

Динамика неизотермической плазмы, вращающейся вблизи твердых диэлектрических поверхностей*Д. А. Долголенко, Г. Е. Зотин, Е. П. Потанин*

Рассматривается стационарное движение плазмы вблизи вращающегося с угловой скоростью ω_0 протяженного диэлектрического диска при наличии внешнего потока с угловой скоростью $\omega_1 \neq \omega_0$ в условиях действия внешнего однородного осевого магнитного поля и осевого градиента температуры. Анализ задачи выполнен в газодинамическом приближении с учетом центробежных сил и осевого перераспределения плотности. Рассчитаны профили радиальной компоненты скорости проводящего газа вблизи диэлектрической поверхности диска для различных параметров среды.

Ключевые слова: вращающаяся плазма, диэлектрический диск, градиент температуры, осевое магнитное поле, профиль радиальной скорости.

DOI: 10.51368/2307-4469-2022-10-3-256-263

Введение

В последние годы заметно возрос интерес к изучению вращения проводящих сред [1–11].

Этот интерес связан с астрофизическими приложениями [1–4], разработкой термоядерных реакторов [5, 6], преобразованием тепловой энергии в хаотическую [7], возможностью использования вращающейся плазмы для разделения стабильных изотопов [8], а также с проблемой переработки отработавшего ядерного топлива в плазме [9–11].

Важной задачей при рассмотрении плазменнодинамических явлений во вращающихся потоках является учет градиентов температу-

ры, неизбежно возникающих при охлаждении поверхностей устройств и в первую очередь осевой неоднородности температуры в торцевых слоях.

При изучении отмеченных выше явлений возникает проблема расчета гидродинамических и тепловых пограничных слоев проводящего газа вблизи вращающегося в неподвижной среде диска или в условиях вращения газа над неподвижной торцевой диэлектрической поверхностью. Первым шагом на пути теоретического изучения вторичных циркуляционных течений во вращательных потоках в условиях неоднородности температуры является рассмотрение МГД-пограничного слоя на бесконечно протяженном диске. Получение аналитических решений, позволяющих исследовать особенности данного явления и проследить «логику» процессов возбуждения циркуляции, представляется весьма важным для практики.

Постановка задачи

Рассмотрим в общем виде задачу о стационарном вращении плазмы вблизи вращающегося с угловой скоростью ω_0 протяженного

Долголенко Дмитрий Анатольевич¹, н.с.

Зотин Георгий Евгеньевич¹, н.с.

Потанин Евгений Петрович^{1,2}, нач. отдела.

E-mail: potanin45@yandex.ru

¹ Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт».

Россия, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, 1.

² Всероссийский институт научной и технической информации РАН.

Россия, 125219, Москва, ул. Усиевича, 20.

Статья поступила в редакцию 25 апреля 2022 г.

© Долголенко Д. А., Зотин Г. Е., Потанин Е. П., 2022

диэлектрического диска при наличии внешнего потока, вращающегося с угловой скоростью $\omega_1 \neq \omega_0$ в однородном осевом магнитном поле с индукцией \mathbf{B} в условиях, когда температура диска T_0 отличается от температуры потока T_1 (рис. 1).

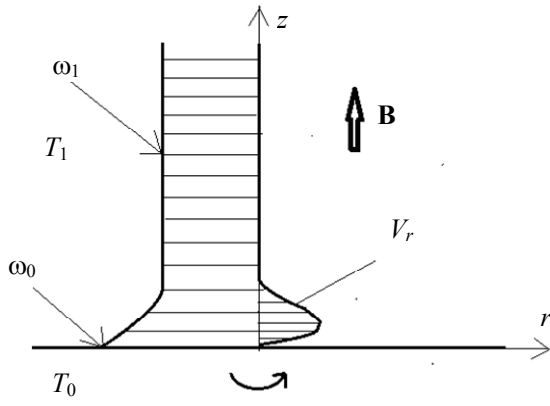


Рис. 1. Этюры угловой ω и радиальной V_r скоростей плазмы в осевом магнитном поле \mathbf{B}

