

УДК 537.2, 536.2

EDN: PTTCNM

PACS: 41.20.Cv, 44.10.+i, 44.05.+e.



Развитие методов решения задач нестационарной теплопроводности плоскостойких сред

А. Б. Петрин

Исследуется задача о распространении тепла от нестационарного точечного источника, расположенного внутри или снаружи плоскостойкой теплопроводящей среды. Нестационарная задача приводится к задаче о гармоническом точечном источнике тепла, для которой обобщается метод отражения. Развитый метод отражений для точечного гармонического источника обобщается на случай произвольной системы источников и применяется для решения задач нестационарной теплопроводности плоскостойких сред с осесимметричными источниками тепла сложной формы.

Ключевые слова: плоскостойкая среда, метод отражений, теплопроводность, нестационарная теплопроводность.

DOI: 10.51368/2307-4469-2023-11-2-93-114

Введение

Во многих современных технических приложениях возникает необходимость анализа нестационарной теплопроводности в плоскостойких структурах [1–8]. В задачах теплопроводности в стойких средах используется матричный метод [9–12], который, как правило, применяется для решения двумерных задач. Подобные матричные методы успешно применяются в задачах излучения и распространения электромагнитных полей в плоскостойких средах [13]. В работах [14–16] был предложен оригинальный вариант строгой электромагнитной теории излучения элементарного диполя, расположенного на границе или внутри плоскостойкой структуры, являющегося развитием работ [17, 18].

В частности, в [14–16] был продемонстрирован метод аналитического упрощения решения, имеющий потенциально важное общетеоретическое значение. Обобщение данного метода для случая произвольного количества пленок в плоскостойкой структуре [19] позволило привести формулы для излучаемых полей к одномерным интегралам, что существенно упростило анализ задач и ускорило численные расчеты.

Матричный метод, развитый в упомянутых работах был применен для решения задач электростатики, квазиэлектростатики и стационарной теплопроводности [21, 21]. Был развит и обобщен метод отражений, который был применен для решения задач электростатики и стационарной теплопроводности. В [22] метод был применен для нахождения распределений электрических и температурных полей вокруг тел вращения сложной формы, расположенных рядом с плоскостойкой структурой.

В данном исследовании, методы работ [20–22], получили дальнейшее развитие. Методы отражений развиваются и обобщаются на аналогичные нестационарные задачи теплопроводности для тел сложной формы, расположенные рядом с плоскостойкой структурой.

Петрин Андрей Борисович, доцент, к.ф.-м.н.
E-mail: petrin@ihed.ras.ru, a_petrin@mail.ru
Объединенный институт высоких температур РАН,
Россия, 125412, Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2.

Статья поступила в редакцию 21.03.2023

После доработки 29.03.2023

Принята к публикации 3.04.2023

© Петрин А. Б., 2023

Поле температуры от точечного источника тепла, расположенного внутри плоскостной структуры.
Постановка задачи

Рассмотрим задачу нахождения поля температуры от точечного источника тепла, расположенного внутри плоскостной структуры, которая состоит из нескольких пленок и из окружающих слоистую структуру двух полупространств. Предполагается, что материалы, из которых состоят слои плоскостной структуры, являются однородными и изотропными, с постоянными характеристиками, такими как плотность, удельная теплоемкость при постоянном давлении и коэффициент теплопроводности. Для определенности сначала будем считать, что источник расположен в одной из пленок, а затем обобщим эту задачу на случай, когда источник расположен на их границе или в одном из полупространств.

Суть метода исследования задачи состоит в следующем. В каждом слое выполняется уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами. Это уравнение линейное. На каждой границе слоя должны выполняться условия непрерывности температуры и нормального к границе потока тепла при переходе через границу. В силу линейности уравнения, можно разложить объемную плотность мощности тепловыделения нестационарного источника тепла на гармонические слагаемые по Фурье (на гармонические источники). Для каждого гармонического источника можно найти гармоническое решение уравнения теплопроводности. Тогда, в силу линейности уравнения и граничных условий, решение для исходного нестационарного источника есть сумма (интеграл) всех гармонических решений [23, главы 23–25].

