3. С. 35.

11. *Краснова Н. К.* // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. Вып. 6. С. 97.

12. *Аверин И. А.* / Тез. докл. VII Съезда ВМСО и VI Всероссийской конференции, 02–17 октября 2015 г., Москва: – М.: ВМСО, 2015. С. 132.

13. *Бердников А. С., Аверин И. А.* // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 89.

14. *Бердников А. С., Аверин И. А., Голиков Ю. К.* // Масс-спектрометрия. 2015. Т. 12. № 4. С. 272.

15. *Бердников А. С., Аверин И. А., Голиков Ю. К.* // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13. № 1. С. 11.

16. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – М.: Наука, 1988.

17. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.

18. *Вольник Г.* Оптика заряженных частиц. – СПб.: Энергоатомиздат, 1992.

19. *Хокс П., Каспер Э.* Основы электронной оптики. Т. 1-2. – М.: Мир, 1993.

20. *Yavor M. I.* Optics of charged particle analyzers. – Amsterdam: Academic Press, 2009.

21. *Бердников А. С., Аверин И. А.* // Масс-спектрометрия. 2016. Т. 13. № 1. С. 62.

22. *Аверин И. А., Бердников А. С.* // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 5.

23. *Бердников А. С., Аверин И. А., Краснова Н. К., Соловьёв К. В.* // Научное приборостроение. Т. 26. № 4. С. 13.

24. *Бердников А. С., Аверин И. А., Краснова Н. К., Соловьёв К. В.* // Научное приборостроение. Т. 26. № 4. С. 31.

25. *Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П. Г.* Трактат по натуральной философии. Часть I. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.

26. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1952.

27. *Donkin W. F.* // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1857. Vol. 147. P. 43.

28. *Donkin W. F.* // Proceedings of the Royal Society of London. 1856–1857. Vol. 8. P. 307.

29. *Голиков Ю. К.* // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2(54). С. 59.

30. *Голиков Ю. К.* // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2(54). С. 165.

31. *Бердников А. С., Аверин И. А., Краснова Н. К., Соловьёв К. В.* // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2(54). С. 17.

32. *Бердников А. С., Аверин И. А., Краснова Н. К., Соловьёв К. В.* // Вестник Актюбинского регионального государственного университета им. К. Жубанова. Физико-математические науки. 2016. № 2 (54). С. 147.

33. *Бердников А. С., Аверин И. А., Краснова Н. К., Соловьёв К. В.* // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Сер. Физические и математические науки. 2017. № 1.

34. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления – М.: Наука, 1965.

35. *Голиков Ю. К., Уткин К. Г., Чепарухин В. В.* Расчет элементов электростатических электронно-оптических систем: учебное пособие. – Ленинград: Издательство ЛПИ, 1984.

36. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж.* Курс современного анализа. Часть 2: Трансцендентные функции. – М.: ГИФМЛ, 1963.

37. *Габдуллин П. Г., Голиков Ю. К., Краснова Н. К., Давыдов С. Н.* // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 2. С. 91.

38. *Габдуллин П. Г., Голиков Ю. К., Краснова Н. К., Давыдов С. Н.* // Журнал технической физики. 2000. Т. 70. № 3. С. 44.

39. Калибровка векторного потенциала – Википедия, URL: http://ru.wikipedia.org.

40. *Jackson J. D.* // American. Journal of Physics. 2002. Vol. 70. No. 9. P. 917.

41. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965.

42. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. – М.: ОГИЗ, 1948.

43. Программа *Wolfram Mathematica,* URL: www. wolfram.com.

PACS: 41.85.-p, 41.85.Lc, 41.85.Qg, 41.90.+e

Theorems on the homogeneity of scalar and vector potentials for 3D electric and magnetic fields which are homogeneous in Euler terms

A. S. Berdnikov[1], *I. A. Averin*[1,2], *N. K. Krasnova*[2], *and K. V. Solovyev*[2]

[1] Institute for Analytical Instrumentation, RAS
26 Rizskiy passage, St. Petersburg, 190103, Russia
Email: asberd@yandex.ru

[2] Peter The Great St. Petersburg Polytechnic University
29 Polytechnicheskaya, St. Petersburg, 195251, Russia

Received December 1, 2016

Electric and magnetic fields which are homogeneous in Euler terms are a useful instrument to design the systems of charge particle optics. The similarity principle for charged particle trajectories in these fields which was realized by Yu. K. Golikov for the first time enables to create spectrographic charge particle optical systems in a more systematic and intelligence way by using the fields which are homogeneous in Euler terms. It is custom to assume that electric and magnetic fields which are homogeneous in Euler terms are characterized by the potentials (scalar and/or vector ones) which are the homogeneous functions by themselves as well. This paper analyzes and proves mathemati-

cally strictly the corresponding theorems. An important result is that for the fields which are homogeneous in Euler terms with zero order of homogeneity the statement that the scalar potential is a homogeneous function of zero order by itself is not true since the fatal additive logarithmic corrector can appear for this case. It is amusing that for a vector potential the statement that a vector field which is homogeneous in Euler terms has a homogeneous vector potential of corresponding order is true for any order of the homogeneity.

Keywords: electric fields; magnetic fields; potential vector fields; solenoidal vector fields; uniform in Euler' terms functions; similarity principle for charged particle trajectories; Laplace equation; Helmholtz decomposition.

REFERENCES

1. G. M. Fikhtengolts, *Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 1.* (Fizmatlit Publ., Moscow, 2001) [in Russian].