В рамках магнитогидродинамического приближения без учета влияния индуцированных магнитных полей уравнения движения и энергии слабоионизованной плазменной среды в стационарном случае принимают вид [12, 13]

$$(\mathbf{V}\nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} (\nabla \times \hat{\tau}) + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\nabla \rho \mathbf{V} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \mathbf{j} = 0, \quad (3)$$

$$\rho c_p (\mathbf{V}\nabla) T = \nabla (\kappa \nabla T), \quad (4)$$

где \mathbf{V} – гидродинамическая скорость плазмы; $\hat{\tau}$ – тензор вязких напряжений; ρ – плотность; p – давление; T – абсолютная температура; c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении; \mathbf{j} – плотность электрического тока; $\nu = \eta/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости среды; η – коэффициент динамической вязкости; κ – коэффициент теплопроводности; ∇ – векторный оператор набла. В уравнении (4) будем пренебрегать вязкой и джоулевой диссипацией [14].

Для вектора плотности электрического тока \mathbf{j} используем закон Ома в пренебрежении холловскими явлениями

$$\mathbf{j} = \sigma[\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}], \quad (5)$$

где \mathbf{E} – вектор электрического поля; \mathbf{B} – вектор магнитной индукции; σ – проводимость плазмы. В законе Ома в проекции на ось ϕ учтем, что $E_\phi = 0$

$$j_r = \sigma(E_r + v_\phi B_z), \quad j_\phi = -\sigma v_r B_z. \quad (6)$$

Предполагая, что внешняя цепь во внешнем потоке разомкнута, из условия отсутствия радиального тока ($j_r(\infty) = 0$) получим выражение для радиального электрического поля вдали от диска

$$E_r^\infty = -\omega_1 r B_z, \quad (7)$$

которое совпадает с полем в пограничном слое.

К уравнениям (1)–(5) следует добавить уравнение состояния проводящего газа, который будем считать совершенным

$$p = \rho \mathcal{R} T / \mu \quad (8)$$

где μ – молярная масса газа; \mathcal{R} – универсальная газовая постоянная.

В проекциях на координатные оси r и ϕ в приближении пограничного слоя уравнение (1) с учетом (6), (7), а также уравнение неразрывности запишем в виде

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) - \frac{\sigma B^2 v_r}{\rho}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r} = \\ = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) - \frac{\sigma B^2}{\rho} (v_\phi - \omega_1 r), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho r v_z) = 0, \quad (11)$$

где v_r , v_ϕ и v_z – радиальная, азимутальная и осевая компоненты скорости проводящего газа. Система (9)–(11) не содержит уравнения движения в проекции на ось z , так как последнее служит лишь для определения слабой за-

висимости давления от осевой координаты в пограничном слое [8].

Рассмотрим случай, когда температура диска поддерживается постоянной вдоль радиуса. В этих условиях уравнение энергии упрощается

$$\rho c_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (12)$$

Систему (9)–(12) будем решать при следующих граничных условиях

$$z=0 \quad v_r=0, \quad v_\phi = \omega_0 r, \quad v_z=0, \quad T=T_0, \quad (13)$$

$$z \rightarrow \infty \quad v_r \rightarrow 0, \quad v_\phi \rightarrow \omega_1 r, \quad T \rightarrow T_1. \quad (14)$$

Введем преобразование Дородницына [15]

$$Z_0 = \int_0^z \left(\frac{\rho(z)}{\rho_1} \right) dz, \quad (15)$$

$$w_1 = v_z \rho / \rho_1. \quad (16)$$

В случае бесконечного диска справедливы автомодельные преобразования

$$\begin{aligned} v_r &= r \omega_0 f(Z_0), \quad v_\phi = r \omega_0 g(Z_0), \\ T &= T_0 + (T_1 - T_0) \theta(Z_0), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{dp}{dr} = \rho_1 \omega_1^2 r, \quad (18)$$

где ρ_1 – плотность во внешнем потоке.

Учтем зависимость динамической вязкости, теплопроводности и проводимости от температуры в виде $\eta = \eta_1 T / T_1$, $\kappa = \kappa_1 T / T_1$, $\sigma = \sigma_1 (T_1 / T)$ [16, 17]. Здесь η_1 , κ_1 and σ_1 – коэффициенты переносы вдали от диска.

