

УДК 537.2, 536.2  
EDN: HSIBZV

PACS: 41.20.Cv, 44.10.+i



## Развитие методов решения задач электростатики и теплопроводности плоскоструктурных сред

А. Б. Петрин

*Формулируется и доказывается метод отражений для точечного заряда, расположенного рядом с плоскоструктурной средой, расположенной на диэлектрическом полупространстве. Метод обобщается на случай произвольной системы зарядов и применяется для решения математически аналогичных задач электростатики и стационарной теплопроводности плоскоструктурных сред. Рассматривается приложение метода к задачам нахождения распределений электростатического потенциала в окрестности вытянутого металлического эллипсоида и металлического тела вращения сложной формы, расположенных вблизи плоскоструктурной структуры, состоящей из одной диэлектрической пленки, расположенной на диэлектрическом полупространстве. Показывается, как применить результаты, полученные для электростатических задач, к аналогичным задачам нахождения распределения температур равномерно нагретых тел той же геометрии, расположенных вблизи теплопроводящей плоскоструктурной структуры, расположенной на теплопроводящем полупространстве.*

*Ключевые слова:* плоскоструктурная среда, метод зеркальных отражений, электростатика, теплопроводность.

DOI: 10.51368/2307-4469-2023-11-1-3-21

### Введение

Во многих современных технических приложениях возникает необходимость анализа электромагнитных полей и теплообмена в плоскоструктурных структурах. Возникает множество прикладных задач, касающихся нахождения распределений полей вблизи от поверхностей со сложной слоистой структурой, от источников сложной формы, находящихся на небольшом расстоянии от поверхности. Эти задачи, например, возникают при

нагреве (для инициации реакций полимеризации) тонких пленок мономеров нагретыми остриями (зондами) или при инициации реакций в тонкой пленке фоторезиста сфокусированной на вершине острия поверхностной плазмонной волной. Особенно интересно нахождение полей в таких задачах в случаях, когда размеры тела, расстояние от него до поверхности и толщина плоскоструктурной структуры являются величинами одного порядка. Теоретическому рассмотрению и разработке эффективных методов решения таких задач посвящена данная статья.

В задачах электростатики, теплопроводности и электродинамики в плоскоструктурных средах используется матричный метод [1–4]. Подобные матричные методы успешно применяются в задачах излучения и распространения электромагнитных волн в плоскоструктурных средах [5]. В работах [6–8] был предложен оригинальный вариант строгой электромаг-

---

**Петрин Андрей Борисович**, доцент, к.ф.-м.н.  
E-mail: petrin@ihed.ras.ru, a\_petrin@mail.ru  
Объединенный институт высоких температур РАН.  
Россия, 125412, Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2.

Статья поступила в редакцию 6.02.2023  
После доработки 10.02.2023  
Принята к публикации 15.02.2023

© Петрин А. Б., 2023

нитной теории излучения элементарного диполя, расположенного на границе или внутри плоскостной структуры, который является развитием работ [9, 10]. В частности, в работах [6–8] был предложен метод аналитического упрощения решения, имеющий потенциально важное общетеоретическое значение. Обобщение данного метода для случая произвольного количества пленок в плоскостной структуре [11] позволило привести формулы для излучаемых полей к одномерным интегралам, что существенно упростило анализ задачи и ускорило численные расчеты.

В работах [12, 13] математические подходы работ [6–8] и [11] были применены к нахождению трехмерного фундаментального решения электростатики (квазиэлектростатики) в плоскостных средах, то есть к нахождению поля точечного заряда в плоскостных средах. На основе полученных результатов, была предложена формулировка обобщенного метода зеркальных отражений для точечного заряда, расположенного рядом с плоскостной структурой, состоящей из одной пленки на полупространстве. Этот результат в работе [12] был обобщен на случай произвольного распределения зарядов вблизи плоскостной структуры и произвольного количества пленок. На основе развитого обобщенного метода зеркальных отражений был предложен метод решения задачи нахождения электрического поля в окрестности нановершины микроострия, расположенного вблизи плоскостной структуры, а также аналогичных задач теплопроводности [14].

В данной работе, на основе предложенного в [12] метода, решены задачи нахождения распределения электростатического потенциала вблизи проводящих тел вращения сложной формы, расположенные вблизи плоскостной структуры. Результаты конкретных численных расчетов даны для плоскостной структуры из одной диэлектрической пленки, расположенной на диэлектрическом полупространстве. Решение проводится в нормированных координатах и поэтому применимо к подобным геометриям. На основе точной аналогии уравнений и граничных условий электростатических задач и задач стационарной теплопроводности обсуждаются

аналогичные задачи нахождения распределения температурных полей.

### Постановка задачи.

#### Электрическое поле точечного заряда, расположенного в плоскостной структуре

Рассмотрим задачу нахождения электростатического поля от точечного заряда  $q$ , расположенного внутри плоскостной структуры. Пусть, для общности, этот заряд расположен внутри одной из пленок плоскостной структуры, состоящей из нескольких пленок. Для определенности сначала будем считать, что заряд расположен в одной из пленок, а затем обобщим эту задачу на случай, когда заряд расположен на их границе или в одном из полупространств.

Пусть общее число пленок равно  $N_f$ , толщина  $m$ -й пленки равна  $d_m$  и полная толщина слоистой структуры равна  $d_{tot} = \sum_{m=1}^{N_f} d_m$ . Общее число границ пленок обозначим как  $N = N_f + 1$ . Пронумеруем области пространства  $j = 1, \dots, (N + 1)$  (на рис. 1 показана для примера задача с  $N = 4$  и  $N_f = 3$ ). Предположим, что пленки имеют абсолютные диэлектрические проницаемости равные  $\epsilon_j$ , а перед и за слоистой структурой находятся однородные полупространства с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_{N+1}$ . Обозначим также через  $z_j$  – координаты  $N$  границ пленок по оси  $Z$  следующим образом:  $z_1 = 0$ ,  $z_j = \sum_{m=1}^{j-1} d_m$  при  $j = 2, \dots, N$ .

Уравнения электростатики (или квазиэлектростатики) в области с номером  $j$  можно записать через электрический потенциал  $\phi_j$  в виде:

$$\Delta \phi_j = -\rho/\epsilon_j, \quad (1)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\rho$  – объемная плотность заряда;  $\epsilon_j$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость  $j$ -й области.

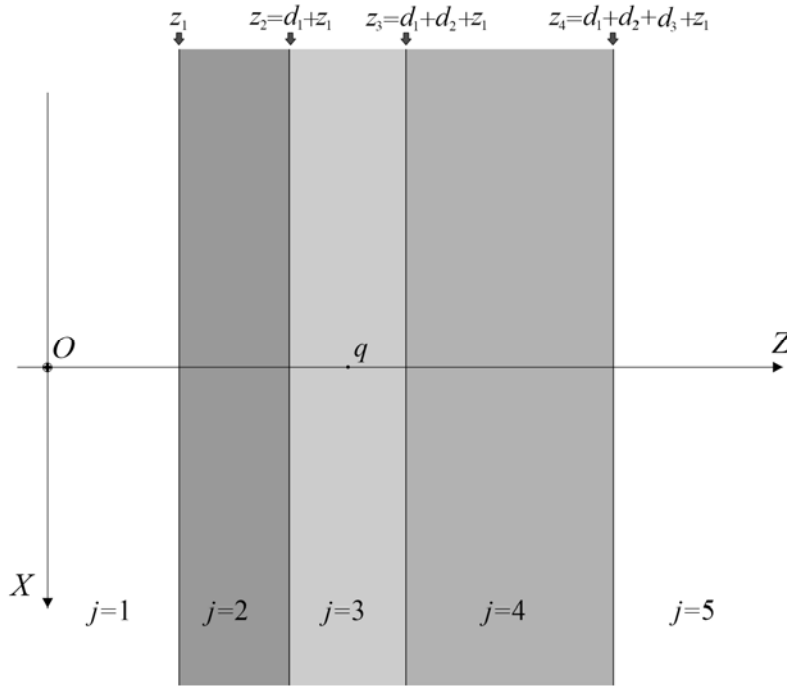


Рис. 1. Геометрия плоскостной структуры, состоящей из трех пленок

Решая уравнения Лапласа в каждой области с учетом граничных условий, найдем электрическое поле во всех областях. Рассмотрим сначала следующую вспомогательную задачу.

**Электрическое поле в слое, свободном от зарядов**

Пусть в области с номером  $j$  нет сторонних зарядов между границами  $z_{j-1}$  и  $z_j$ . И пусть диэлектрическая проницаемость среды в этой пленке равна  $\epsilon_j$ . Представим электрический потенциал в области в виде Фурье разложения:

$$\varphi_j(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x + i\eta y} \tilde{\varphi}_j(\xi, \eta, z) d\xi d\eta.$$

Подставим в уравнение (1) потенциал в виде Фурье-разложения, тогда в рассматриваемой области можно записать получим

$$d^2 \tilde{\varphi}_j / dz^2 - \gamma^2 \tilde{\varphi}_j = 0, \tag{2}$$

где  $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ . Уравнение (2) при фиксированных значениях  $\xi$  и  $\eta$  есть обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной  $z$ . Общее решение уравнений (2) в области  $[z_{j-1}, z_j]$  запишем в виде [12]:

$$\begin{aligned} \varphi_j(x, y, z) = & \\ = & (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_j^+ e^{-\gamma(z-z_{j-1})} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \tag{3} \\ & + (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_j^- e^{\gamma(z-z_j)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \end{aligned}$$

где  $\hat{\varphi}_j^+$  и  $\hat{\varphi}_j^-$  – функции только от  $\xi$  и  $\eta$ . Первое слагаемое (справа от знака равенства) в формуле (3) представляет собой поле от источников, находящихся слева от левой границы слоя. При этом поле будет уменьшаться при удалении вправо (при удалении от источников слева от слоя). Второе слагаемое справа в формуле (3) представляет собой поле от источников, находящихся справа от правой границы слоя (а внутри слоя источников нет по условию). Это поле будет уменьшаться при удалении влево (при удалении от источников справа от слоя).