2. V. I. Smirnov, *Course of Higher Mathematics. Vol. 1.* (Nauka Publ., Moscow, 1974) [in Russian].

3. Yu. K. Golikov and N. K. Krasnova, Tech. Phys. **81** (2), 9 (2011) [in Russian].

4. Yu. K. Golikov and N. K. Krasnova, *Theory of Synthesis of Electrostatic Power Analyzers* (Polytechnical university Publ., Saint-Petersburg, 2010) [in Russian].

5. N. K. Krasnova, *Theory and Synthesis of the Dispersing and Focusing Electron-Optical Environments. Dr. Sci. thesis.* (Saint-Petersburg, 2013.) [in Russian].

6. Yu. K. Golikov and N. K. Krasnova, Prikl. Fiz., No. 2, 5 (2007).

7. Yu. K. Golikov, N. K. Krasnova, and O. A. Abramyonok, Prikl. Fiz., No 5, 69 (2011).

8. Yu. K. Golikov and N. K. Krasnova, Nauchnoe Priborostroenie. **24** (1), 50 (2014).

9. I. A. Averin, A. S. Berdnikov, and N. R. Gall, Tech. Phys. Lett. **43** (3), 39 (2017).

10. I. A. Averin, Nauchnoe Priborostroenie, **25** (3), 35 (2015).

11. N. K. Krasnova, Tech. Phys. **81**, 97 (2011).

12. I. A. Averin, in *Proc. Congress of VMSO and VI All-Russian conference. 02–17 October 2015,* (Moscow, VMSO "Trovant" Publ). P. 132.

13. A. S. Berdnikov and I. A. Averin, Usp. Prikl. Fiz., **4**, 89 (2016).

14. A. S. Berdnikov, I. A. Averin, and Yu. K. Golikov, Mass-spektrometria, **12** (4), 272 (2015).

15. A. S. Berdnikov, I. A. Averin, and Yu. K. Golikov, Mass-spektrometria, **13** (1), 11 (2016).

16. L. D. Landau and Ye. M. Lifshits, *Field Theory* (Nauka Publ., Moscow, 1988).

17. J. A. Stretton, *Theory of Electromagnetism* (GIFML Publ., Moscow, 1948) [in Russian].

18. H. Wollnik, *Optics of Charged Particles.* (Orlando: Elsevier, Academic Press, 1987).

19. P. W. Hawkes and E. Kasper, *Principles of Electron Optics*. Vol. 1-3. (Elsevier, Academic Press, 1989).

20. M. I. Yavor, *Optics of Charged Particle Analyzers*. (Amsterdam: Elsevier, Academic Press, 2009).

21. A. S. Berdnikov and I. A. Averin, Mass-spektrometria. **13** (1), 62 (2016).

22. I. A. Averin and A. S. Berdnikov, Usp. Prikl. Fiz., **4** (1), 5 (2016).

23. A. S. Berdnikov, I. A. Averin, N. K. Krasnova, and K. V. Solovyev, Nauchnoe Priborostroenie, **26** (4), 13 (2016).

24. A. S. Berdnikov, I. A. Averin, N. K. Krasnova, and K. V. Solovyev, Nauchnoe Priborostroenie, **26** (4), 31 (2016).

25. W. Thomson (Lord Kelvin), P. G. Teht, *The Treatise on Natural Philosophy, Part I.* (NIC "Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika" Publ., Moscow-Izhevsk, 2010) [in Russian].

26. E. V. Gobson, *Theory of Spherical and Ellipsoidal Functions* (Izdatel'stvo inostrannoj literatury, Moscow, 1952) [in Russian].

27. W. F. Donkin, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **147**, 43–57 (1857).

28. W. F. Donkin, Proceedings of the Royal Society of London, **8**, 307–310 (1856–1857).

29. Yu. K. Golikov, Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki, No. 2(54), 59 (2016).

30. Yu. K. Golikov, Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki, No. 2(54), 165 (2016)

31. A. S. Berdnikov, I. A. Averin, N. K. Krasnova, and K. V. Solovyev, Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki. 2016. No. 2(54). P. 17.

32. A. S. Berdnikov, I. A. Averin, N. K. Krasnova, and K. V. Solovyev, Vestnik Aktyubinskogo regional'nogo gosudarstvennogo universiteta im. K. Zhubanova. Fiziko-matematicheskie nauki. 2016. No. 2(54). P. 147.

33. A. S. Berdnikov, I. A. Averin, N. K. Krasnova, and K. V. Solovyev, St. Petersburg Polytechnic University Journal: Physics and Mathematics. 2017. No. 1.

34. N. Ye. Kochin, *Vector Calculus and Beginning of Tensor Calculus (11th edition)* (Nauka Publ., Moscow, 1965) [in Russian].

35. Yu. K. Golikov, K. G. Utkin, and V. V. Cheparuhin, *Calculation of Elements of Electrostatic Electron-Optical Systems. Education book.* (LPI Publ., Leningrad, 1984) [in Russian].

36. E. T. Whittaker and G. Watson, *Course of the Modern Analysis. Part 2: Transcendental Functions* (GIFML Publ., Moscow, 1963) [in Russian].

37. P. G. Gabdullin, Yu. K. Golikov, N. K. Krasnova, and S. N. Davydov, Tech. Phys., **70** (2), 91 (2000).

38. P. G. Gabdullin, Yu. K. Golikov, N. K. Krasnova, and S. N. Davydov, Tech. Phys., **70** (3), 44 (2000).

39. *Gauge Fixing*, (Wikipedia. URL: http://www.en.wikipedia.org).

40. J. D. Jackson, Am. J. of Phys., **70** (9), 917 (2002).

41. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics (3rd ed.)*. (John Wiley & Sons, 1999).

42. I. N. Vekua, *New Methods for Solving Elliptic Equations*. (OGIZ, Moscow, 1948) [in Russian].

43. *Wolfram Mathematica, Program* (URL: http://www.wolfram.com.)