Аналитическое решение

Для достаточно сильного магнитного поля ($\sigma B^2 / \rho \omega > 1$) в уравнениях движения можно пренебречь нелинейными инерционными членами, зависящими от радиальной скорости среды. При этом, однако, в уравнении (9) сохраним центробежный член.

При достаточно высокой теплопроводности плазмы толщина теплового пограничного слоя существенно превышает толщину гидродинамического. Поэтому неизвестная преобразованная осевая скорость внутри теплового пограничного слоя изменяется незначительно и равна скорости во внешнем потоке $w_1(\infty)$. Вводя величину $v_1 = \eta_1 / \rho_1$, безразмерную переменную $Z = Z_0 \sqrt{\omega_1 / v_1}$, и постоянную $W_0 = w_1(\infty) / \sqrt{v_1 \omega_1}$, получим

$$-g^2 + \frac{m^2}{n} [1 + (n-1)\theta] = f'' - Sf, \quad (19)$$

$$g'' - Sg = -mS, \quad (20)$$

$$2f + W_0' = 0, \quad (21)$$

$$\theta'' - W_0 \text{Pr} \theta' = 0, \quad (22)$$

где $m = \omega_1 / \omega_0$, $n = T_1 / T_0$, $S = \sigma_1 B / \rho_1 \omega_1$, $\chi_1 = \kappa_1 / \rho_1 c_p$, $\text{Pr} = v_1 / \chi_1$ – число Прандтля во внешнем потоке, а штрих означает дифференцирование по переменной Z . В случае $n \neq 1$ будем искать решение, при котором осевая скорость направлена к диску. Введем положительную величину $W = -W_0$.

Предположение о толщине теплового пограничного слоя соответствует малым значениям числа Прандтля. В этом случае решение системы (19)–(22) принимает вид

$$\theta(Z) = 1 - \exp(-W \text{Pr} Z), \quad (23)$$

$$g(Z) = m + (1-m) \exp(-\sqrt{S} Z). \quad (24)$$

Функция $f(Z)$ определяется из дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} f'' - Sf &= m^2 \left[\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) (1 - \exp(-W \text{Pr} Z)) \right] - \\ &- \left[m + (1-m) \exp(-\sqrt{S} Z) \right]^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Его решение при граничных условиях $f(0) = 0$, $f(\infty) = 0$ можно представить в виде

$$f(z) = \left(\frac{(1-m)^2}{3S} + \frac{m^2(n-1)}{n(W^2 \text{Pr}^2 - S)} + \frac{m(1-m)Z}{\sqrt{S}} \right) \left[\exp(-\sqrt{S}Z) \right] - \frac{(1-m)^2}{3S} \exp(-2\sqrt{S}Z) + \frac{m^2(n-1)}{(W^2 \text{Pr}^2 - S)n} \left[\exp(-\text{Pr}WZ) \right]. \quad (26)$$

Величина $W = 2 \int_0^\infty f(Z) dZ$ определяется из уравнения

$$W^3 + aW^2 + bW + c = 0, \quad (27)$$

где $a = \sqrt{S} / \text{Pr} + (m-1) \frac{(1+5m)}{3S\sqrt{S}}$,
 $b = (m-1) \frac{(1+5m)}{3S\text{Pr}}$, $c = 2(1-n)m^2 / n \text{Pr}^2 \sqrt{S}$.

Результаты расчета

Отметим, что гидродинамические характеристики течения зависят от нескольких параметров. Это усложняет понимание процессов возбуждения вторичного потока.

В проводящем газе при наличии однородного осевого магнитного поля возбуждаются электромагнитные силы, связанные с взаимодействием азимутального и радиального электрических токов с поперечным магнитным полем. Это взаимодействие определяется параметром S . Параметр $m = \omega_1/\omega_0$ характеризует отношение угловых скоростей внешнего потока и диска. Известно, что при равенстве температур диска и среды ($n = 1$) направление радиального потока, вызванного отсутствием равновесия между центробежной силой и радиальным градиентом давления, зависит от знака величины $q = m - 1$, [18]. При $q < 1$ поток направлен к периферии, а при $q > 1$ к оси. Эта ситуация иллюстрируется на рис. 2, на котором приведены результаты расчета радиального потока в пограничном слое в случае $n = 1$ и двух значений параметра m : $m = 0,3$ и $m = 2$.

