ОБЩАЯ ФИЗИКА

УДК 538.9; 519.216 PACS: 05.40.-a; 72.70.+m

О трехуровневом случайном сигнале

Б. И. Якубович

Проанализирован трехуровневый случайный сигнал. Вычислены выражения для спектра сигнала в различных случаях. Определен вид спектра сигнала при равномерном распределении вероятностей изменения амплитуды сигнала для каждого значения амплитуды. Сделаны выводы о возможности широкого применения полученных результатов для исследований физических процессов, имеющих вид трехуровневого случайного сигнала. Показано, что результаты статьи могут быть использованы для изучения взрывного шума и изучения электрических флуктуаций в полупроводниках, вызванных ловушками. Отмечена возможность применения результатов анализа трехуровневого случайного сигнала при проведении как фундаментальных, так и прикладных исследований.

Ключевые слова: случайные сигналы, случайные последовательности, импульсы, спектры, флуктуации.

Введение

Среди стохастических процессов, применяющихся для описания физических объектов различной природы и многочисленных технических систем, значительная часть имеет вид случайного сигнала, который может принимать одно из нескольких возможных значений. При проведении исследований в различных областях физики и при решении многих технических задач наиболее часто встречаются случайные сигналы данного вида, которые могут принимать одно из двух или трех возможных значений. Широкое распространение и во многих случаях принципиальная и практическая значимость стохастических процессов в физике и технике, приводящих к случайным сигналам указанного типа, делают важным изучение спектров таких сигналов. Случайный сигнал, который может принимать одно из двух возможных значений, обычно называется случайным телеграфным сигналом. Он достаточно хорошо изучен. Спектр данного сигнала вычислен в [1, 2]. В более общем виде случайный телеграфный сигнал проанализирован в [3, 4]. Случайный сигнал, который может принимать одно из трех возможных значений (иначе говоря, трехуровневый случайный сигнал), исследовался значительно меньше.

Целью данной работы являлось вычисление спектра трехуровневого случайного сигнала.

Теоретический анализ

Рассмотрим трехуровневый случайный сигнал, амплитуда которого может принимать значения: $a, 0, -b$. Изменения амплитуды происходят между ее соседними значениями. Введем следующие обозначения: τ_a, τ_0, τ_b – времена, в течение которых амплитуда сигнала принимает соответственно значения: $a, 0, -b$; $u(\tau_a)$, $v(\tau_0)$, $w(\tau_b)$ – плотности распределений этих времен. Рассмотрим случайный сигнал с нулевым средним значением как случайную последовательность прямоугольных импульсов с амплитудами a и $-b$, имеющих соответственно длительности импульсов τ_a и τ_b и интервалы между импульсами τ_0. Анализируем весьма общий случай: распределения параметров импульса заданы в общем виде, параметры импульса статистически связаны, параметры различных импульсов независимы, распределение интервалов между импульсами задано в общем виде. Считаем случайную последовательность стационарной.

Вычислим спектр трехуровневого случайного сигнала. Для этого найдем спектр случайной последовательности импульсов с указанными выше

Якубович Борис Иосифович, старший научный сотрудник.
Петербургский институт ядерной физики,
Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт».
Россия, 188300, Ленинградская обл., г. Гатчина, Орлова роща.
Тел. (81371) 4-64-92. E-mail yakubovich_bi@pnpi.nrcki.ru

Статья поступила в редакцию 10 февраля 2017 г.

свойствами. Случайную последовательность импульсов можно записать в следующем виде:

$$X(t)=\sum_{j=1}^{n} D_j x\left(t-\tau_1-\theta_1...-\tau_{j-1}-\theta_{j-1},\tau_j\right), \quad (1)$$

где $x(t)$ – функция, описывающая форму импульса, D – амплитуда, τ – длительность импульса, θ – временной интервал между импульсами, n – число импульсов в последовательности продолжительностью T.