Из (3) найдем фурье-образ электрического потенциала и нормальную компоненту индукции электрического поля границах области  $j$ :

$$\begin{aligned} \left. \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_j \\ \tilde{D}_{j,z} \end{pmatrix} \right|_{z=z_{j-1}} &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_{j-1}} \\ \gamma \epsilon_j & -\gamma \epsilon_j e^{-\gamma d_{j-1}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_j^+ \\ \hat{\varphi}_j^- \end{pmatrix}, \\ \left. \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_j \\ \tilde{D}_{j,z} \end{pmatrix} \right|_{z=z_j} &= \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_{j-1}} & 1 \\ \gamma \epsilon_j e^{-\gamma d_{j-1}} & -\gamma \epsilon_j \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_j^+ \\ \hat{\varphi}_j^- \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4}$$

где  $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$ .

Вводя вектор-столбец  $\hat{\mathcal{F}}_j = (\hat{\phi}_j^+; \hat{\phi}_j^-)^T$ , перепишем полученные выражения в виде

$$\left( \begin{array}{c} \tilde{\Phi}_j \\ \tilde{D}_{j,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_{j-1}} = \mathbf{L}_j \times \hat{\mathcal{F}}_j, \quad \left( \begin{array}{c} \tilde{\Phi}_j \\ \tilde{D}_{j,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_j} = \mathbf{R}_j \times \hat{\mathcal{F}}_j, \quad (5)$$

$$\text{где } \mathbf{L}_j = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_{j-1}} \\ \gamma \varepsilon_j & -\gamma \varepsilon_j e^{-\gamma d_{j-1}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_{j-1}} & 1 \\ \gamma \varepsilon_j e^{-\gamma d_{j-1}} & -\gamma \varepsilon_j \end{pmatrix}. \quad (6)$$

### Электрическое поле в многослойной структуре без сторонних зарядов

Рассмотрим теперь многослойную структуру, внутри которой нет сторонних зарядов. Рассмотрим границу  $z = z_j$  между областями с номерами  $j$  и  $j+1$ . Непрерывность тангенциальных компонент напряженностей электрического поля  $E_{j,x}$ ,  $E_{j+1,x}$ ,  $E_{j,y}$ ,  $E_{j+1,y}$  и нормальных компонент электрической индукции  $D_{j,z}$  и  $D_{j+1,z}$  на этой границе можно записать через соответствующие электрические потенциалы  $\phi_j$  и  $\phi_{j+1}$  в виде:

$$\phi_j \Big|_{(x,y,z_j)} = \phi_{j+1} \Big|_{(x,y,z_j)},$$

$$-\varepsilon_j \partial \phi_j / \partial z \Big|_{(x,y,z_j)} = -\varepsilon_{j+1} \partial \phi_{j+1} / \partial z \Big|_{(x,y,z_j)},$$

где электрический потенциал  $\phi_{j+1}$  в области  $j+1$  выражается формулой (3), в которой произведена замена индексов  $j \rightarrow j+1$ . Так как уравнения электростатики (квазистатики) – линейные уравнения, то граничные условия должны выполняться для каждого члена фурье-разложения, то есть граничные условия выполняются для фурье-образов соответствующих величин:

$$\tilde{\phi}_j \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} - \tilde{\phi}_{j+1} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} = 0,$$

$$\tilde{D}_{j,z} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} - \tilde{D}_{j+1,z} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} = 0. \quad (7)$$

Записывая (7) с помощью (5), получим матричное уравнение на границе  $z = z_j$

$$\mathbf{R}_j \times \hat{\mathcal{F}}_j = \mathbf{L}_{j+1} \times \hat{\mathcal{F}}_{j+1}, \quad (8)$$

где матрицы  $\mathbf{R}_j$  и  $\mathbf{L}_{j+1}$  выражаются формулами (6).

Уравнение (8) можно записать для  $j = 2, \dots, (N-1)$ , где  $(N+1)$  – общее число областей,  $N$  – число границ, то есть для всех границ, исключая первую ( $j=1$ ) и последнюю ( $j=N$ ) границы. То есть, исключая границы  $z_1$  и  $z_N = d_{tot} = \sum_{m=1}^{N-1} d_m$ , где  $d_{tot}$  – общая толщина слоистой структуры (сумма толщин пленок, составляющих рассматриваемую структуру).

Общее решение для электрического потенциала в области  $j=1$ , то есть в интервале  $(-\infty, z_1]$ , запишем в виде

$$\phi_1(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\phi}_1^+ e^{-\gamma(z-z_1)} + \hat{\phi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)}) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (9)$$

Тогда, на границе  $z = z_1$  можно записать

$$\left( \begin{array}{c} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{D}_{1,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \varepsilon_1 & -\gamma \varepsilon_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1^+ \\ \hat{\phi}_1^- \end{pmatrix}.$$

Обозначая  $\hat{\mathcal{F}}_1 = (\hat{\phi}_1^+; \hat{\phi}_1^-)^T$ , граничные условия на границе  $z = z_1$  примут вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \varepsilon_1 & -\gamma \varepsilon_1 \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{F}}_1 = \mathbf{L}_2 \times \hat{\mathcal{F}}_2. \quad (10)$$

Аналогично, общее решение для потенциала в области  $j=N+1$ , то есть в интервале  $[z_N, +\infty)$ , запишем в виде

$$\phi_{N+1}(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\phi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} + \hat{\phi}_{N+1}^- e^{\gamma(z-z_N)}) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (11)$$

Тогда, на границе  $z = z_N$

$$\left( \begin{array}{c} \tilde{\Phi}_{N+1} \\ \tilde{D}_{N+1,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \varepsilon_{N+1} & -\gamma \varepsilon_{N+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{N+1}^+ \\ \hat{\phi}_{N+1}^- \end{pmatrix},$$

и граничные условия (7) на границе  $z = z_N$  можно записать в виде

$$\mathbf{R}_N \times \hat{\mathcal{F}}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \varepsilon_{N+1} & -\gamma \varepsilon_{N+1} \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1}, \quad (12)$$

где  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1} = (\hat{\phi}_{N+1}^+; \hat{\phi}_{N+1}^-)^T$ . Уравнения (8), (10) и (12) позволяют связать вектор-столбцы  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$  в первой и последней областях задачи (то есть в полупространствах, вне плоскостистой структуры) следующим матричным уравнением

$$\hat{\mathcal{F}}_1 = \left( \mathbf{T}_1 \times \prod_{m=2}^N \mathbf{T}_m \times \mathbf{T}_{N+1} \right) \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1},$$

где  $\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \varepsilon_1 & -\gamma \varepsilon_1 \end{pmatrix}^{-1}$ ,  $\mathbf{T}_m = \mathbf{L}_m \times (\mathbf{R}_m)^{-1}$ ,

$$\mathbf{T}_{N+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \varepsilon_{N+1} & -\gamma \varepsilon_{N+1} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Легко показать, что вектор-столбцы  $\hat{\mathcal{F}}_S$  и  $\hat{\mathcal{F}}_P$  в областях с произвольными номерами  $S$  и  $P$ , где  $1 \leq S < P \leq (N+1)$  и  $S+2 \leq P$ , будут связаны формулой

$$\hat{\mathcal{F}}_S = \mathbf{R}_S^{-1} \times \left( \prod_{m=S+1}^{P-1} \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{L}_P \times \hat{\mathcal{F}}_P. \quad (14)$$

Кроме того, отметим, что вектор  $(\hat{\phi}, \hat{D}_z)^T$  на правой границе области  $S$  (на границе  $z = z_S$ ) и на левой границе области  $P$  (на границе  $z = z_{P-1}$ ) связаны соотношением

$$\left. \begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{D}_z \end{pmatrix} \right|_{z=z_S} = \left( \prod_{m=S+1}^{P-1} \mathbf{T}_m \right) \times \left. \begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{D}_z \end{pmatrix} \right|_{z=z_{P-1}}. \quad (15)$$

**Электрическое поле в многослойной структуре от точечного заряда, расположенного в одной из пленок**

Пусть точечный заряд  $q$ , расположен в точке  $(0, 0, z_q)$  в области с номером  $s$ . Пусть

этот заряд определяется распределением плотности  $\rho(x, y, z) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_q)$ , где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака. Тогда фурье-образ этого распределения определяются следующим выражением

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\xi, \eta, z) &= \\ &= q \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_q) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy = \\ &= q\delta(z - z_q). \end{aligned}$$

Пусть этот точечный заряд находится в бесконечно тонком слое  $(z_q - \Delta z/2, z_q + \Delta z/2)$ . Тогда из уравнений электростатики  $\text{rot}\mathbf{E} = 0$  и  $\text{div}\mathbf{D} = \rho$  для фурье-образов полей, в пределе при  $\Delta z \rightarrow 0$ , можно записать

$$i\eta \tilde{E}_{s,z} - \frac{\Delta \tilde{E}_{s,y}}{\Delta z} = 0; \quad \frac{\Delta \tilde{E}_{s,x}}{\Delta z} - i\xi \tilde{E}_{s,z} = 0; \quad (16)$$

$$i\xi \tilde{E}_{s,y} - i\eta \tilde{E}_{s,x} = 0.$$

$$i\xi \tilde{D}_{s,x} + i\eta \tilde{D}_{s,y} + \frac{\Delta \tilde{D}_{s,z}}{\Delta z} = q\delta(z - z_q). \quad (17)$$