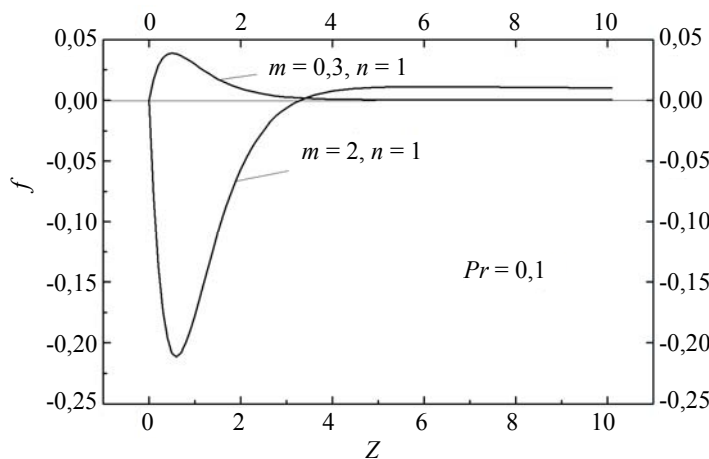


Рис. 2. Профиль радиальной компоненты скорости проводящего газа для различных величин параметра m при $\text{Pr} = 0,1, S = 3$ и $n = 1$

Включение осевого градиента температуры приводит к дополнительным термоцентробежным силам, которые зависят от параметра n . Особенности действия этих сил определяются осевым перераспределением плотности, центробежной силой и параметром Прандтля Pr , регулирующим соотношение между гидродинамикой и теплообменом. Физически, термоцентробежные силы связаны с охлаждением проводящего газа вблизи поверхности торца и

пропорциональностью центробежной силы плотности газа. В результате охлаждения газа имеет место увеличение его плотности, что приводит к возрастанию центробежной силы. Нарушение равновесия радиального градиента давления и центробежной силы способствует увеличению радиального потока к периферии. На рис. 3 показаны скорости радиального потока при $m = 2$ и различных значениях n . Если при $n = 1$ (термоцентробежные силы отсут-

ствуют) радиальный поток определяется преобладающим радиальным градиентом давления и направлен к оси, то при $n = 1,5$ течение направлено в противоположную сторону.

На рис. 4 представлены результаты расчета профиля радиальной компоненты скорости плазмы в зависимости от магнитного параметра S при $m = 2$, $n = 1,5$ и $Pr = 0,1$. Как следует из результатов расчета, увеличение параметра S приводит к торможению ради-

ального течения. Последнее есть следствие движения проводящей среды поперек магнитного поля.

На рис. 5 показаны результаты расчета вторичного потока в зависимости от числа Прандтля Pr при $m = 2$, $S = 3$ и $n = 1,5$. Увеличение скорости радиального течения с уменьшением числа Pr связано с пространственным расширением области действия термоцентральных сил.

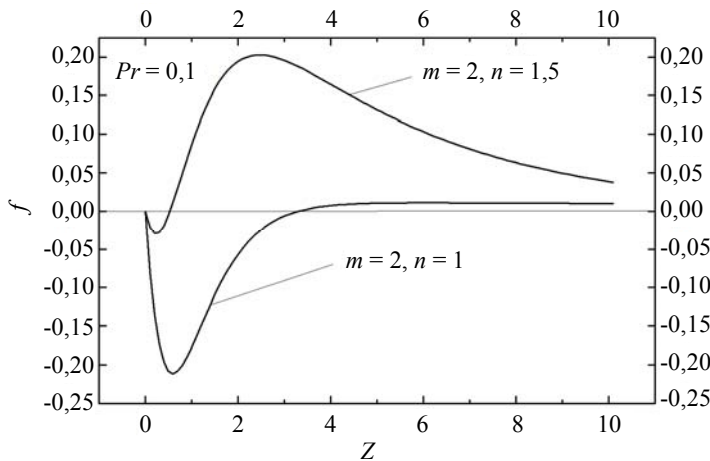


Рис. 3. Профиль радиальной компоненты скорости проводящего газа для различных величин параметра n при $Pr = 0,1$, $S = 3$ и $m = 2$