Пусть общее число пленок равно N_f , толщина m -й пленки равна d_m и полная толщина слоистой структуры равна $d_{tot} = \sum_{m=1}^{N_f} d_m$. Общее число границ между пленками обозначим как $N = N_f + 1$. Пронумеруем области пространства $j = 1, \dots, (N + 1)$ (на рис. 1 показана для примера задача с $N = 4$ и $N_f = 3$). Предположим, что пленки имеют плотность, удельную теплоемкость при

постоянном давлении и коэффициент теплопроводности равные ρ_j , c_j , κ_j , а перед и за слоистой структурой находятся однородные полупространства с параметрами ρ_1 , c_1 , κ_1 и ρ_{N+1} , c_{N+1} , κ_{N+1} . Обозначим также через z_j – координаты N границ пленок по оси Z следующим образом: $z_1 = 0$, $z_j = \sum_{m=1}^{j-1} d_m$ при $j = 2, \dots, N$.

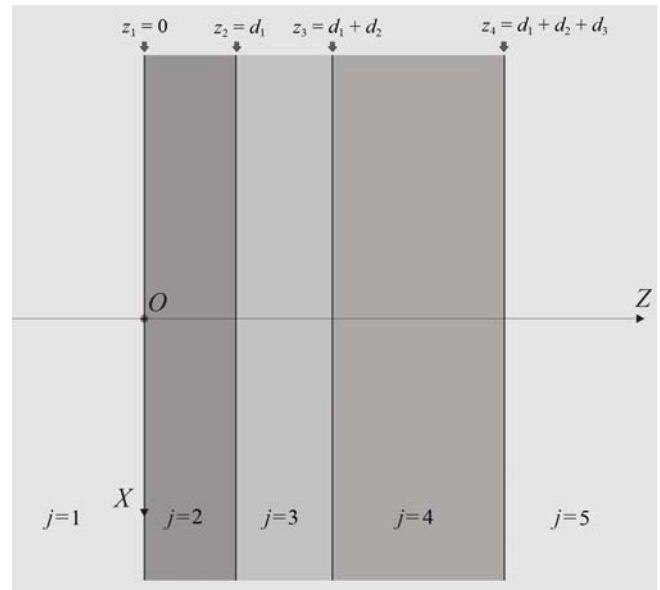


Рис. 1. Геометрия плоскостной структуры, состоящей из трех пленок

Нестационарное уравнение теплопроводности в области с номером j можно записать через поле температуры в этой области T_j в виде:

$$\rho_j c_j \frac{\partial T_j}{\partial t} - \kappa_j \Delta T_j = \rho_h, \quad (1)$$

где ρ_h – объемная плотность мощности тепловыделения точечного источника; Δ – оператор Лапласа. На границах области должно выполняться граничные условия – условия непрерывности температуры и нормального к границе потока тепла:

на левой границе $z = z_{j-1}$

$$T_j(x, y, z_{j-1}, t) = T_{j-1}(x, y, z_{j-1}, t),$$

$$-\kappa_j \frac{\partial T_j}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_{j-1},t)} = -\kappa_{j-1} \frac{\partial T_{j-1}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_{j-1},t)},$$

на правой границе $z = z_j$

$$T_j(x, y, z_j, t) = T_{j+1}(x, y, z_j, t),$$

$$-\kappa_j \frac{\partial T_j}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_j,t)} = -\kappa_{j+1} \frac{\partial T_{j+1}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_j,t)}.$$

Разложим функции $\rho_h(t)$ и $T_j(t)$ по Фурье:

$$\rho_h(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{h,\omega}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

$$T_j(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{j,\omega}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

где

$$\rho_{h,\omega}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_h(t) e^{i\omega t} dt,$$

$$T_{j,\omega}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_j(t) e^{i\omega t} dt.$$

Тогда уравнение (1) можно записать для каждой гармонике в виде

$$i\omega \rho_j c_j T_{j,\omega} + \kappa_j \Delta T_{j,\omega} = -\rho_{h,\omega}. \quad (2)$$

Причем, граничные условия для каждой гармонике будут иметь вид:

на левой границе $z = z_{j-1}$

$$T_{j,\omega}(x, y, z_{j-1}) = T_{j-1,\omega}(x, y, z_{j-1}),$$

$$-\kappa_j \frac{\partial T_{j,\omega}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_{j-1})} = -\kappa_{j-1} \frac{\partial T_{j-1,\omega}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_{j-1})},$$

на правой границе $z = z_j$

$$T_{j,\omega}(x, y, z_j) = T_{j+1,\omega}(x, y, z_j),$$

$$-\kappa_j \frac{\partial T_{j,\omega}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_j)} = -\kappa_{j+1} \frac{\partial T_{j+1,\omega}}{\partial z} \Big|_{(x,y,z_j)}.$$

Решая уравнение (2) в каждой области с учетом граничных условий, найдем поле температур во всех областях, а затем эволюцию поля температур во времени с помощью обратного временного преобразования Фурье.