Проведем преобразование Фурье случайной последовательности импульсов:

$$F(f)=\int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-2\pi ift}dt = \\ =\sum_{j=1}^{n} D_j e^{-2\pi if\left(\tau_1+\theta_1...+\tau_{j-1}+\theta_{j-1}\right)}F_0\left(f,\tau_j\right), \quad (2)$$

причем здесь использовано выражение:

$$F_0\left(f,\tau_j\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t,\tau_j\right)e^{-2\pi ift}dt. \quad (3)$$

Тогда получаем соотношение:

$$\left|F(f)\right|^2=\sum_{j=1}^{n} D_j{}^2\left|F_0\left(f,\tau_j\right)\right|^2+ \\ +2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j} D_jD_{j+i}e^{2\pi if\left(\tau_j+\theta_j...+\tau_{j+i-1}+\theta_{j+i-1}\right)}\times \\ \times F_0\left(f,\tau_j\right)F_0^*\left(f,\tau_{j+i}\right). \quad (4)$$

Используя независимость параметров различных импульсов, рассчитываем среднее по ансамблю $\langle\left|F(f)\right|^2\rangle$ и получаем следующее выражение:

$$\langle\left|F(f)\right|^2\rangle=\sum_{j=1}^{n}\langle D_j{}^2\left|F\left(f,\tau_j\right)\right|^2\rangle+ \\ +2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-j}\langle D_jF_0\left(f,\tau_j\right)e^{2\pi if\tau_j}\rangle\langle D_{j+i}F_0^*\left(f,\tau_{j+i}\right)\rangle\times \\ \times\langle e^{2\pi if\theta_j}\rangle\langle e^{2\pi if\tau_{j+1}}\rangle\langle e^{2\pi if\theta_{j+1}}\rangle...\langle e^{2\pi if\tau_{j+i-1}}\rangle\langle e^{2\pi if\theta_{j+i-1}}\rangle. \quad (5)$$

Вычисляем спектральную плотность случайной последовательности импульсов. Учитывая стационарность рассматриваемого случайного процесса, получаем следующее выражение:

$$S(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{\langle\left|F(f)\right|^2\rangle}{T}=\nu_0\left\{\langle D^2\left|F_0(f,\tau)\right|^2\rangle^2+\right. \\ +2\,\mathrm{Re}\langle DF_0(f,\tau)e^{2\pi if\tau}\rangle\langle DF_0^*(f,\tau)\rangle\times \\ \left.\times\frac{\langle e^{2\pi if\theta}\rangle}{1-\langle e^{2\pi if\tau}\rangle\langle e^{2\pi if\theta}\rangle}\right\}, \quad (6)$$

где $\nu_0=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{n}{T}$ – среднее число импульсов в единицу времени.

Для случайной последовательности, состоящей из импульсов прямоугольной формы, $F_0(f,\tau)$ имеет вид:

$$F_0(f,\tau)=\int_0^{\tau}x(t)e^{-2\pi ift}dt=\frac{e^{-\pi if\tau}\sin\pi f\tau}{\pi f}. \quad (7)$$

Подставляя данное соотношение в формулу (6), получаем выражение для спектра случайной последовательности прямоугольных импульсов:

$$S(f)=\frac{\nu_0}{\pi^2f^2}\left\{\langle D^2\sin^2\pi f\tau\rangle+\right. \\ \left.+2\,\mathrm{Re}\frac{\langle De^{\pi if\tau}\sin\pi f\tau\rangle^2\langle e^{2\pi if\theta}\rangle}{1-\langle e^{2\pi if\tau}\rangle\langle e^{2\pi if\theta}\rangle}\right\}. \quad (8)$$

Введем среднюю частоту изменений амплитуды сигнала ν. Очевидно, что $\nu=2\nu_0$. Обозначим p вероятность изменения амплитуды сигнала из $D=0$ в $D=-b$, и $(1-p)$ вероятность изменения амплитуды сигнала из $D=0$ в $D=a$. Учитывая указанные выше значения, которые может принимать амплитуда трехуровневого случайного сигнала, и соответствующие им распределения времен, находим выражение для спектра трехуровневого случайного сигнала:

$$S(f)=\frac{\nu}{2\pi^2f^2}\left[G(f)+2\,\mathrm{Re}\frac{\Phi(f)}{\Psi(f)}\right], \quad (9)$$