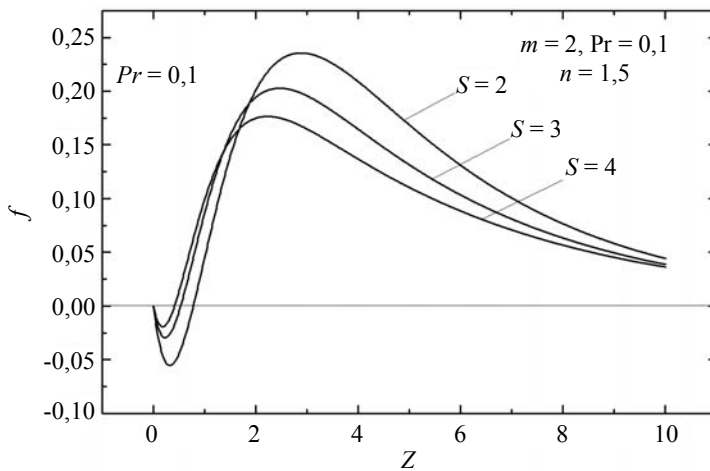


Рис. 4. Профиль радиальной компоненты скорости проводящего газа для различных величин параметра S при $Pr = 0,1$, $m = 2$ и $n = 1,5$

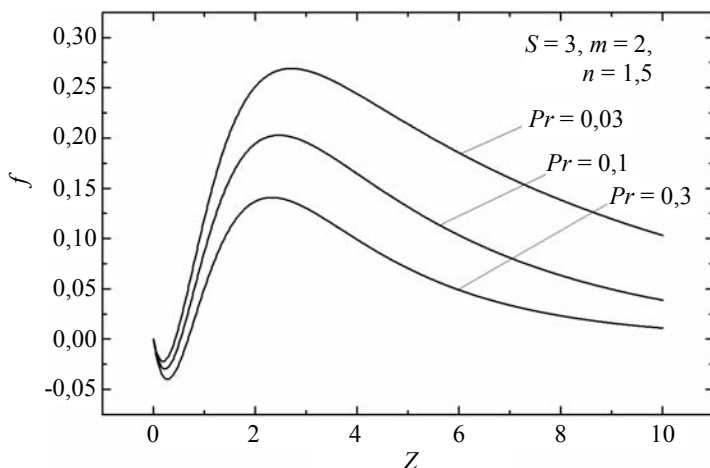


Рис. 5. Профиль радиальной компоненты скорости проводящего газа для различных величин параметра Pr при $S = 3$, $m = 2$ и $n = 1,5$

На рисунках 6 и 7 приведены результаты расчета влияния параметра m на интенсивность радиального потока при $S = 3$, $Pr = 0,1$ и различных значениях n . При постоянстве числа n , как видно из результатов расчета,

увеличение m способствует возрастанию скорости радиального течения, поскольку увеличивается роль радиального градиента давления. Это влияние уменьшается с ростом параметра n .

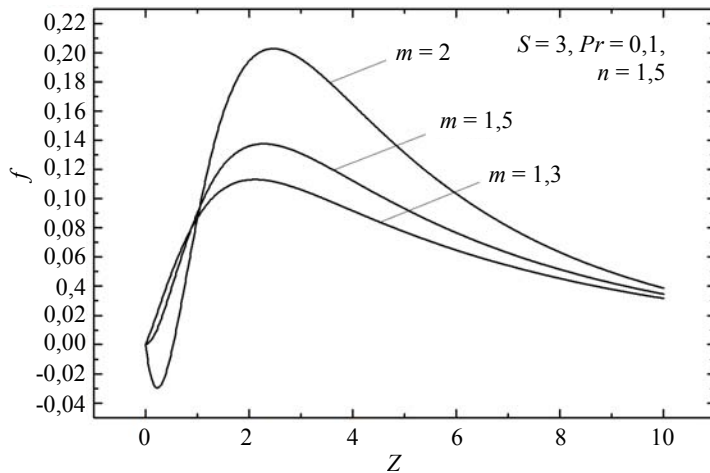


Рис. 6. Профиль радиальной компоненты скорости проводящего газа для различных величин параметра m при $S = 3$, $Pr = 0,1$ и $n = 1,5$

