

## Оптимизированный метод расчета рупорной антенны

Н. Д. Наумов

*Для коэффициента направленного действия и диаграммы направленности пирамидального и секториальных рупоров получены удобные для практических расчетов выражения в виде совокупности тригонометрических и рациональных функций. Коэффициент использования поверхности раскрыва рупорной антенны в определенной области изменения параметра, который является комбинацией размеров рупора и длины волны, представлен в виде квадратичной зависимости от этого параметра. Для оптимальной рупорной антенны найдена простая формула оценки ширины диаграммы направленности по половинной мощности. Для плотности потока энергии рупорной антенны в параксиальной области ближней зоны получено аналитическое выражение, применимое на расстоянии от апертуры  $z > 1,6\sqrt{a^2 + b^2}$ , где  $a, b$  – размеры рупора.*

*Ключевые слова:* рупорная антенна, коэффициент направленного действия, диаграмма направленности, ближняя зона.

### Введение

Достоинствами рупорной антенны являются простота ее конструкции и неплохие диапазонные свойства. Эти антенны применяют для сужения диаграммы направленности (ДН) волноводного излучателя. Неоднородность фазового распределения поля в раскрыве рупорной антенны приводит к тому, что коэффициент направленного действия антенны (КНД) и ее ДН описываются сложными выражениями, содержащими интегралы Френеля [1–4]. В связи с этим несомненный интерес представляет получение удобных для практических расчетов выражений для КНД и ДН пирамидального и секториальных рупоров, что и является первой задачей данной работы.

Другой задачей является получение аналитического выражения для плотности потока энергии в ближней зоне указанных выше типов рупорных антенн, т. к. при проведении лабораторных исследований возникает необходимость в таких данных. Существующие аналитические методы позволяют найти поле в дальней зоне, а для теоретической оценки поля в ближней зоне используются численные методы. В данной работе получено решение этой задачи для параксиальной области.

### *H*-плоскостной секториальный рупор

В дальней зоне поле, создаваемое антенной с прямоугольным излучающим раскрывом, определяется следующим выражением [5]:

$$E = \frac{E_0}{2i\lambda R} (1 + \cos\theta) e^{ikR} \times \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} w(x, y) \exp[-ik \sin\theta (x \cos\varphi + y \sin\varphi)] dx dy, \quad (1)$$

где  $a, b$  – размеры раскрыва,  $E_0$  – амплитуда поля в центре антенны,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны,  $w(x, y)$  – распределение поля на апертуре. Начало декартовой системы координат расположено в центре антенны, ось  $Oz$  направлена вдоль оси симметрии антенны, углы сферической системы координат  $\theta, \varphi$  характеризуют точку наблюдения.

Для *H*-плоскостного секториального рупора, возбуждаемого волной  $H_{10}$ , распределение поля в *H*-плоскости характеризуется квадратичным изменением фазы и косинусоидальным изменением амплитуды поля, а в *E*-плоскости – поле синфазное с равномерным распределением амплитуды поля [2]:

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \exp\left(\frac{i\pi x^2}{\lambda L_H}\right),$$

где  $L_H$  – длина рупора в *H*-плоскости.

Вычисление интеграла (1) позволяет получить выражения для поля, создаваемого *H*-плоскостным

---

**Наумов Николай Дмитриевич**, ведущий научный сотрудник, д.ф.-м.н.  
ФГКУ «12 ЦНИИ» Минобороны России.  
Россия, 141307, Московская обл., г. Сергиев Посад-7.  
E-mail: ndnaumov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 18 сентября 2017 г.

секториальным рупором, а затем найти его характеристики. Для КНД рупора получим:

$$D_H = 4\pi \frac{bL_H}{a\lambda} f(\delta). \tag{2}$$

Здесь используются обозначения:

$$f(\delta) = [C(\alpha) + C(\beta)]^2 + [S(\alpha) + S(\beta)]^2,$$

$$f(\delta) = |U(\alpha) + U(\beta)|^2, \quad U(x) = \begin{cases} V(x), & x \geq 0; \\ -V(x), & x < 0, \end{cases}$$

$$V(x) = \frac{1}{2}(1+i) - \left( \frac{1}{2 + 4,142|x| + 3,492x^2 + 6,67|x|^3} + \frac{i(1 + 0,926|x|)}{2 + 1,792|x| + 3,104x^2} \right) \exp\left(i \frac{\pi}{2} x^2\right).$$