где

$$G(f)=b^2p\int_0^{\infty}\sin^2\pi f\tau_bw(\tau_b)d\tau_b+ \\ +a^2(1-p)\int_0^{\infty}\sin^2\pi f\tau_au(\tau_a)d\tau_a, \quad (10)$$

$$\Phi(f) = [-pb\int\limits_0^\infty e^{\pi i f\tau_b}\sin\pi f\tau_b w(\tau_b)d\tau_b +$$
$$+(1-p)a\int\limits_0^\infty e^{\pi i f\tau_a}\sin\pi f\tau_a u(\tau_a)d\tau_a]^2 \times \qquad (11)$$
$$\times\int\limits_0^\infty e^{2\pi i f\tau_0}v(\tau_0)d\tau_0,$$

$$\Psi(f) = 1 - p\int\limits_0^\infty e^{2\pi i f\tau_b}w(\tau_b)d\tau_b \times$$
$$\times\int\limits_0^\infty e^{2\pi i f\tau_0}v(\tau_0)d\tau_0 - (1-p)\int\limits_0^\infty e^{2\pi i f\tau_a}u(\tau_a)d\tau_a \times \quad (12)$$
$$\times\int\limits_0^\infty e^{2\pi i f\tau_0}v(\tau_0)d\tau_0.$$

В итоге вычислено выражение для спектра трехуровневого случайного сигнала. Функции распределения времен, в течение которых амплитуда сигнала принимает каждое из возможных значений, и распределение вероятностей этих значений заданы в общем виде.

При анализе случайных сигналов в физике и технике наиболее часто рассматривается ситуация, когда имеется равномерное распределение вероятности изменения значения сигнала. Далее рассмотрим трехуровневый случайный сигнал именно в этом случае. При равномерном распределении вероятностей изменения амплитуды сигнала для каждого из возможных значений времена τ_a, τ_0, τ_b распределены по экспоненциальному закону [5]:

$$u(\tau_a) = \frac{1}{\langle\tau_a\rangle}e^{-\tau_a/\langle\tau_a\rangle},$$
$$v(\tau_0) = \frac{1}{\langle\tau_0\rangle}e^{-\tau_0/\langle\tau_0\rangle}, \qquad (13)$$
$$w(\tau_b) = \frac{1}{\langle\tau_b\rangle}e^{-\tau_b/\langle\tau_b\rangle}.$$

Подставляя распределения (13) в формулы (9–12), вычисляем выражение для спектра. В итоге получаем:

$$S_1(f) = \nu\left[G_1(f) + 2\,\mathrm{Re}\frac{\Phi_1(f)}{\Psi_1(f)}\right], \qquad (14)$$

где

$$G_1(f) = \frac{ab\langle\tau_a\rangle\langle\tau_b\rangle}{a\langle\tau_a\rangle + b\langle\tau_b\rangle}\left(\frac{a\langle\tau_a\rangle}{1+4\pi^2 f^2\langle\tau_a\rangle^2} + \frac{b\langle\tau_b\rangle}{1+4\pi^2 f^2\langle\tau_b\rangle^2}\right), \qquad (15)$$

$$\Phi_1(f) = -2\pi^2 f^2\left[\frac{ab\langle\tau_a\rangle\langle\tau_b\rangle(\langle\tau_a\rangle - \langle\tau_b\rangle)}{a\langle\tau_a\rangle + b\langle\tau_b\rangle}\right]^2 \times \frac{1}{(1-2\pi i f\langle\tau_a\rangle)^2(1-2\pi i f\langle\tau_b\rangle)^2(1-2\pi i f\langle\tau_0\rangle)}, \qquad (16)$$

$$\Psi_1(f) = 1 - \frac{1}{(a\langle\tau_a\rangle + b\langle\tau_b\rangle)(1-2\pi i f\langle\tau_0\rangle)} \times \left(\frac{a\langle\tau_a\rangle}{1-2\pi i f\langle\tau_b\rangle} + \frac{b\langle\tau_b\rangle}{1-2\pi i f\langle\tau_a\rangle}\right). \qquad (17)$$

Данное выражение описывает спектр трехуровневого случайного сигнала при равномерном распределении вероятностей изменения амплитуды сигнала для каждого из возможных значений.