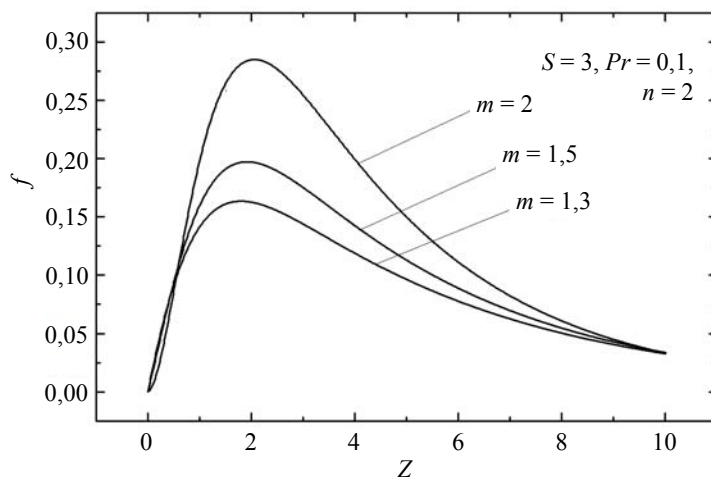


Рис. 7. Профиль радиальной компоненты скорости проводящего газа для различных величин параметра m при $S = 3$, $Pr = 0,1$ и $n = 2$

Заключение

В рамках МГД приближения исследованы течения вязкой несжимаемой электропроводящей среды вблизи бесконечного диэлектрического диска во вращающемся потоке. В отличие от работы [19], в которой рассматривается случай сильных отсосов, в настоящей работе линеаризация уравнения энергии выполнена на основе представлений о малости толщины гидродинамического пограничного слоя по сравнению с толщиной теплового слоя. В этом случае зона гидродинамического пограничного слоя характеризуется постоянством осевого потока. Показано, что при про-

чих равных условиях магнитное поле замедляет радиальное течение. Исследовано поведение вторичного потока в зависимости от параметра Прандтля Pr . Уменьшение числа Pr при охлаждении диска ($n > 1$) приводит к увеличению центробежного отбрасывания плазмы на периферию. Кроме того показано, что к такому же результату приводит увеличение угловой скорости внешнего потока ω_1 по сравнению со скоростью вращения диска ω_0 . Как следует из полученных результатов, с помощью осевого градиента температуры можно регулировать интенсивность циркуляции в устройствах, подобных плазменным центрифугам [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Balbus S. A., Hawley J. F. // Rev. of Mod. Phys. 1998. Vol. 70. № 1. P. 1.
2. Михайловский А. Б., Ломинадзе Дж. Г., Чуриков А. П., Пустовитов В. Д. // Физика плазмы. 2009. Т. 35. № 4. С. 307.
3. Khalzov I. V., Smolyakov A. I., Ilgisonis V. I. // Physics of Plasmas. 2008. Vol. 15. P. 054501.
4. Pustovitov V. D. // Plasma Physics Reports. 2003. Vol. 29. P. 105.
5. Гориунов Н. М., Потанин Е. П. // Успехи прикладной физики. 2014. Т. 2. № 1. С. 18.
6. Лахин В. П., Сорокина Е. А., Ильгисонис В. И., Коновальцева Л. В. // Физика плазмы. 2015. Т. 41. № 12. С. 1054.
7. Тимофеев А. В. // Физика плазмы. 2020. Т. 46. № 6. С. 564.
8. Whichello J. V., Borisevich V. D., Potanin E. P. // J. Appl. Phys. 2021. Vol. 130. P. 045106.
9. Gorshunov N. M., Potanin E. P. // Plasma Physics Reports. 2020. Vol. 46. № 2. P. 147.
10. Vorona N. A., Gavrikov A. V., Kuzmichev S. D. et al. // IEEE Transactions on Plasma Science. 2019. Vol. 47. № 2. P. 1223.
11. Rax J.-M., Gueroult R. // J. Plasma Phys. 2016. Vol. 82. P. 595820504.
12. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. – М.: ГИФМЛ, 1962.
13. Саттон Дж., Шерман А. Основы технической магнитной гидродинамики / Пер. с англ. / Под ред. Е. И. Янговского. – М.: Мир, 1968.
14. Борисевич В. Д., Потанин Е. П. // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 6. С. 1460.
15. Дородницын А. А. // ПММ. 1942. Т. 6. Вып. 6. С. 449.
16. Шидловский В. П. // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 1. С. 161.
17. Chandrasekhar A., Nath G. // Acta Technica CSAV. 1989. Vol. 1. P. 58.
18. Борисевич В. Д., Потанин Е. П. // ПММ. 2021. Т. 85. Вып. 6. С. 758.
19. Borisevich V. D., Potanin E. P., Whichello J. V. // J. Fluid Mech. 2017. Vol. 829. P. 328.