Поле температуры в слое, свободном от источников тепла

Рассмотрим сначала следующую вспомогательную задачу. Пусть в области с номером j

нет источников тепла между границами z_{j-1} и z_j (см. рис. 2а).

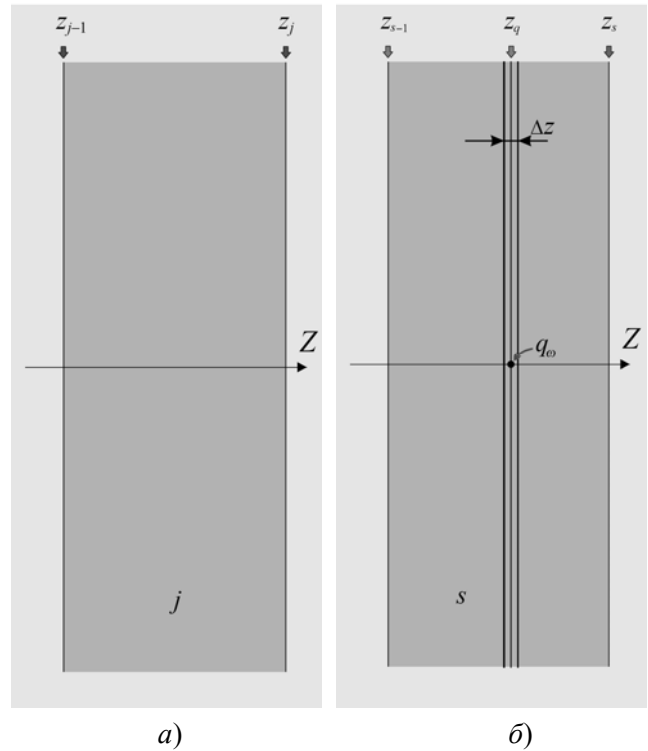


Рис. 2. а) – однородная пленка с номером j , расположенная между границами z_{j-1} и z_j ; б) – точечный гармонический источник тепла q_ω , расположенный в точке $(0, 0, z_d)$ в области с номером s . Геометрия задачи

Представим поле температур в гармонической задаче $T_{j,\omega}$ в виде Фурье разложения:

$$T_{j,\omega}(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta e^{i\xi x + i\eta y} \tilde{T}_{j,\omega}(\xi, \eta, z). \quad (3)$$

Тогда в рассматриваемой области уравнение (2) можно записать в виде:

$$\frac{d^2 \tilde{T}_{j,\omega}}{dz^2} - \gamma_j^2 \tilde{T}_{j,\omega} = 0, \quad (4)$$

где $\gamma_j = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - i\omega(\rho_j c_j / \kappa_j)}$.

Уравнение (4) при фиксированных значениях ξ и η есть обыкновенное дифференциальное уравнение относительно переменной z . Задача состоит в нахождении из уравнения (4) функции $\tilde{T}_{j,\omega}$ в рассматриваемой области.

Общее решение уравнения (4) в области $[z_{j-1}, z_j]$ запишем в виде

$$\tilde{T}_{j,\omega}(\xi, \eta, z) = \hat{T}_{j,\omega}^+ e^{-\gamma_j(z-z_{j-1})} + \hat{T}_{j,\omega}^- e^{\gamma_j(z-z_j)},$$

тогда

$$\begin{aligned} T_{j,\omega}(x, y, z) = & \\ = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}_{j,\omega}^+ e^{-\gamma_j(z-z_{j-1})} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + & \quad (5) \\ + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}_{j,\omega}^- e^{\gamma_j(z-z_j)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, & \end{aligned}$$

где $\hat{T}_{j,\omega}^+$ и $\hat{T}_{j,\omega}^-$ – функции только от ξ и η .

Отметим особо следующую принципиально важную идею: общее решение уравнения (4), состоящее из линейной комбинации решений (5), должно быть записано таким образом, чтобы существовали обратные преобразования Фурье. Поэтому форма записи общего решения для поля в слое (5) не случайна, она выделяет физически верное решение. Первое слагаемое справа в формуле (5) представляет собой поле от источников, находящихся слева от левой границы слоя $z = z_{j-1}$ (см. рис. 2a). При этом поле будет уменьшаться при удалении вправо (при удалении от источников слева от слоя). Второе слагаемое справа в формуле (5) представляет собой поле от источников, находящихся справа от правой границы слоя $z = z_j$ (внутри слоя источников нет по условию). Это поле будет уменьшаться при удалении влево (при удалении от источников справа от слоя).