В плоскости  $H(\varphi = 0)$  ДН рассматриваемого рупора имеет вид:

$$\Phi_H(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta) |F(\delta, \Lambda_H \sin\theta)|, \tag{3}$$

$$F(\delta, x) = \frac{1}{2\sqrt{f(\delta)}} \left\{ \exp\left(i \frac{\pi x}{2\delta}\right) [U(\alpha - x) + U(\beta + x)] + \exp\left(-i \frac{\pi x}{2\delta}\right) [U(\alpha + x) + U(\beta - x)] \right\}.$$

Приведенный на рис. 1 график модуля функции  $F(\delta, x)$  характеризует ДН  $H$ -плоскостного секториального рупора при  $\delta = 0,6$  (пунктирная линия),  $\delta = 1,2515$  (сплошная линия) и  $\delta = 1,7$  (штрих-пунктирная линия).

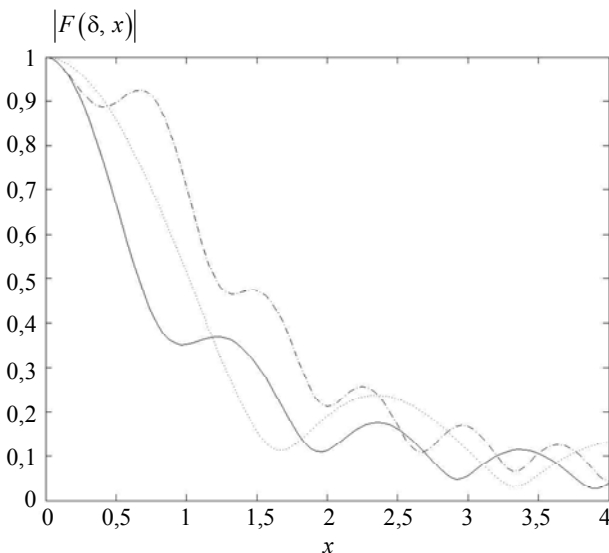


Рис. 1. График модуля функции  $F(\delta, x)$ .

В плоскости  $E(\varphi = \pi/2)$  ДН  $H$ -плоскостного рупора совпадает с ДН однородно возбужденного прямоугольного раскрыва [5]:

$$\alpha = \delta + \frac{1}{2\delta}, \quad \beta = \delta - \frac{1}{2\delta}, \quad \delta = \frac{a}{\lambda\Lambda_H}, \quad \Lambda_H = \sqrt{2 \frac{L_H}{\lambda}},$$

где  $C(x), S(x)$  – интегралы Френеля [6].

Чтобы упростить практические расчеты, воспользуемся аппроксимацией интегралов Френеля совокупностью тригонометрических и рациональных функций [6]. Тогда фигурирующая в (2) функция  $f(\delta)$  запишется в следующем виде:

$$\Phi_E(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta) \frac{\sin\left[\frac{(kb/2)\sin\theta}{(kb/2)\sin\theta}\right]}{(kb/2)\sin\theta}.$$

### ***E*-плоскостной секториальный рупор**

Для  $E$ -плоскостного секториального рупора распределение фазы в  $E$ -плоскости можно приближенно считать квадратичным, распределение амплитуды поля – равномерным, а в  $H$ -плоскости – поле синфазное с косинусоидальным распределением амплитуды поля [2]:

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \exp\left(i \frac{\pi y^2}{\lambda L_E}\right),$$

где  $L_E$  – длина рупора в  $E$ -плоскости. После вычисления интеграла (1) можно найти основные характеристики рассматриваемой рупорной антенны.