Из полученных уравнений найдем приращения полей в слое

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{E}_{s,y} &= i\eta \tilde{E}_{s,z} \Delta z; \quad \Delta \tilde{E}_{s,x} = i\xi \tilde{E}_{s,z} \Delta z; \\ \Delta \tilde{D}_{s,z} &= -(i\xi \tilde{D}_{s,x} + i\eta \tilde{D}_{s,y}) \Delta z + q\delta(z - z_q) \Delta z. \end{aligned}$$

Откуда следует, что в пределе  $\Delta z \rightarrow 0$ , скачок тангенциальных компонент напряженностей электрического поля и нормальной компоненты индукции электрического поля при переходе через бесконечно тонкий слой с зарядом равен  $\Delta \tilde{E}_{s,y} \rightarrow 0$ ,  $\Delta \tilde{E}_{s,x} \rightarrow 0$ ,  $\Delta \tilde{D}_{s,z} \rightarrow q$ . В матричном виде эти уравнения можно записать через электрический потенциал в эквивалентном виде, следующим образом

$$\left. \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \right|_{z=z_q+0} - \left. \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \right|_{z=z_q-0} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Выразим теперь левую часть граничного условия (18) через вектор-столбцы  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$

полупространств, снаружи плоскостной структуры. Для этого разобьем область с номером  $s$  на две области и обозначим их индексами  $l$  и  $r$  (левая и правая). Введем вектор-столбцы  $\hat{\mathcal{F}}_l$  и  $\hat{\mathcal{F}}_r$  в этих областях. Тогда члены слева от знака равенства в (18) можно выразить как

$$\left. \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \right|_{z=z_d-0} = \mathbf{R}_l \times \hat{\mathcal{F}}_l \text{ и } \left. \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \right|_{z=z_d+0} = \mathbf{L}_r \times \hat{\mathcal{F}}_r. \quad (19)$$

Из (8) и (14) следует, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_1 &= \left( \prod_{m=1}^{s-1} \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{L}_l \times \hat{\mathcal{F}}_l, \\ \hat{\mathcal{F}}_r &= (\mathbf{R}_r)^{-1} \times \left( \prod_{m=s+1}^{N+1} \mathbf{T}_m \right) \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{где } \mathbf{L}_l = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma(z_q - z_{s-1})} \\ \gamma \varepsilon_s & -\gamma \varepsilon_s e^{-\gamma(z_q - z_{s-1})} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_r = \begin{pmatrix} e^{-\gamma(z_s - z_q)} & 1 \\ \gamma \varepsilon_s e^{-\gamma(z_s - z_q)} & -\gamma \varepsilon_s \end{pmatrix}.$$

Подставляя (20) в (19), и затем полученные выражения в (18), получаем:

$$\mathbf{H}_R \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1} = \mathbf{H}_L \times \hat{\mathcal{F}}_1 + \mathbf{V}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{V} = (0, q)^T$  – вектор-столбец, характеризующий возбуждающее воздействие на плоскостную систему точечного заряда, а матрицы  $\mathbf{H}_R$  и  $\mathbf{H}_L$  – характеризуют отклик на внешнее возбуждение слоистой структуры справа и слева от заряда и выражаются следующим образом:  $\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_R \times \left( \prod_{m=s+1}^{N+1} \mathbf{T}_m \right)$ ,

$\mathbf{H}_L = \left( \left( \prod_{m=1}^{s-1} \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{T}_L \right)^{-1}$ , где матрицы  $\mathbf{T}_m$  определены (13), а матрицы  $\mathbf{T}_L$  и  $\mathbf{T}_R$  – формулами  $\mathbf{T}_L = \mathbf{L}_l \times (\mathbf{R}_l)^{-1}$ ,  $\mathbf{T}_R = \mathbf{L}_r \times (\mathbf{R}_r)^{-1}$ .

В рассматриваемой задаче точечный заряд (источник полей) находится исключительно внутри плоскостной структуры. Поэтому в столбцах  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$  есть только компоненты, определяющие поля, убывающие при удалении от плоскостной структуры.

Чтобы получить оставшиеся, отличные от нуля, компоненты  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$  разобьем матрицы  $\mathbf{H}_R$  и  $\mathbf{H}_L$  на элементы  $H_{RA}, H_{RB}, H_{RC}, H_{RD}$  и  $H_{LA}, H_{LB}, H_{LC}, H_{LD}$ , тогда уравнение (21) примет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{N+1}^+ \\ 0 \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\Phi}_1^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (22) можно представить следующей системой из двух матричных уравнений  $H_{RA} \hat{\Phi}_{N+1}^+ = H_{LB} \hat{\Phi}_1^-$ ,  $H_{RC} \hat{\Phi}_{N+1}^+ = H_{LD} \hat{\Phi}_1^- + q$ . Полученные уравнения можно снова объединить в одно матричное  $2 \times 2$  уравнение:

$$\begin{pmatrix} -H_{LB} & H_{RA} \\ -H_{LD} & H_{RC} \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{F}}_{out} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где введен вектор-столбец  $\hat{\mathcal{F}}_{out} = (\hat{\Phi}_1^-; \hat{\Phi}_{N+1}^+)^T$ . Решая это уравнение, найдем  $\hat{\Phi}_1^-$  и  $\hat{\Phi}_{N+1}^+$ , а значит, убывающие при удалении от плоскостной структуры поля:

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1^- &= q H_{RA} / (H_{RC} H_{LB} - H_{RA} H_{LD}) \text{ и} \\ \hat{\Phi}_{N+1}^+ &= H_{LB} q / (H_{RC} H_{LB} - H_{RA} H_{LD}). \end{aligned} \quad (24)$$

Убывающее влево поле в полупространстве  $j=1$  находим по формуле

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= \\ &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (25)$$

а убывающее вправо поле в полупространстве  $j=N+1$  – по формуле

$$\begin{aligned} \varphi_{N+1}(x, y, z) &= \\ &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (26)$$

Наконец, при необходимости, зная  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$ , можно найти вектор-столбцы потенциалов в любой внутренней области  $\hat{\mathcal{F}}_j$ , так как они однозначно определяется граничными

условиями. После этого, электрические потенциал в любой из этих областей может быть найден по формуле (3). Таким образом, поля будут определены во всем пространстве.

### Точечный заряд у границы градиентной плоскостной структуры

Рассмотрим задачу нахождения электрического потенциала от точечного заряда  $q$ , расположенного в полупространстве с диэлектрической

проницаемостью  $\epsilon_f$  (см. рис. 2). Заряд находится на некотором расстоянии от пленки с произвольной зависимостью диэлектрической проницаемости  $\epsilon_p(z)$ . Можно представить такую градиентную структуру достаточно большим (но конечным) количеством пленок  $m = 1, 2, \dots, N_p$  с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_{p,m}$  и толщинами  $h_m$ , нанесенных на полупространство с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_d$  (см. рис. 2).

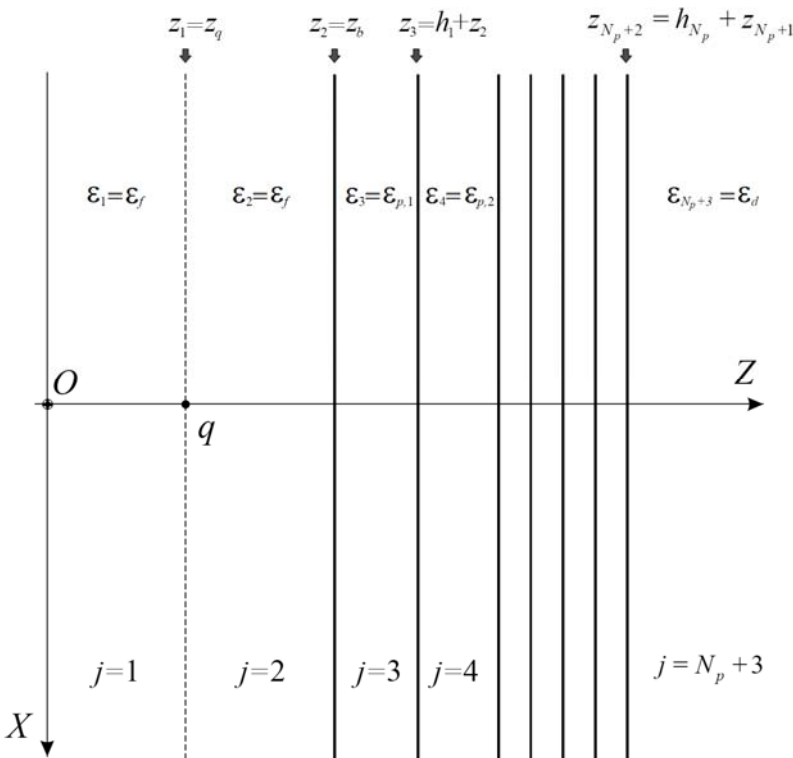


Рис. 2. Точечный заряд  $q$ , расположенный в свободном пространстве с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_f$  в точке с координатой  $z_q$  на расстоянии  $(z_b - z_q)$  от системы пленок с толщинами  $h_m$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{p,m}$ , расположенных на границе полупространства с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_d$

В системе координат (см. рис. 2) заряд находится в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}_q = (0; 0; z_q)$ , на расстоянии  $d = (z_b - z_q)$  вдоль оси  $Z$  от первой пленки. Эту задачу можно рассмотреть как задачу нахождения электрического потенциала от точечного заряда, расположенного на поверхности вспомогательной пленки толщины  $d = (z_b - z_q)$ , причем диэлектрические постоянные этой вспомогательной пленки и полупространства слева равны  $\epsilon_f$ . В такой постановке задачи можно выделить следующие пронумерованные области:

а) полупространство с номером  $j = 1$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_f$  слева от заряда;

б) вспомогательная пленка с номером  $j = 2$ , диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2 = \epsilon_f$  и толщиной  $d$ ;

в) плёнки с номерами  $j = m + 2$ , где  $m = 1, 2, \dots, N_p$ , диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_j = \epsilon_{p,m}$  и толщинами  $h_m$ , которые приближенно заменяют исходную пленку с непрерывно меняющейся диэлектрической проницаемостью;

г) полупространство с номером  $j = N_p + 3$  (справа от плоскостной структуры) и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{3+N_p} = \epsilon_d$  (см. рис. 2).