Из (5) найдем фурье-образ температурного поля $\hat{T}_{j,\omega}$ и нормальной компоненты теплового потока $\tilde{\mathbf{h}}_{j,\omega} = -\kappa_j \nabla \tilde{T}_{j,\omega}$ в границах области j :

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_{j,\omega} \\ \tilde{\mathbf{h}}_{j,\omega,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_{j-1}} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_j d_{j-1}} \\ \kappa_j \gamma_j & -\kappa_j \gamma_j e^{-\gamma_j d_{j-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T}_{j,\omega}^+ \\ \hat{T}_{j,\omega}^- \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_{j,\omega} \\ \tilde{\mathbf{h}}_{j,\omega,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_j} = \begin{pmatrix} e^{-\gamma_j d_{j-1}} & 1 \\ \kappa_j \gamma_j e^{-\gamma_j d_{j-1}} & -\kappa_j \gamma_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T}_{j,\omega}^+ \\ \hat{T}_{j,\omega}^- \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$.

Вводя вектор-столбец температур $\hat{\tau}_j = (\hat{T}_{j,\omega}^+; \hat{T}_{j,\omega}^-)^T$, который однозначно по формуле (5) определяет гармоническое поле температур $T_{j,\omega}(x, y, z)$ и его фурье-образ $\tilde{T}_{j,\omega}(\xi, \eta, z)$ в области j , запишем выражения (6) и (7) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_{j,\omega} \\ \tilde{\mathbf{h}}_{j,\omega,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_{j-1}} = \mathbf{L}_j \times \hat{\tau}_j, \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_{j,\omega} \\ \tilde{\mathbf{h}}_{j,\omega,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_j} = \mathbf{R}_j \times \hat{\tau}_j, \quad (9)$$

где матрицы \mathbf{L}_j и \mathbf{R}_j имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_j = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_j d_{j-1}} \\ \kappa_j \gamma_j & -\kappa_j \gamma_j e^{-\gamma_j d_{j-1}} \end{pmatrix}, & \quad (10) \\ \mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} e^{-\gamma_j d_{j-1}} & 1 \\ \kappa_j \gamma_j e^{-\gamma_j d_{j-1}} & -\kappa_j \gamma_j \end{pmatrix}. & \end{aligned}$$

Поле температуры в многослойной структуре, свободной от источников тепла

Рассмотрим теперь многослойную структуру, внутри которой нет источников тепла. Рассмотрим границу $z = z_j$ между областями с номерами j и $j+1$. Непрерывность на границе температурных полей и нормальных компонент векторов плотности потока тепла ($h_{j,\omega,z} = -\kappa_j \partial T_{j,\omega} / \partial z$ и $h_{j+1,\omega,z} = -\kappa_{j+1} \partial T_{j+1,\omega} / \partial z$) на этой границе можно записать в виде:

$$\begin{aligned} T_{j,\omega} \Big|_{(x,y,z_j)} - T_{j+1,\omega} \Big|_{(x,y,z_j)} = 0, \\ \kappa_j \frac{\partial}{\partial z} T_{j,\omega} \Big|_{(x,y,z_j)} - \kappa_{j+1} \frac{\partial}{\partial z} T_{j+1,\omega} \Big|_{(x,y,z_j)} = 0, \end{aligned}$$

где поле температур $T_{j+1,\omega}$ в области $j+1$ выражается формулой (5), в которой произведена замена индексов $j \rightarrow j+1$. Так как рассматриваемые уравнения теплопроводности – линейные уравнения, то граничные условия должны выполняться для каждого члена фурье-разложения, то есть граничные условия

выполняются для фурье-образов соответствующих величин:

$$\tilde{T}_{j,\omega} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} - \tilde{T}_{j+1,\omega} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} = 0, \quad (11)$$

$$\tilde{h}_{j,\omega,z} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} - \tilde{h}_{j+1,\omega,z} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} = 0. \quad (12)$$

Записывая граничные условия (11) и (12) с помощью выражений (8) и (9), получим матричное уравнение на границе $z = z_j$:

$$\mathbf{R}_j \times \hat{\mathcal{T}}_j = \mathbf{L}_{j+1} \times \hat{\mathcal{T}}_{j+1}, \quad (13)$$

где $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$, $d_j = z_{j+1} - z_j$, а матрицы \mathbf{R}_j и \mathbf{L}_{j+1} выражаются формулами (10).