Для КНД  $E$ -плоскостного секториального рупора получается следующий результат:

$$D_E = 64 \frac{aL_E}{\pi b\lambda} g(\gamma), \tag{4}$$

$$g(\gamma) = |U(\gamma)|^2, \quad \gamma = \frac{b}{\lambda\Lambda_E}, \quad \Lambda_E = \sqrt{2 \frac{L_E}{\lambda}}.$$

ДН  $E$ -плоскостного секториального рупора в плоскости  $H$  совпадает с известной ДН открытого прямоугольного волновода, возбуждаемого волной  $H_{10}$  [5]:

$$\Phi_H(\theta) = \frac{\pi^2}{2}(1 + \cos\theta) \frac{\cos[(ka/2)\sin\theta]}{\pi^2 - (ka\sin\theta)^2}.$$

Для ДН в плоскости  $E$  получается следующее выражение:

$$\Phi_E(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta) |G(\gamma, \Lambda_E \sin\theta)|, \quad (5)$$

$$G(\gamma, x) = \frac{1}{2\sqrt{g(\gamma)}} [U(\gamma + x) + U(\gamma - x)].$$

Влияние размеров рупора и длины волны на ДН проиллюстрировано на рис. 2, где приведен график модуля функции  $G(\gamma, x)$ , характеризующий ДН  $E$ -плоскостного секториального рупора в плоскости  $E$  при  $\gamma = 0,6$  (пунктирная линия),  $\gamma = 1,0253$  (сплошная линия) и  $\gamma = 1,5$  (штрих-пунктирная линия).

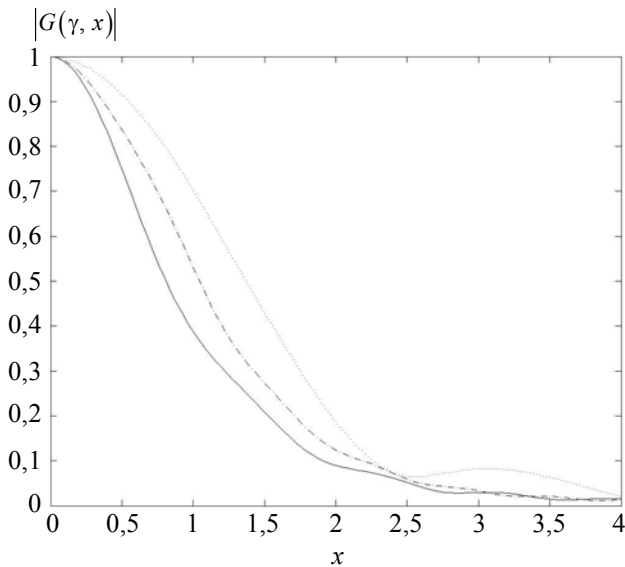


Рис. 2. График модуля функции  $G(\gamma, x)$

### Пирамидальный рупор

Распределение поля на апертуре пирамидального рупора имеет вид [2]:

$$w = \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda}\left(\frac{x^2}{L_H} + \frac{y^2}{L_E}\right)\right].$$

Это означает, что ДН пирамидального рупора в плоскости  $H$  описывается выражением (3), а в плоскости  $E$  – выражением (5).

КНД пирамидального рупора несложно найти, используя его выражение через КНД  $H$ - и  $E$ -плоскостных секториальных рупоров (2) и (4) [2]:

$$D = \frac{\pi\lambda^2}{32ab} D_E D_H = 8\pi \frac{L_E L_H}{ab} f(\delta) g(\gamma).$$

### Оптимальный рупор

Оптимальный рупор имеет такие размеры, при которых для заданной длины рупора его КНД имеет максимальное значение. Из выражения (2) следует, что задача оптимизации размеров  $H$ -плоскостного секториального рупора сводится к нахождению точки максимума функции  $u(\delta) = f(\delta)/\delta$ . С помощью имеющегося в пакете компьютерной математики MATLAB метода исследования функции на экстремум найдем, что функция  $u(\delta)$  имеет максимум при  $\delta = \delta_0 = 1,2515$ . Поэтому для оптимального размера  $H$ -плоскостного рупора получим:

$$a_0 = \delta_0 \lambda \Lambda_H \approx \sqrt{3,13} \lambda L_H.$$

КНД рупора можно представить в следующем виде:

$$D = v_a \frac{4\pi}{\lambda^2} S, \quad (6)$$

где  $v_a$  – коэффициент использования поверхности (КИП) раскрыва,  $S$  – площадь раскрыва рупора. Для оптимального  $H$ -плоскостного рупора  $v_a \approx 0,63$ .