PACS: 47.20.Qr, 52.30.Cv

Dynamics of nonisothermal plasma rotating near solid dielectric surfaces*D. A. Dolgolenko¹, G. E. Zotin¹, and E. P. Potanin^{1,2}*

¹National Research Center «Kurchatov Institute», Center of Fundamental Research
1 Academician Kurchatov Square, Moscow, 123182, Russia
E-mail: potanin45@yandex.ru

²All-Russia Institute of Scientific and Technical Information, Russian Academy of Sciences
20 Usievich st., Moscow, 125219, Russia

Received April 25, 2022

We consider stationary motion of a plasma near an extended dielectric disk rotating with an angular velocity ω_0 in the presence of an external flow with an angular velocity $\omega_0 \neq \omega_1$ under the action of an external uniform axial magnetic field and an axial temperature gradient. The problem is analyzed in the gas-dynamic approximation, taking into account centrifugal forces and axial density redistribution. The profiles of the radial component of the velocity of the conducting gas near the dielectric surface of the disk are calculated for various parameters of the medium.

Keywords: rotating plasma, dielectric disk, temperature gradient, axial magnetic field, radial velocity profile.

DOI: 10.51368/2307-4469-2022-10-3-256-263

REFERENCES

1. S. A. Balbus and J. F. Hawley, *Rev. of Mod. Phys.* **70** (1), 1 (1998).
2. A. B. Mikhailovskii, J. G. Lominadze, A. P. Churikove, and V. D. Pustovitov, *Plasma Physics Reports* **35** (4), 307 (2009).
3. I. V. Khalzov, A. I. Smolyakov, and V. I. Ilgisonis, *Physics of Plasmas* **15**, 054501 (2008).
4. V. D. Pustovitov, *Plasma Physics Reports* **29**, 105 (2003).
5. N. M. Gorshunov and E. P. Potanin, *Usp. Prikl. Fiz.* **2** (1), 18 (2014).
6. V. P. Lakhin, E. A. Sorokina, V. I. Ilgisonis, and L. V. Konovaltseva, *Plasma Physics Reports* **41** (12), 1054 (2015).
7. A. V. Timofeev, *Plasma Physics Reports* **46** (6), 564 (2020).
8. J. V. Whichello, V. D. Borisevich, and E. P. Potanin, *J. Appl. Phys.* **130**, 045106 (2021).
9. N. M. Gorshunov and E. P. Potanin, *Plasma Physics Reports* **46** (2), 147 (2020).
10. N. A. Vorona, A. V. Gavrikov, S. D. Kuzmichev et al., *IEEE Transactions on Plasma Science* **47** (2), 1223 (2019).
11. J.-M. Rax and R. J. Gueroult, *Plasma Phys.* **82**, 595820504 (2016).
12. A. G. Kulikovskii and G. A. Lyubimov, *Magnetic hydrodynamics* (GIFML, Moscow, 1962) [in Russian].
13. G. W. Sutton and A. Sherman, *Engineering Magnetohydrodynamics* (Dover Publications, January 1, 2001).
14. V. D. Borisevich and E. P. Potanin, *Journal of engineering and thermophysics* **88** (6), 1460 (2015).
15. A. A. Dorodnichin, *PMM* **6** (6), 449 (1942).
16. V. P. Shidlovskii, *PMM* **24** (1), 161 (1960).
17. A. Chandrasekhar and G. Nath, *Acta Technica CSAV* **1**, 58 (1989).
18. V. D. Borisevich and E. P. Potanin, *PMM* **85** (6), 758 (2021).
19. V. D. Borisevich, E. P. Potanin, and J. V. Whichello, *J. Fluid Mech.* **829**, 328 (2017).