В рассматриваемой задаче  $N = N_p + 2$ ,  $z_1 = z_q$ ,  $z_2 = z_b$ ,  $z_3 = h_1 + z_2$ ,  $z_4 = h_2 + z_3$ , ...

$z_{N_p+2} = h_{N_p} + z_{N_p+1}$ . Общую толщину всех пленок градиентной плоскостройной структуры обозначим как  $h_{tot} = \sum_{m=1}^{N_p} h_m$ . Тогда,

$\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_2 \times \prod_{m=1}^{N_p} \mathbf{P}_m \times \mathbf{T}_{N_p+3}$ ,  $\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1)^{-1}$  и уравнение (21) примет вид

$$\left( \mathbf{T}_2 \times \prod_{m=1}^{N_p} \mathbf{P}_m \times \mathbf{T}_{N_p+3} \right) \times \hat{\mathcal{F}}_{N_p+3} = (\mathbf{T}_1)^{-1} \times \hat{\mathcal{F}}_1 + \mathbf{V}, \quad (27)$$

где матрицы выражаются следующими формулами

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \varepsilon_f & -\gamma \varepsilon_f \end{pmatrix}^{-1}, \quad \mathbf{T}_{N_p+3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \varepsilon_d & -\gamma \varepsilon_d \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d} \\ \gamma \varepsilon_f & -\gamma \varepsilon_f e^{-\gamma d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma d} & 1 \\ \gamma \varepsilon_f e^{-\gamma d} & -\gamma \varepsilon_f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} ch(\gamma d) & sh(\gamma d)/\gamma \varepsilon_f \\ \gamma \varepsilon_f sh(\gamma d) & ch(\gamma d) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_m = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_m} \\ \gamma \varepsilon_{p,m} & -\gamma \varepsilon_{p,m} e^{-\gamma h_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_m} & 1 \\ \gamma \varepsilon_{p,m} e^{-\gamma h_m} & -\gamma \varepsilon_{p,m} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} ch(\gamma h_m) & sh(\gamma h_m)/\gamma \varepsilon_{p,m} \\ \gamma \varepsilon_{p,m} sh(\gamma h_m) & ch(\gamma h_m) \end{pmatrix},$$

а вектор столбец точечного заряда равен  $\mathbf{V} = (0; q)^T$ . Введем матрицу  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} = \prod_{m=1}^{N_p} \mathbf{P}_m \times \mathbf{T}_{N_p+3}.$$

где составляющие  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  и  $\mathfrak{D}$  являются функциями  $\gamma$ , а также параметров всех пленок  $\varepsilon_{p,m}$ ,  $h_m$  ( $m=1, 2, \dots, N_p$ ) и диэлектрической проницаемости полупространства за пленками  $\varepsilon_d$ . Учитывая, что

$$\mathbf{H}_R = \begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_2 \times \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\gamma d) & sh(\gamma d)/\gamma \varepsilon_f \\ \gamma \varepsilon_f sh(\gamma d) & ch(\gamma d) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix},$$

находим  $H_{RA} = \mathfrak{A} ch(\gamma d) + \mathfrak{C} sh(\gamma d)/\gamma \varepsilon_f$  и  $H_{RC} = \mathfrak{A} \gamma \varepsilon_f sh(\gamma d) - \mathfrak{C} ch(\gamma d)$ .

Уравнение (23) для рассматриваемой задачи примет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & H_{RA} \\ \varepsilon_f \gamma & H_{RC} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1^- \\ \hat{\phi}_{N_p+3}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Из (23), после несложных преобразований, получим

$$\hat{\phi}_1^- = \frac{q H_{RA}}{H_{RC} + \gamma \varepsilon_f H_{RA}} = \frac{q}{2\gamma \varepsilon_f} + \frac{q}{2\gamma \varepsilon_f} \left( \frac{\gamma \varepsilon_f \mathfrak{A} - \mathfrak{C}}{\gamma \varepsilon_f \mathfrak{A} + \mathfrak{C}} \right) e^{-2\gamma d}, \quad (28)$$

$$\hat{\phi}_{N_p+3}^+ = \frac{q}{H_{RC} + \gamma \varepsilon_f H_{RA}} = \frac{q}{\gamma \varepsilon_f \mathfrak{A} + \mathfrak{C}} e^{-\gamma d}. \quad (29)$$

Найдем потенциал  $\phi_1(x, y, z)$  в полупространстве ( $j=1$ ) при  $z \leq z_q$  и потенциал  $\phi_{N_p+3}(x, y, z)$  в полупространстве за плоскостройной структурой при  $z \geq z_{N_p+2}$ .

Выражение (28) для  $\hat{\phi}_1^-$  перепишем в виде

$$\hat{\phi}_1^- = \frac{q}{2\gamma \varepsilon_f} + \frac{q}{2\gamma \varepsilon_f} e^{-2\gamma(z_b - z_q)} \mathfrak{R}(\gamma, h), \quad (30)$$

$$\text{где } \mathfrak{R}(\gamma) = \frac{\gamma \varepsilon_f \mathfrak{A} - \mathfrak{C}}{\gamma \varepsilon_f \mathfrak{A} + \mathfrak{C}}. \quad (31)$$

Можно показать, что функцию  $\mathfrak{R}(\gamma)$  всегда можно представить в виде

$$\mathfrak{R}(\gamma) = \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_{p,1}}{\varepsilon_f + \varepsilon_{p,1}} + \chi(\gamma), \quad (32)$$

где  $\chi(\gamma)$  – экспоненциально спадающая функция  $\gamma$ . Зная выражение (30) для  $\hat{\phi}_1^-$ , можно вычислить  $\phi_1(x, y, z)$  по формуле (25). Аналогично, для  $\hat{\phi}_{N_p+3}^+$  получим

$$\hat{\phi}_{N_p+3}^+ = \frac{q}{2\gamma \varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)} \mathfrak{G}(\gamma), \quad (33)$$

$$\text{где } \mathfrak{G}(\gamma) = 2\gamma \varepsilon_f / (\gamma \varepsilon_f \mathfrak{A} + \mathfrak{C}). \quad (34)$$



Функция  $\mathfrak{G}(\gamma)$  – экспоненциально спадает с ростом  $\gamma$ . Для случая плоскостной структуры из одной и двух пленок функции  $\chi(\gamma)$  и  $\mathfrak{G}(\gamma)$  были найдены аналитически в работах [12] и [15], соответственно. Для большого количества пленок, в данной работе, эта функция будет вычисляться численно. Зная  $\hat{\Phi}_{N_p+3}^+$  можно вычислить  $\Phi_{N_p+3}(x, y, z)$  по формуле (26), где  $N = N_p + 2$ .

**Обобщение метода отражений на случай точечного заряда, расположенного вблизи градиентной плоскостной структуры**

Можно найти другую форму записи для потенциала  $\phi_1(x, y, z)$  точечного зарядом  $q$  в точке  $\mathbf{r}_q = (0; 0; z_q)$ , расположенного рядом с градиентной плоскостной структурой. Введем сначала функцию

$$U(x, y, z) = q / 4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (35)$$

которая определяет потенциал точечного заряда  $q$ , расположенного в начале координат в однородном пространстве с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_f$ .

Введем функцию обратного преобразования Фурье  $\mathfrak{h}(u, v)$  функции  $\chi(\gamma)$  по переменным  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(u, v) &= \\ &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) e^{i(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (36)$$

Применяя теорему о свертке, получим

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_q)^2}} + \\ &+ \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p,1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p,1}} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{ref})^2}} + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{h}(u, v) U(x - u, y - v, z - z_{ref}) dudv, \end{aligned} \quad (37)$$

где  $z_{ref} = 2z_b - z_q$  есть координата зеркального отражения точки  $z_q$  относительно плоскости  $z = z_b$  (левой границы градиентной плоскостной структуры).

При численном нахождении  $\phi_1$  по формуле (37) можно устранить четырехкратное интегрирование в последнем члене следующим образом. Сначала можно привести двойное интегрирование в (36) к однократному интегрированию с помощью перехода к полярным координатам в плоскостях  $(u, v)$  и  $(\xi, \eta)$  по формулам

$$\begin{aligned} u &= \sigma \cos \psi, \quad v = \sigma \sin \psi \quad \text{и} \quad \xi = \lambda \cos \theta, \\ \eta &= \lambda \sin \theta. \end{aligned}$$

Используя тождество  $\int_0^{2\pi} e^{i\sigma\lambda \cos(\psi - \theta)} d\theta = 2\pi J_0(\sigma\lambda)$ , можно перейти от двойного интегрирования к однократному

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(\sigma) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \chi(\lambda) e^{i\lambda\sigma \cos(\psi - \theta)} d\theta d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(\sigma\lambda) \chi(\lambda) \lambda d\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{или } \mathfrak{h}(u, v) &= \mathfrak{h}(\sqrt{u^2 + v^2}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(\lambda\sqrt{u^2 + v^2}) \chi(\lambda) \lambda d\lambda. \end{aligned} \quad (38)$$

Отметим, что  $\mathfrak{h}(\sigma)$  является плавной быстро убывающей функцией, ее можно приблизить сплайнами и, при численном интегрировании в (37), можно использовать эту функцию в виде сплайн-аппроксимации.