График модуля функции  $F(\delta_0, x)$ , характеризующий ДН оптимального рупора в  $H$ -плоскости, приведен на рис. 1 сплошной линией. Если длина оптимального рупора в  $H$ -плоскости значительно больше длины волны, то для оценки ширины ДН в этой плоскости по половинной мощности применима аналогичная (7) формула:

$$2\theta_{0,5}^H \approx 44,5^\circ \sqrt{\frac{\lambda}{L_H}}. \quad (7)$$

Оптимальный размер  $E$ -плоскостного секториального рупора определяется из условия максимума функции  $v(\gamma) = g(\gamma)/\gamma$ . Аналогичным образом найдем, что функции  $v(\gamma)$  имеет максимум при  $\gamma = \gamma_0 = 1,0253$ . Это позволяет получить следующий результат для оптимального размера  $E$ -плоскостного рупора:

$$b_0 = \gamma_0 \lambda \Lambda_E \approx \sqrt{2,1} \lambda L_E.$$

Для КНД можно использовать формулу (6), причем КИП для оптимального  $E$ -плоскостного

рупора имеет то же значение, что и для оптимального  $H$ -плоскостного рупора.

График модуля функции  $G(\gamma_0, x)$ , характеризующий ДН оптимального рупора в  $E$ -плоскости, приведен на рис. 2 сплошной линией. Если длина оптимального рупора в  $E$ -плоскости значительно больше длины волны, то для оценки ширины ДН в этой плоскости по половинной мощности можно использовать следующую формулу:

$$2\theta_{0,5}^E \approx 37,5^\circ \sqrt{\frac{\lambda}{L_E}}. \quad (8)$$

Для пирамидального рупора в качестве заданного параметра удобно рассматривать длину рупора  $L$ , т. е. расстояние от подводящего волновода до раскрытия рупора. Тогда выражения для оптимальных размеров рупора запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,5a_g + \sqrt{0,25a_g^2 + 3,13\lambda L}, \\ b_0 &= 0,5b_g + \sqrt{0,25b_g^2 + 2,1\lambda L}, \end{aligned}$$

где  $a_g, b_g$  – размеры подводящего волновода.

КНД оптимального пирамидального рупора также определяется формулой (6), где КИП  $v_a \approx 0,49$ . ДН рупора характеризуется сплошными линиями на рис. 1, 2. Если длины оптимального рупора в  $E$ - и  $H$ -плоскостях значительно больше длины волны, то для оценки ширины ДН по половинной мощности можно использовать формулы (7) и (8).

### Коэффициент использования поверхности

Для оценки КНД  $H$ -плоскостного рупора можно использовать формулу (6), выбирая соответствующее значение КИП. Если аппроксимиро-

$$E = \frac{E_0}{i\lambda z} e^{ikz} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda z} \left[ (x-x')^2 + (y-y')^2 \right]\right\} w(x', y') dx' dy'. \quad (10)$$

Выражение (10) применимо как в ближней зоне, так и в дальней зоне, где оно совпадает с приведенным выше результатом (1). Действительно, в дальней зоне, т. е. при  $z \gg L$ , где  $L = \pi(a^2 + b^2)/4\lambda$  – дифракционная длина, выполняется условие:  $\exp\left[i\pi(x'^2 + y'^2)/\lambda z\right] \approx 1$ , поскольку показатель степени имеет малое значение. Тогда интеграл (10) упрощается и выражение для поля можно записать в следующем виде:

$$E = \frac{E_0}{i\lambda z} \exp\left\{ik\left[z + \frac{1}{2z}(x^2 + y^2)\right]\right\} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} w(x', y') \exp\left[-i\frac{k}{z}(xx' + yy')\right] dx' dy'. \quad (11)$$

В параксиальной области выражения (1) и (11) совпадают, т. к. в этой области

$$R \approx z + \frac{1}{2z}(x^2 + y^2), \quad \cos \theta \approx 1, \quad \sin \theta \cos \varphi \approx \frac{x}{z}, \quad \sin \theta \sin \varphi \approx \frac{y}{z}.$$

вать функцию  $u(\delta)$  в области максимума квадратичной зависимостью, то для КИП получим:

$$v_a \approx 0,63 \frac{a_0}{a} (2,44\delta - 0,98\delta^2 - 0,52). \quad (9)$$

Как следует из сравнения графиков функции  $u(\gamma)$  и ее аппроксимации, приближенная формула (9) применима при  $0,8\lambda L_H \leq a^2 \leq 6\lambda L_H$ .