Далее рассмотрим практически важный частный случай, когда $a = b$. Используя соотношения (14–17), получаем следующее выражение для спектра трехуровневого случайного сигнала в этом случае:

$$S_2(f) = \nu a^2\left(G_2(f) + 2\,\mathrm{Re}\frac{\Phi_2(f)}{\Psi_2(f)}\right), \qquad (18)$$

где

$$G_2(f) = \frac{\langle\tau_a\rangle\langle\tau_b\rangle}{\langle\tau_a\rangle + \langle\tau_b\rangle}\left(\frac{\langle\tau_a\rangle}{1+4\pi^2 f^2\langle\tau_a\rangle^2} + \frac{\langle\tau_b\rangle}{1+4\pi^2 f^2\langle\tau_b\rangle^2}\right), \qquad (19)$$

$$\Phi_2(f) = -2\pi^2 f^2 \left[\frac{\langle\tau_a\rangle\langle\tau_b\rangle\left(\langle\tau_a\rangle - \langle\tau_b\rangle\right)}{\langle\tau_a\rangle + \langle\tau_b\rangle} \right]^2 \times \frac{1}{\left(1-2\pi i f\langle\tau_a\rangle\right)^2\left(1-2\pi i f\langle\tau_b\rangle\right)^2\left(1-2\pi i f\langle\tau_0\rangle\right)}, \quad (20)$$

$$\Psi_2(f) = 1 - \frac{1}{\left(\langle\tau_a\rangle + \langle\tau_b\rangle\right)\left(1-2\pi i f\langle\tau_0\rangle\right)} \times \left(\frac{\langle\tau_a\rangle}{1-2\pi i f\langle\tau_b\rangle} + \frac{\langle\tau_b\rangle}{1-2\pi i f\langle\tau_a\rangle} \right). \quad (21)$$