Формулу (37) легко обобщить на случай точечного заряда  $q$ , расположенного в произвольной точке  $\mathbf{r}_q = (x_q; y_q; z_q)$ . Полный потенциал  $\phi_1 = \phi_2$  в полупространстве  $j=1$  и области  $j=2$  (легко показать, что выражения для  $\phi_1(x, y, z)$  и  $\phi_2(x, y, z)$  одинаковы) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) = & \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_q)^2 + (y-y_q)^2 + (z-z_q)^2}} + \left( \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p,1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p,1}} \right) \times \\ & \times \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_q)^2 + (y-y_q)^2 + (z-z_{ref})^2}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{h}(u, v) U(x-x_q-u, y-y_q-v, z-z_{ref}) dudv, \end{aligned} \quad (39)$$

причем, универсальная функция  $\mathfrak{h}(u, v)$  не зависит от величины и положения заряда, а зависит от диэлектрических проницаемостей всех областей задачи и толщин всех пленок.

Полученная формула дает *обобщение метода отражений в электростатике* на случай, когда точечный заряд  $q$  расположен в полупространстве рядом с плоскостойкой градиентной структурой, расположенной на границе другого полупространства. Выражение (39) имеет простой физический смысл. Первый член в (39) – это потенциал исходного точечного заряда  $q$  (источника поля), второй член – это потенциал виртуального заряда величины  $q(\epsilon_f - \epsilon_{p,1})/(\epsilon_f + \epsilon_{p,1})$ , расположенного зеркально относительно ближайшей границы плоскостойкой градиентной структуры  $z = z_b$ , а третий член – это потенциал виртуальных зарядов, распределенных по плоскости  $z = z_{ref}$  с плотностью  $q\mathfrak{h}$  по области размером порядка толщины плоскостойкой градиентной структуры. Последний член (39) весьма быстро убывает с ростом толщины плоскостойкой структуры.

Введем функцию  $\mathfrak{t}(u, v)$  обратного преобразования Фурье  $\mathfrak{G}(\gamma)$  по переменным  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}(u, v) = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{G}(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) e^{i(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta = \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(\lambda \sqrt{u^2 + v^2}) \mathfrak{G}(\lambda) \lambda d\lambda. \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда, полный потенциал  $\varphi_{N_p+3}(x, y, z)$  в полупространстве  $j = N_p + 3$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{N_p+3}(x, y, z) = & (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_{N_p+3}^+ e^{-\gamma(z-z_{N_p+2})} e^{i(\xi(x-x_q) + \eta(y-y_q))} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $z_{N_p+2} = z_b + h_{tot}$  и выражение (33), получим

$$\begin{aligned} \varphi_{N_p+3}(x, y, z) = & (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z-(z_q+h_{tot}))} \mathfrak{G}(\gamma) e^{i(\xi(x-x_q) + \eta(y-y_q))} d\xi d\eta = \\ = & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{t}(u, v) U(x-x_q-u, y-y_q-v, z-(z_q+h_{tot})) dudv. \end{aligned} \quad (41)$$

Отсюда следует, что потенциал за градиентной структурой есть потенциал виртуальных зарядов, распределенных по плоскости  $z = z_q + h_{tot}$  с плотностью  $q\mathfrak{t}$  по области размером порядка толщины градиентной структуры.

### Обобщение метода отражений на случай системы зарядов

Обобщим теперь полученный метод зеркальных отражений на потенциал полного поля  $\Phi_{tot}(x, y, z)$  в области  $z \leq z_b$  перед плоскостойкой градиентной структурой,

произвольной компактной системы  $N_q$  зарядов-источников  $q_k$ , расположенных в точках с радиус-векторами  $\mathbf{r}_{q,k} = (x_{q,k}; y_{q,k}; z_{q,k})$ , где  $k = 1, 2, \dots, N_q$ .

Если бы не было плоскостой структуры, то потенциал этой системы зарядов-источников представлялся бы формулой

$$\Phi_s(x, y, z) = \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z-z_{q,k})^2}. \quad (42)$$

Суммируя (39) для каждого заряда  $q_k$  по всем  $N_q$  зарядам системы и замечая, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z-(2z_b-z_{q,k}))^2} = \\ & = \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + ((2z_b-z)-z_{q,k})^2} = \Phi_s(x, y, 2z_b-z), \end{aligned}$$

получим обобщение метода отражений в электростатике для произвольных распределений зарядов для полного потенциала системы зарядов в полупространстве перед плоскостой структурой в виде

$$\Phi_{tot}(x, y, z) = \Phi_s(x, y, z) + \frac{(\epsilon_f - \epsilon_{p,1})}{(\epsilon_f + \epsilon_{p,1})} \Phi_s(x, y, 2z_b-z) + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{h}(u, v) \Phi_s(x-u, y-v, 2z_b-z) dudv. \quad (43)$$

Из вывода формулы (43) следует, что потенциал индуцированных зарядов  $\Phi_{ind}$ , который порождается потенциалом  $\Phi_s$  зарядов-источников поля, представляется формулой

$$\Phi_{ind}(x, y, z) = \frac{(\epsilon_f - \epsilon_{p,1})}{(\epsilon_f + \epsilon_{p,1})} \Phi_s(x, y, 2z_b-z) + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{h}(u, v) \Phi_s(x-u, y-v, 2z_b-z) dudv. \quad (44)$$

Кроме того, учитывая, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z-(z_{q,k}+h_{tot}))^2} = \\ & = \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + ((z-h_{tot})-z_{q,k})^2} = \Phi_s(x, y, z-h_{tot}), \end{aligned}$$

получим, с учетом (41), потенциал системы зарядов в полупространстве за плоскостой градиентной структурой

$$\begin{aligned} & \Phi_{N_p+3}(x, y, z) = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{t}(u, v) \Phi_s(x-u, y-v, z-h_{tot}) dudv. \end{aligned} \quad (45)$$

Зная из (45) распределение потенциала на границе  $z = h_{tot}$ , можно также найти на границе распределение  $D_{N_p+3, z} \Big|_{z=h_{tot}} =$

$= -\epsilon \partial \Phi_{N_p+3} / \partial z \Big|_{z=h_{tot}}$  и далее, найти фурье-образы этих величин на этой границе, то есть вектор:

$$\left( \tilde{\Phi}, \tilde{D}_z \right)^T \Big|_{z=h_{tot}} = \left( \tilde{\Phi}_{N_p+3}, -\epsilon \partial \tilde{\Phi}_{N_p+3} / \partial z \right)^T \Big|_{z=h_{tot}}.$$

Тогда, если требуется найти распределение потенциала внутри плоскостой структуры в некотором сечении, при  $z = \zeta$ , в общем случае можно поступить следующим образом. Необходимо разбить плоскостой струк-

туру в интервале  $\zeta \leq z \leq h_{tot}$  на достаточное число тонких пленок, настолько тонких, чтобы в пределах пленки можно считать диэлектрическую проницаемость постоянной величиной (это разбиение можно сделать в любой градиентной и плоскостлой структуре). Тогда, распределение  $\tilde{\Phi}(\xi, \eta, \zeta)$  фурье-образа потенциала при  $z = \zeta$  можно найти, используя (15), из уравнения

$$\left( \begin{matrix} \tilde{\Phi} \\ \tilde{D}_z \end{matrix} \right) \Big|_{z=\zeta} = \prod \mathbf{T}_m \times \left( \begin{matrix} \tilde{\Phi} \\ \tilde{D}_z \end{matrix} \right) \Big|_{z=h_{tot}},$$

где  $\prod \mathbf{T}_m$  – произведение матриц  $\mathbf{T}_m$  всех тонких пленок разбиения интервала  $\zeta \leq z \leq h_{tot}$ . Тогда распределение потенциала  $\Phi(x, y, \zeta)$  в рассматриваемом сечении  $z = \zeta$  определится обратным фурье-преобразованием (46)

$$\Phi(x, y, \zeta) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x + i\eta y} \tilde{\Phi}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta.$$

Таким образом, зная распределение зарядов или их потенциал  $\Phi_s$  в свободном пространстве, можно определить потенциал этих зарядов в полупространствах и внутри произвольной градиентной плоскостлой структуры.

### Распределение потенциала вокруг заряженного металлического тела, расположенного вблизи градиентной плоскостлой структуры

Рассмотрим заряженное металлическое (эквипотенциальное) тело и пусть это тело имеет (для простоты) осевую симметрию относительно оси  $Z$ , которая нормальна к плоскостлой структуре (см. рис. 3). Поверхность тела определим параметрическими функциями  $r = r(s)$  и  $z = z(s)$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – расстояние до оси  $Z$  точки поверхности тела с координатами  $(x, y, z)$ ,  $s$  – длина дуги образующей, отсчитываемой от точки тела, ближайшей к плоскостлой структуре. Полную длину дуги образующей поверхности тела обозначим  $S_{max}$ .