Аппроксимация функции  $v(\gamma)$  в области максимума квадратичной зависимостью позволяет получить аналогичную (9) формулу для КИП  $E$ -плоскостного рупора:

$$v_a \approx 0,63 \frac{b_0}{b} (3,59\gamma - 1,78\gamma^2 - 0,81).$$

Это выражение можно использовать при  $0,8\lambda L_E \leq b^2 \leq 5\lambda L_E$ .

Приближенная формула для КИП пирамидального рупора в области максимума имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_a &\approx 0,49 \frac{a_0 b_0}{ab} (3,59\gamma - 1,78\gamma^2 - 0,81) \times \\ &\times (2,44\delta - 0,98\delta^2 - 0,52). \end{aligned}$$

Эта формула применима при указанных выше диапазонах изменения размеров рупора.

### Ближняя зона

Аналитические результаты для поля рупора в параксиальной области можно получить, используя приближенное решение уравнения Гельмгольца для прохождения волны через прямоугольное отверстие в плоском непрозрачном экране [7]:

После вычисления интеграла (10) для плотности потока энергии, создаваемого рупорной антенной в параксиальной области, найдем следующее выражение:

$$I = \frac{P}{8ab} |W|^2,$$

где  $P$  – излучаемая мощность,

$$W = \kappa [U(\mu + \nu) + U(\mu - \nu)] \{ e^{i\nu} [U(\rho + \sigma) + U(\rho - \sigma)] + e^{-i\nu} [U(\rho + \tau) + U(\rho - \tau)] \}. \quad (12)$$

Фигурирующие в выражении (12) величины зависят от типа рупорной антенны. Для  $E$ -плоскостного секториального рупора

$$\kappa = \frac{1}{\zeta_E}, \quad \mu = \varepsilon \zeta_E, \quad \nu = \frac{\eta}{\zeta_E}, \quad \rho = \chi, \quad \sigma = \frac{1}{2\chi} - \xi,$$

$$\tau = \xi + \frac{1}{2\chi}, \quad \psi = 2\frac{x}{a}.$$

Для  $H$ -плоскостного секториального рупора

$$\kappa = \frac{1}{\zeta_H}, \quad \mu = \varepsilon, \quad \nu = \eta, \quad \rho = \chi \zeta_H,$$

$$\sigma = \frac{1}{\zeta_H} \left( \frac{1}{2\chi} - \xi \right), \quad \tau = \frac{1}{\zeta_H} \left( \xi + \frac{1}{2\chi} \right), \quad \psi = \frac{2x}{a\zeta_H^2}.$$

Для пирамидального рупора

$$\kappa = \frac{1}{\zeta_E \zeta_H}, \quad \mu = \varepsilon \zeta_E, \quad \nu = \frac{\eta}{\zeta_E}, \quad \rho = \chi \zeta_H,$$

$$\sigma = \frac{1}{\zeta_H} \left( \frac{1}{2\chi} - \xi \right), \quad \tau = \frac{1}{\zeta_H} \left( \xi + \frac{1}{2\chi} \right), \quad \psi = \frac{2x}{a\zeta_H^2}.$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$\chi = \frac{a}{s}, \quad \varepsilon = \frac{b}{s}, \quad \xi = 2\frac{x}{s}, \quad \eta = 2\frac{y}{s},$$

$$s = \sqrt{2\lambda z}, \quad \zeta_E = \sqrt{1 + \frac{z}{L_E}}, \quad \zeta_H = \sqrt{1 + \frac{z}{L_H}}.$$

### Заключение

Полученные результаты упрощают оценку характеристик рупорной антенны, поскольку для использования предлагаемых расчетных формул достаточно существующих инженерных пакетов компьютерной математики. Что касается выражений для коэффициента направленного действия, содержащих интегралы Френеля, то здесь следует отметить следующее. В пособии [3] имеются опечатки – в формуле для коэффициента направленного действия как  $H$ -плоскостного секториального рупора, так и пирамидального рупора функция  $g(\delta)$  вместо суммы интегралов Френеля содержит

их разность. Аналогичная неточность имеется и в книге [2] – хотя там стоит сумма интегралов Френеля, но фигурирующий в них аргумент равен  $-\beta$ , что ввиду нечетности функций  $C(x)$ ,  $S(x)$  эквивалентно разности интегралов Френеля.