Заключение

Проанализирован трехуровневый случайный сигнал. Вычислены выражения, описывающие спектр данного сигнала. Полученные результаты могут использоваться для изучения физических объектов и технических систем, в которых протекают физические процессы, имеющие вид трехуровневого случайного сигнала. Процессы такого вида встречаются в различных областях физики. Отдельно отметим, что достаточно часто они встречаются при исследовании флуктуационных явлений. Например, в следующих значительных для теории флуктуаций случаях. Одним из наиболее важных типов электрических шумов в твердых телах и электронных приборах является взрывной шум [6]. Как установлено в [6, 7], взрывной шум может представлять собой не только бистабильный сигнал ступенчатой формы. Иногда наблюдается многоступенчатый шум, когда существует три или более возможных значений сигнала [7–9]. Шум – стохастический процесс. Соответственно взрывной шум с тремя возможными значениями сигнала представляет собой трехуровневый случайный сигнал, и для изучения такого шума можно использовать результаты, полученные в данной статье. Другим примером являются электрические флуктуации в полупроводниках, вызванные захватом и эмиссией носителей заряда ловушками. Известно, что в полупроводниках могут существовать двухзарядные ловушки [10]. Вследствие захвата и эмиссии носителей двухзарядной ловушкой проводимость полупроводника случайно изменяется, и протекающий в нем ток может принимать одно из трех возможных значений в зависимости от того захвачен ли ловушкой один носитель, захвачено два носителя или ловушка пустая [11, 12]. В таком случае ток в полупроводнике представляет собой трехуровневый случайный сигнал. Таким образом, для изучения электрических флуктуаций в полупроводниках, вызванных двухзарядными ловушками, могут быть использованы результаты данной статьи. Вообще, полученные в статье результаты могут иметь достаточно широкое применение, поскольку физические процессы, имеющие вид трехуровневого случайного сигнала, наблюдаются в различных областях физики. С сигналами такого вида встречаются при разработке различных технических устройств. Соответственно, полученные в статье результаты могут использоваться при решении многочисленных фундаментальных и прикладных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rice S.* // Bell. Syst. Tech. J. 1945. Vol. 24. P. 46.
2. *Machlup S.* // J. Appl. Phys. 1954. Vol. 25. P. 341.
3. *Якубович Б. И.* // Письма ЖТФ. 1995. Т. 21. С. 10.
4. *Якубович Б. И.* Электрические флуктуации в неметаллах. – СПб.: Энергоатомиздат, 1999.
5. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. – М.: Наука, 1976.
6. *Букингем М.* Шумы в электронных приборах и системах. – М.: Мир, 1986.
7. *Giralt G., Martin J. C., Mateu-Perez F. X.* // Electron. Lett. 1966. Vol. 2. P. 228.
8. *Knott K.* // Solid State Electron. 1980. Vol. 23. P. 727.
9. *Farmer K. R., Rogers C. T., Bukrman R. A.* // Phys. Rev. Lett. 1987. Vol. 58. P. 2255.
10. *Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г.* Физика полупроводников. – М.: Наука, 1990.
11. *Якубович Б. И.* Электрический шум и дефекты структуры твердых тел. – Germany: LAP Lambert Academic Publishing, 2012.
12. *Якубович Б. И.* Электрические флуктуации в твердых телах. – Germany: AV Akademikerverlag, 2013.

PACS: 05.40.-a; 72.70.+m

The three-level random signal

B. I. Yakubovich

Petersburg Nuclear Physics Institute,
Gatchina, Leningrad District 1883000, Russia
E-mail: yakubovich_bi@pnpi.nrcki.ru

Received February 10, 2017

The three-level random signal is analysed. Expressions for the spectrum of a signal in various cases are calculated. The type of spectrum of the signal at the uniform distribution of probabilities of change amplitude signal for each value of amplitude is determined. Conclusions are drawn on possibility of a wide use of the obtained results for researches of the physical processes having form of three-level random signal. It is shown that results of article can be used for studying of the burst noise and studying of electric fluctuations in semiconductors caused by traps. The possibility of use of results of the analysis of a three-level random signal both for fundamental, and for applied researches is noted.

Keywords: random signals, random sequences, pulses, spectra, fluctuations.

REFERENCES

1. S. Rice, Bell. Syst. Tech. J. **24**, 46 (1945).
2. S. Machlup. J.Appl.Phys. **25**, 341 (1954).
3. B. I. Yakubovich, Tech. Phys. Lett. **21**, 10 (1995).
4. B. I. Yakubovich, Electric Fluctuations in Nonmetals (Energoatomizdat, SPb, 1999) [in Russian].
5. S. M. Rytov, Introduction in the Statistic Radio Physics (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
6. M. Bukingem, Noises in Electronic Devices (Mir, Moscow, 1986) [in Russian].
7. G. Giralt, J.C. Martin, and F.X. Mateu-Perez, Electron. Lett. **2**, 228 (1966).
8. K. Knott, Solid State Electron. **23**, 727 (1980).
9. K. R. Farmer, C. T. Rogers, and R. A. Bukrman, Phys. Rev. Lett. **58,** 2255 (1987).
10. V. L. Bonch-Bruevich and S. G. Kalashnikov, Physics of Semiconductors (Nauka, Moscow, 1990) [in Russian].
11. B. I. Yakubovich, Electric Noise and Defects of the Solid State Structure (Germany: LAP Lambert Academic Publishing, 2012).
12. B. I. Yakubovich, Electric Fluctuations in Solid States (Germany: AV Akademikerverlag, 2013).