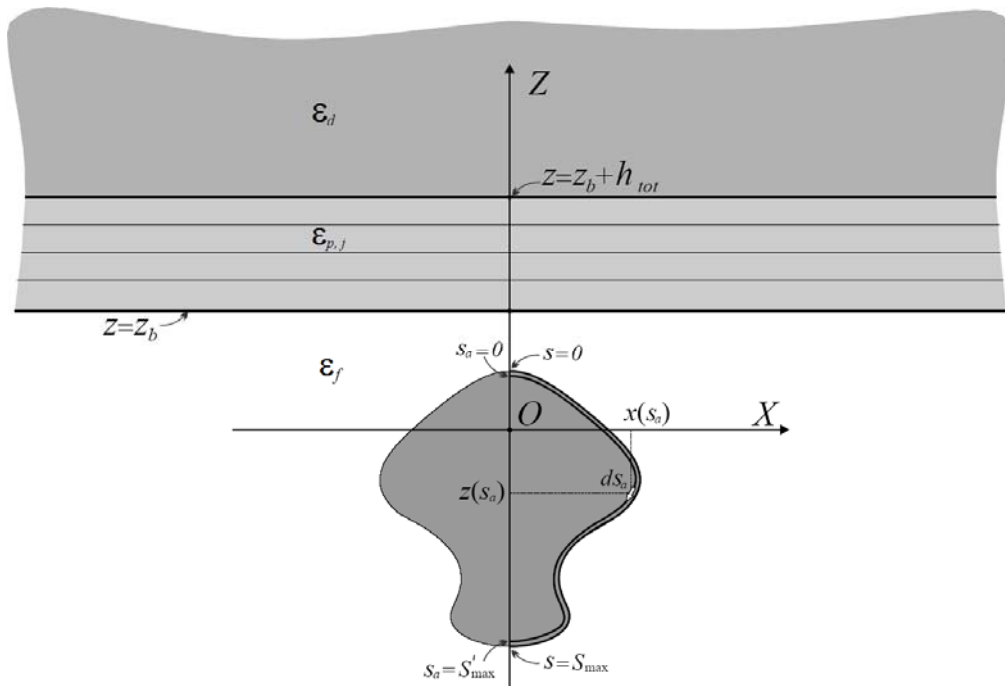


Рис. 3. Осесимметричное тело у плоскостлой структуры, расположенной на границе полупространства. Геометрия задачи

Введем также вспомогательную осесимметричную поверхность, расположенную внутри тела, на малом расстоянии от поверхности тела. Зададим эту поверхность также параметрически функциями  $r_a = r_a(s_a)$  и  $z_a = z_a(s_a)$ , где  $r_a = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$  – расстояние до оси  $Z$  точки вспомогательной поверхности с координатами  $(x_a, y_a, z_a)$ ,  $s_a$  – длина дуги образующей вспомогательной поверхности, отсчитываемой от ее точки, ближайшей к плоскостной структуре. Полную длину образующей вспомогательной поверхности обозначим  $S'_{\max}$ .

Поле снаружи металлического тела будем аппроксимировать полем заряда распределенного по вспомогательной поверхности симметрично с поверхностной плотностью заряда  $\sigma = \sigma(s_a)$ .

Рассмотрим кольцо толщины  $ds_a$  и радиусом  $r_a(s_a)$  на поверхности вспомогательного тела. Кольцо, в силу осевой симметрии задачи, равномерно заряжено, причем полный заряд кольца будет равен  $dq_a = 2\pi r_a(s_a)\sigma(s_a)ds_a$ .

Электростатическое поле равномерно заряженного кольца определяется с помощью закона Кулона и принципа суперпозиции. Результат вычисления потенциала кольца в точке с координатами  $(r, z)$  можно выразить через полный эллиптический интеграл первого рода [16]:

$$d\varphi_a = \frac{dq_a}{2\pi^2\epsilon_f} \frac{K(\tau)}{\sqrt{(r+r_a(s_a))^2 + (z-z_a(s_a))^2}},$$

где

$$\tau = 2\sqrt{r \cdot r_a(s_a)} / \sqrt{(r+r_a(s_a))^2 + (z-z_a(s_a))^2},$$

$K(\tau) = \int_0^{\pi/2} (1 - \tau^2 \sin^2 \zeta)^{-1/2} d\zeta$  – полный эллиптический интеграл первого рода, который можно выразить через гипергеометрическую функцию Гаусса по формуле [17]  $K(\tau) = (\pi/2) \cdot F(1/2, 1/2, 1, \tau^2)$ . Тогда полный потенциал точки  $(x, y, z)$  снаружи от тела от распределения зарядов вспомогательного тела с поверхностной плотностью  $\sigma(s_a)$  будет равен

$$\Phi_s(x, y, z) = \frac{1}{\pi\epsilon_f} \int_0^{S'_{\max}} \frac{\sigma(s_a)r_a(s_a)ds_a}{\sqrt{(r+r_a(s_a))^2 + (z-z_a(s_a))^2}} K\left(\frac{2\sqrt{r \cdot r_a(s_a)}}{\sqrt{(r+r_a(s_a))^2 + (z-z_a(s_a))^2}}\right), \quad (46)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – расстояние между точкой наблюдения и осью  $Z$ .

В принципе, можно было рассматривать распределение зарядов по поверхности тела и не вводить вспомогательную поверхность с распределенной по ней плотностью заряда. Это сделано потому, что при  $(r, z) \rightarrow (r_a, z_a)$  у подынтегрального выражения в (46) возникает особенность. Чтобы устранить трудности, связанные интегрированием и была введена вспомогательная поверхность. Расстояние между поверхностью тела и вспомогательной поверхностью весьма мало (в расчетах далее меньше 0.01 от характерного размера тела). Применимость метода устранения таких проблем была продемонстрирована в работах [18, 19].

Если рассматриваемое заряженное тело расположено рядом с плоскостной структурой (см. рис. 3) то, из-за индуцированных зарядов полный потенциал  $\Phi$  должен удовлетворять уравнению Лапласа  $\Delta\Phi = 0$ , причем, потенциал металлического тела должен быть постоянной величиной (обозначим его  $U_s$ ). Кроме того, на плоских границах пленок должны быть непрерывны тангенциальные составляющие электрического поля и нормальные составляющие электрической индукции. Потенциал, удовлетворяющий таким граничным условиям будет выражаться через  $\Phi_s$  формулой (43), потенциал за плоскостной структурой – формулой (45). Как было выше показано, по этим распределениям вычисляется потенциал во всех пленках. При этом граничные условия на границах плоскостной

структуры будут выполняться автоматически.

Таким образом, задача определения потенциала во всем пространстве состоит в том, чтобы найти такой потенциал  $\Phi_s(x, y, z)$ , чтобы полный потенциал  $\Phi_{tot}(x, y, z)$  удовлетворял на металлической поверхности тела условию  $\Phi_{tot} = U_s$ . Это можно сделать, разложив потенциал  $\Phi_s(x, y, z)$  по подходящим гармоническим функциям, а коэффициенты разложения определить из условия  $\Phi_{tot} = U_s$  на эквипотенциальной границе.

Имея в виду общность дальнейшего изложения, перейдем к безразмерным координатам:  $\tilde{x} = x/R$ ,  $\tilde{y} = y/R$ ,  $\tilde{z} = z/R$ , где  $R$  – некоторое размерное расстояние. Уравнение Лапласа в безразмерных координатах не изменится. Кроме того, нормируем потенциал на потенциал на поверхности тела  $U_s$ , то есть перейдем от размерного к безразмерному потенциалу  $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \Phi/U_s$  в безразмерных координатах. Тогда, граничное условие на поверхности тела запишется в виде  $\tilde{\Phi}_{tot} = 1$ .

В рассматриваемом осесимметричном

где

$$\tilde{\mathfrak{F}}_m(\tilde{r}, \tilde{z}) = \frac{1}{\pi \varepsilon_f} \int_0^{\tilde{S}'_{\max}} \cos\left(\frac{(m-1)\pi \tilde{s}_a}{\tilde{S}'_{\max}}\right) \frac{\tilde{r}_a(\tilde{s}_a) d\tilde{s}_a}{\sqrt{(\tilde{r} + \tilde{r}_a(\tilde{s}_a))^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_a(\tilde{s}_a))^2}} K\left(\frac{2\sqrt{\tilde{r} \cdot \tilde{r}_a(\tilde{s}_a)}}{\sqrt{(\tilde{r} + \tilde{r}_a(\tilde{s}_a))^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_a(\tilde{s}_a))^2}}\right).$$

Тогда, полный потенциал в среде с  $\varepsilon_f$  (между телом и плоскостистой структурой) можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{m=1}^N A_m \left( \tilde{\mathfrak{F}}_m(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}) + \mathfrak{P}_m(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}) \right). \quad (48)$$

где

$$\mathfrak{P}_m(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}) = \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_{p,1})}{(\varepsilon_{p,1} + \varepsilon_f)} \tilde{\mathfrak{F}}_m(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{h}(\tilde{u}, \tilde{v}) \tilde{\mathfrak{F}}_m(\sqrt{(\tilde{x} - \tilde{u})^2 + (\tilde{y} - \tilde{v})^2}, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}) d\tilde{u} d\tilde{v}.$$

Граничное условие на поверхности тела  $\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 1$  в данной работе удовлетворялось приближенно, методом коллокаций [20]. Указанные уравнения записывались в равномерно распределенных  $N$  точках дуги образующей при  $\tilde{y} = 0$  и  $\tilde{x} > 0$  на поверхности тела. Решая полученные  $N$  линейных алгеб-

случае, для выполнения граничного условия на поверхности металлического тела, достаточно удовлетворить его на линии пересечения поверхности тела с любой плоскостью симметрии, проходящей через ось  $Z$  (на образующей поверхности вращения). В качестве такой плоскости мы выберем плоскость  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  при  $\tilde{y} = 0$ . Более конкретно, достаточно удовлетворить граничному условию  $\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) = 1$  только на границе пересечения полуплоскости  $\tilde{y} = 0$  при  $\tilde{x} \geq 0$  и поверхности тела.