Как следует из анализа влияния размеров рупора на диаграмму направленности антенны, наименьшую ширину диаграммы направленности имеет оптимальная антенна. Если длины рупоров в  $E$ - и  $H$ -плоскостях значительно больше длины волны, то ширину диаграммы направленности оптимальной антенны можно оценить по формулам (7) и (8).

Сравнение точного выражения для поля электромагнитного импульса на оси однородно возбужденной круглой антенны радиуса  $r_0$  [8] с оценкой поля импульса на основе (10) [9] показывает, что приближенное решение (10) можно использовать при  $r_0^2/z^2 \ll 1$ . Полагая для практических расчетов  $r_0^2/z^2 \leq 0,1$ , получим условие применимости (10):  $z \geq 3,2r_0$ . Это означает, что полученное выражение (12) для плотности потока энергии в ближней зоне рупорной антенны можно использовать при  $z \geq z_c$ , где  $z_c = 1,6\sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $a$ ,  $b$  – размеры рупора.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенберг Г. З. Антенны ультракоротких волн. – М.: Связьиздат, 1957.
2. Жук М. С., Молочков Ю. Б. Проектирование антенно-фидерных устройств. – М.-Л.: Энергия, 1966.
3. Корбанский И. Н. Антенны. – М.: Энергия, 1973.
4. Драбкин А. Л., Зуенко В. Л., Кислов А. Г. Антенно-фидерные устройства. – М.: Сов. радио, 1974.
5. Кочержевский Г. Н. Антенно-фидерные устройства. – М.: Радио и связь, 1981.
6. Справочник по специальным функциям, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979 [*Handbook of mathematical functions*, ed. by M. Abramovitz and I.A. Stegun. (National Bureau of Standards, USA, 1964)].
7. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. – М.: Наука, 1990.
8. Кирьяшкин В. В., Чубинский Н. П. // Радиотехника и электроника. 2002. Т. 47. С. 24.
9. Наумов Н. Д. // Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 1. С. 19.

## Optimized method of calculation of the horn antenna

*N. D. Naumov*

12-th Central Research Institute  
Sergiev Posad-7, Moscow Region, 141300, Russia  
E-mail: ndnaumov@mail.ru

*Received September 18, 2017*

***Consideration is given to an approximation of the horn antenna directive gain and the directivity diagrams for the horn antenna by the set of trigonometric and rational function. The half-power width of the directivity diagram for optimal horn antenna is calculated. Approximate expression for the coefficient of the surface occupation in the form of quadratic dependence is obtained. Analytical expression for the flux density of electromagnetic energy created by the horn antenna in paraxial region of near zone is obtained. This result is applicable if the distance from the aperture is greater than  $1.6\sqrt{a^2 + b^2}$ , where  $a, b$  are the horn antenna sizes.***

***Keywords:*** horn antenna, antenna directive gain, directivity diagram, near region.

### REFERENCES

1. G. Z. Aizenberg, *Ultra-short Waves Antennas* (Svyaz'izdat, Moscow, 1957) [in Russian].
2. M. S. Zhuk and Yu. B. Molochkov, *Projection of the Antenna and Feeder Devices* (Energiya, Moscow-Leningrad, 1966) [in Russian].
3. I. N. Korbansky, *Antennas* (Energiya, Moscow, 1973) [in Russian].
4. A. L. Drabkin, V. L. Zuzenko, and A. G. Kislov, *Antenna and Feeder Devices* (Sovetskoe Radio, Moscow, 1974) [in Russian].
5. G. N. Kocherzhevsky, *Antenna and Feeder Devices* (Radio i Svyaz, Moscow, 1981) [in Russian].
6. *Handbook of mathematical functions*. Ed. by M. Abramovitz and I.A. Stegun (National Bureau of Standards, USA, 1964).
7. M. B. Vinogradova, O. V. Rudenko, and A. P. Sukhorukov, *Theory of Waves* (Nauka, Moscow, 1990) [in Russian].
8. V. V. Kiriyaashkin and N. P. Chubinsky, *Journal of Communications Technology and Electronics* **47**, 24 (2002).
9. N. D. Naumov, *Usp. Prikl. Fiz.* **4** (1), 19 (2016).