Будем искать решение, предполагая, что

$$\sigma(\tilde{s}_a) = \sum_{m=1}^N A_m \cos\left((m-1)\pi \tilde{s}_a / \tilde{S}'_{\max}\right),$$

где  $A_m$  – постоянные коэффициенты разложения. Тогда потенциал снаружи тела  $\tilde{\Phi}_s$  имеет вид

$$\tilde{\Phi}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{m=1}^N A_m \tilde{\mathfrak{F}}_m(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}), \quad (47)$$

раических уравнений с  $N$  неизвестными, находились  $A_m$  и, по формуле (48), распределение полного потенциала в области между телом и передней поверхностью первой пленки плоскостистой структуры. Функция  $\chi(\sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2})$  и затем  $\mathfrak{h}(\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2})$  в формуле

(48) находилась численно для точечного заряда, расположенного рядом с заданной плоскостной структурой по формулам (30)–(32) и (36). Затем функция  $h(\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2})$  приближалась сплайном, который использовался для вычисления интегралов. Аналогично, вычислялись функции  $\vartheta(\sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2})$  и  $t(\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2})$  по формулам (34) и (40), и затем приближалась сплайном. Тогда, по полученным коэффициентам потенциал в полупространстве за плоскостной структурой вычислялся по формуле (45). Зная, таким образом  $t(\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2})$ , по формуле (45) вычислялся потенциал в полупространстве за плоскостной структурой:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{N_p+3}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \\ = \sum_{j=m}^N A_m \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} t(\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}) \mathfrak{F}_m(\tilde{x} - \tilde{u}, \tilde{y} - \tilde{v}, \tilde{z} - \tilde{h}_{tot}) d\tilde{u}d\tilde{v}. \end{aligned}$$

Далее, находился фурье-образ  $\tilde{\Phi}_{N_p+3}$  и по нему – распределение потенциала внутри плоскостной структуры.

В итоге, находится задача нахождения нормированного потенциала в нормированных координатах снаружи рассматриваемого тела, в слоистой структуре и в полупространстве за ней по известным значениям  $A_j$ .

Наконец, нетрудно заметить важное свойство полученных решений – они зависят от отношений диэлектрических проницаемостей. То есть, если увеличить все диэлектрические проницаемости в  $k$  раз, то распределение нормированного потенциала не изменится.

### Пример вычисления распределений потенциала вокруг металлических тел вращения сложной формы

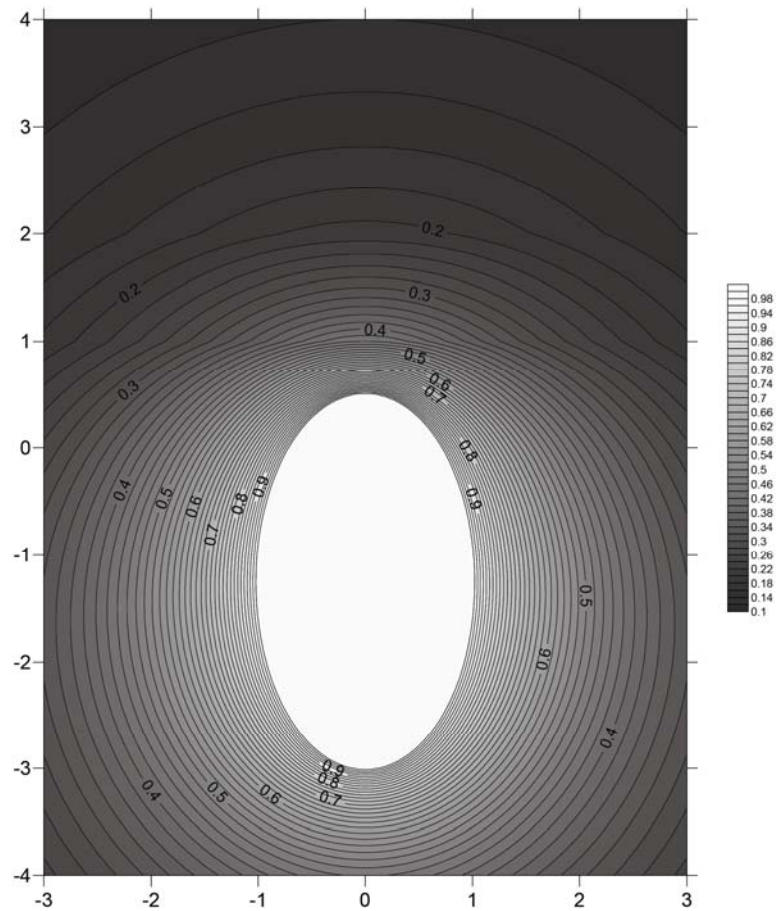
Сначала, в качестве примера применения и демонстрации возможностей изложенной выше теории, были проведены численные расчеты распределения нормированного потенциала от вытянутого (вдоль оси  $Z$ ) металлического заряженного эллипсоида вращения,

расположенного вблизи плоскостной структуры, состоящей из одной пленки (см. рис. 4а). Нормирование координат проводилось на длину малой полуоси эллипсоида (в плоскости, перпендикулярной оси  $Z$ ). При этой нормировке длина большой полуоси равнялась 1,75. Центр эллипса находился в точке  $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) = (0, 0, -1, 25)$ . Кратчайшее расстояние от эллипса до пленки было равно  $\Delta\tilde{z} = 0,5$ . Эллипс находился в среде с  $\varepsilon_f = 1$ , рядом с пленкой толщины  $\tilde{h} = 1$  (в нормированных единицах) с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_p = 2$ . Полупространство за пленкой имело диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_d = 4$ . Границы пленки определялись уравнениями  $\tilde{z} = \tilde{z}_b = 1$  и  $\tilde{z} = \tilde{z}_b + \tilde{h} = 2$  (см. рис. 4а). Кратчайшее расстояние от эллипсоида до пленки было равно  $\Delta\tilde{z} = 0,5$ . На рис. 4а показано распределение нормированного потенциала в плоскости, проходящей вдоль оси  $Z$  при указанных параметрах.

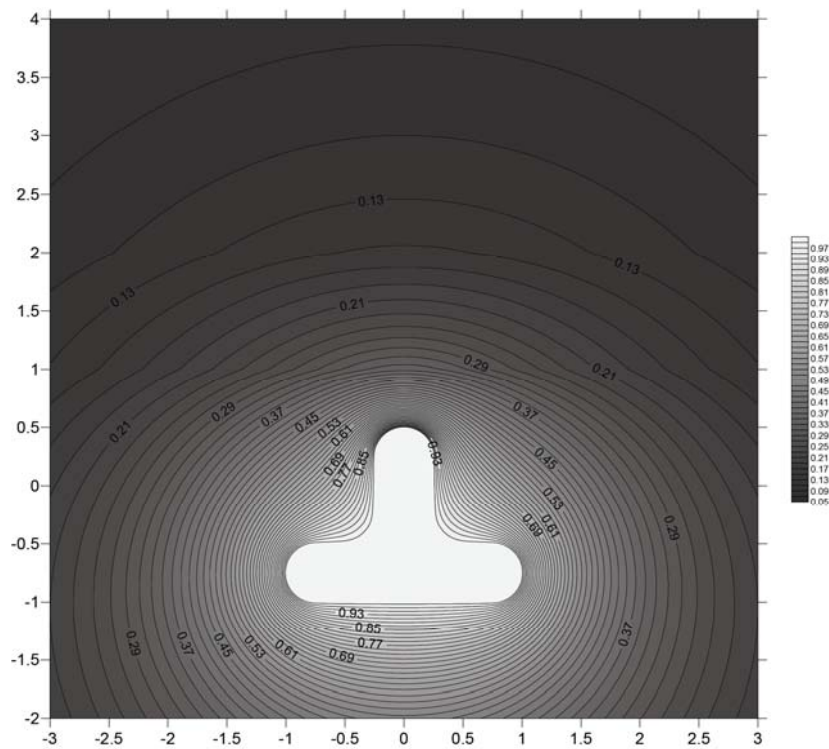
Кроме задачи об эллипсоиде, была рассмотрена задача нахождения нормированного потенциала от металлического заряженного тела сложной формы, которая представляет из себя диск с закругленными краями, у которого есть выступ в сторону пленки с закругленным концом (см. рис. 4б). Эта форма была выбрана для демонстрации возможностей предложенного численного метода.

На распределениях рис. 4а и 4б видна естественная экранировка электрического поля в диэлектрике, возникающая за счет индуцированных зарядов. Чем больше диэлектрическая проницаемость, тем сильнее экранировка. По расстоянию между эквипотенциалами видна концентрация электрического поля на выступающих частях тел.

Особо отметим важное свойство полученных нормированных распределений – они одинаковы для всех подобных геометрий и одинаковых соотношений диэлектрических проницаемостей. Если увеличить все диэлектрические проницаемости в  $k$  раз, то распределение нормированного потенциала не изменится.



a)



б)

Рис. 4. Распределения нормированного потенциала вблизи металлических тел: эллипсоида а), тела вращения сложной формы б). Диэлектрические проницаемости:  $\epsilon_f = 1$ ,  $\epsilon_p = 2$ ,  $\epsilon_d = 4$ , толщина пленки  $\tilde{h} = 1$ , ее границы  $\tilde{z} = 1$  и  $\tilde{z} = 2$



### Применение полученных результатов к задачам стационарной теплопроводности плоскостных сред

Как известно, существует строгая аналогия между задачами электростатики и стационарными задачами теплопроводности [21, глава 12]. Аналогичны не только соответствующие уравнения, но и граничные условия [22, 23, 14]. Если в задачах, рассмотренных в предыдущих разделах, заменить одновременно:

- 1) потенциал  $\varphi$  – на температуру  $(T - T_0)$ , где  $T_0$  – температура на бесконечности;
- 2) диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$  – на коэффициент теплопроводности  $K$ ;
- 3) вектор электрической индукции  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon \nabla \varphi$  – на плотность потока тепла  $\mathbf{h} = -K \nabla T$ ;

4) точечный заряд  $q$  – на мощность тепловыделения точечного источника  $Q_h$ , то, решения аналогичных задач идентичны и они могут быть решены одним и тем же методом.

Например, чтобы решить задачу распределения температуры вокруг тела, нагретого до постоянной температуры  $T_m$ , можно сначала решить соответствующую электростатическую задачу распределения потенциала в окрестности тела с постоянным потенциалом поверхности. Нормированное решение электростатической задачи будет также решением аналогичной нормированной задачи теплопроводности в нормированных координатах (при указанной замене величин и обозначений). Результаты расчетов распределения температуры (точнее превышения температуры над внешней температурой  $T_0$ , выраженное в единицах  $(T_m - T_0)$ ) в задачах о равномерно нагретых вытянутом эллипсе и о диске с выступом будут идентичны распределениям рис. 4.

Нормированные температурные распределения так же, как и в случае распределений нормированных электростатических потенциалов, обладают следующим свойством. Распределения зависят от отношений коэффициентов теплопроводности областей. То есть, если увеличить все коэффициенты теплопроводности в  $k$  раз, то нормированное распределение температуры не изменится в норми-

рованных координатах. Таким образом, на рис. 4 показаны нормированные температурные распределения при значениях коэффициентов теплопроводности  $K_f = k$ ,  $K_p = 2k$ ,  $K_d = 4k$ , где  $k$  – произвольное число.

Особо отметим, что аналогия между электростатической и теплопроводной задачами означает, что распределение электрического потенциала в вакууме аналогично распределению температуры в вакууме. В рассмотренном случае аналог вакуума – среда с некоторым конечным коэффициентом теплопроводности  $K_f$ , а коэффициенты  $K_p$ ,  $K_d$  соотносятся с  $K_f$  так же, как диэлектрические проницаемости аналогичной электростатической задачи.

### Заключение

В статье предложена оригинальная матричная техника нахождения фундаментального решения оператора Лапласа для плоскостных сред на примере электростатической задачи. Предложена формулировка обобщенного метода отражений для плоскостной градиентной структуры, расположенной на однородном полупространстве.

Продемонстрировано, как применить предложенный метод для нахождения распределений электростатического потенциала от симметричных металлических заряженных тел вращения сложной формы, расположенных рядом с градиентной плоскостной структурой. Представленные результаты расчетов распределений потенциала для плоскостной структуры, состоящей из одной пленки, демонстрируют возможности метода для расчета потенциала вокруг тел вращения весьма сложной формы.

Особо хочется отметить разработанный метод представления полей от заряженного тела сложной формы полями от поверхностных зарядов, распределенных по вспомогательной поверхности. В отличие от разложения этого поля по собственным функциям оператора Лапласа в ортогональных системах координат, которое непригодно для задач нахождения полей от тел сложной формы, разработанный в статье метод показал отличные результаты в комбинации с методом коллокаций. Очевидно, что метод имеет большой

потенциал в применении и к другим задачам прикладной физики.

Выявлена применимость предложенного метода к аналогичным задачам стационарной теплопроводности. Показано, что полученные нормированные распределения потенциала в точности идентичны нормированным распределениям температурного поля в окрестности равномерно нагретых тел подобной геометрии, расположенных рядом с аналогичными градиентными плоскостростыми теплопроводящими структурами на теплопроводящем полупространстве.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pollack H. N. / J. Geophysical Research. 1965. Vol. 70. № 22. P. 5645.
2. Negi J. G., Singh R. N. / Pure and Applied Geophysics. 1969. Vol. 73. № 1. P. 143.
3. Negi J. G., Singh R. N. / Pure and Applied Geophysics. 1968. Vol. 69. № 1. P. 110.
4. Matysiak S. J., Perkowski D. M. / Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 50. № 1. P. 75.
5. Chew W. C. Waves and Fields in Inhomogeneous Media. – New York: IEEE Press, 1995.
6. Петрин А. Б. / Оптика и спектроскопия. 2020. Т. 128. № 11. С. 1676.
7. Петрин А. Б. / Оптика и спектроскопия. 2020. Т. 128. № 12. С. 1874.
8. Петрин А. Б. / ЖЭТФ. 2021. Т. 159. № 1. С. 35.
9. King R. W. P., Smith G. S. Antennas in Matters. – Cambridge: MA: M.I.T. Press, 1981.
10. King R. W. P. / IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1988. Vol. 36. № 6. P. 1080.
11. Петрин А. Б. / Оптика и спектроскопия. 2021. Т. 129. № 1. С. 55.
12. Петрин А. Б. / Оптика и спектроскопия. 2022. Т. 130. № 9. С. 1436.
13. Петрин А. Б. / Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 4. С. 326.
14. Петрин А. Б. / Теплофизика высоких температур. 2022. Т. 60. № 5. С. 740.
15. Петрин А. Б. / ЖЭТФ, (представлена на рассмотрение 16.12.2022 г.).
16. Силадьи М. Электронная и ионная оптика. – М.: Мир, 1990.
17. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984.
18. Петрин А. Б. / Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 3. С. 323.
19. Петрин А. Б. / Физика плазмы. 2010. Т. 36. № 7. С. 671.
20. Миллер Е., Поджою А. и др. Численные методы теории дифракции: сб. статей. Математика. Вып. 29 / Пер. с англ. – М.: Мир, 1982.
21. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. Электричество и магнетизм. – М.: Мир, 1965.
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
23. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001.

PACS: 41.20.Cv, 44.10.+i

## Development of methods for solving problems of electrostatics and thermal conductivity of plane-layered media

A. B. Petrin

Joint Institute for High Temperatures, Russian Academy of Sciences  
Bd. 2, 13 Izhorskaya st., 125412, Moscow, Russia  
E-mail: petrin@ihed.ras.ru, a\_petrin@mail.ru

Received 6.02.2023; revised 10.02.2023; accepted 15.02.2023

*The method of reflections is formulated and proved for a point charge located next to a flat-layered medium located on a dielectric half-space. The method is generalized to the case of an arbitrary system of charges and is used to solve mathematically similar problems of electrostatics and stationary thermal conductivity of plane-layered media. The application of the method to the problems of finding the distributions of the electrostatic potential in the vicinity of an elongated metal ellipsoid and a metal body of revolution of a complex shape, located near a plane-layered structure consisting of a single dielectric film located on a dielectric half-space, is considered. It is shown how to apply the results obtained for electrostatic*

***problems to similar problems of finding the temperature distribution of uniformly heated bodies of the same geometry located near a heat-conducting plane-layered structure located on a heat-conducting half-space.***

*Key words:* plane layered medium, mirror reflection method, electrostatics, thermal conductivity.

DOI: 10.51368/2307-4469-2023-11-1-3-21

REFERENCES

1. Pollack H. N., J. Geophysical Research **70** (22), 5645 (1965).
2. Negi J. G. and Singh R. N., Pure and Applied Geophysics **73** (1), 143 (1969).
3. Negi J. G. and Singh R. N., Pure and Applied Geophysics **69** (1), 110 (1968).
4. Matysiak S. J. and Perkowski D. M., Heat and Mass Transfer **50** (1), 75 (2014).
5. Chew W. C., Waves and Fields in Inhomogeneous Media, New York, IEEE Press, 1995.
6. Petrin A. B., Optics and Spectroscopy **128**, 1809 (2020).
7. Petrin A. B., Optika i Spectroscopya **128** (12), 1874 (2020) [in Russian].
8. Petrin A. B., J. Experimental and Theoretical Physics **132**, 27 (2021).
9. King R. W. P. and Smith G. S., Antennas in Maters, Cambridge: MA: M.I.T. Press, 1981.
10. King R. W. P., IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **36** (6), 1080 (1988).
11. Petrin A. B., Optics and Spectroscopy **129**, 72 (2021).
12. Petrin A. B., Optics and Spectroscopy **130**, 9, 1436. (2022) [in Russian].
13. Petrin A. B., Usp. Prikl. Fiz. **4** (4), 326 (2016) [in Russian].
14. Petrin A. B., Teplofizika Vysokikh Temperatur **60** (5), 740 (2022).
15. Petrin A. B., JETP (submitted 16.12.2022).
16. Szilagy M., Electron and Ion Optics, New York, Plenum Press, 1988.
17. Nikiforov A. F. and Uvarov V. B., Special functions of mathematical physics, Moscow, Nauka, 1984 [in Russian].
18. Petrin A. B., High Temperature **48** (3), 305 (2010).
19. Petrin A. B., Plasma Physics Reports **36** (7), 627 (2010).
20. Miller E., Poggio A. et al., Numerical methods of the theory of diffraction: Collection of articles. Mathematics. Issue 29: Translation from English, Moscow, Mir, 1982.
21. Feynman R., Leighton R. and Sands M., Feynman Lectures on Physics, Volume 2: Mainly Electromagnetism and Matter, Massachusetts, Addison-Wesley, 1964.
22. Landau L. D. and Lifshits E. M., Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics, Moscow, Nauka, 1986 [in Russian].
23. Kartashov E. M., Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids, Moscow, Higher school, 2001 [in Russian].