Уравнение (13) можно записать для $j = 2, \dots, (N-1)$, где $(N+1)$ – общее число областей, N – число границ, то есть для всех границ, исключая первую ($j=1$) и последнюю ($j=N$) границы. То есть, исключая границы $z_1 = 0$ и $z_N = d_{tot} = \sum_{m=1}^{N-1} d_m$, где d_{tot} – общая толщина слоистой структуры (сумма толщин пленок, составляющих рассматриваемую структуру).

Общее решение для поля температуры $T_{j,\omega}$ в области $j=1$, то есть в интервале $(-\infty, z_1]$, где $z_1 = 0$, запишем в виде

$$T_{1,\omega}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}_{1,\omega}^+ e^{-\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}_{1,\omega}^- e^{\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (14)$$

Тогда, учитывая, что из (14) следует

$$\left(\begin{array}{c} \tilde{T}_{1,\omega} \\ \tilde{h}_{1,\omega,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_1} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \hat{T}_{1,\omega}^+ \\ \hat{T}_{1,\omega}^- \end{array} \right),$$

запишем граничные условия на границе $z_1 = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{array} \right) \times \hat{\mathcal{T}}_1 = \mathbf{L}_2 \times \hat{\mathcal{T}}_2. \quad (15)$$

Аналогично, общее решение для поля температуры в области $j = N + 1$, то есть в интервале $[z_N, +\infty)$, запишем в виде

$$T_{N+1,\omega}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}_{N+1,\omega}^+ e^{-\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}_{N+1,\omega}^- e^{\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (16)$$

Тогда, учитывая, что из (16) следует

$$\left(\begin{array}{c} \tilde{T}_{N+1,\omega} \\ \tilde{h}_{N+1,\omega,z} \end{array} \right) \Big|_{z=z_N} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_{N+1} \gamma_{N+1} & -\kappa_{N+1} \gamma_{N+1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \hat{T}_{N+1,\omega}^+ \\ \hat{T}_{N+1,\omega}^- \end{array} \right),$$

запишем граничные условия на границе z_N в виде

$$\mathbf{R}_N \times \hat{\mathcal{T}}_N = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_{N+1} \gamma_{N+1} & -\kappa_{N+1} \gamma_{N+1} \end{array} \right) \times \hat{\mathcal{T}}_{N+1}. \quad (17)$$

Уравнения (13), (15) и (17) позволяют связать вектор-столбцы температур в первой и последней областях задачи (то есть в полупространствах, вне плоскостройной структуры):

$$\hat{\mathcal{T}}_1 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{array} \right)^{-1} \times \left[\mathbf{L}_2 \times (\mathbf{R}_2)^{-1} \right] \times \dots \times \left[\mathbf{L}_N \times (\mathbf{R}_N)^{-1} \right] \times \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_{N+1} \gamma_{N+1} & -\kappa_{N+1} \gamma_{N+1} \end{array} \right) \times \hat{\mathcal{T}}_{N+1},$$

или

$$\hat{\mathcal{T}}_1 = \mathbf{M} \times \hat{\mathcal{T}}_{N+1}, \quad (18)$$

где матрица \mathbf{M} имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathfrak{F}_1 \times \left(\prod_{m=2}^N \mathfrak{F}_m \right) \times \mathfrak{F}_{N+1},$$

где

$$\mathfrak{F}_1 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{array} \right)^{-1}, \quad \mathfrak{F}_m = \mathbf{L}_m \times (\mathbf{R}_m)^{-1}, \quad (19)$$

$$\mathfrak{F}_{N+1} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \kappa_{N+1} \gamma_{N+1} & -\kappa_{N+1} \gamma_{N+1} \end{array} \right).$$

Распределение температур в многослойной структуре от точечного гармонического источника тепла

Пусть имеется точечный источник тепла с мощностью тепловыделения $q(t)$ со спектральной мощностью тепловыделения $q_\omega(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{i\omega t} dt$, расположенный в точке $(0, 0, z_q)$ в области с номером s (см. рис. 2б).

Пусть гармоника частоты ω этого источника тепла определяется распределением пространственной плотности мощности тепловыделения

$$\rho_{h,\omega}(x, y, z) = q_\omega \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_q),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Тогда фурье-образ этого распределения определится следующим выражением

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{h,\omega}(\xi, \eta, z) &= \\ &= q_\omega \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_q) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy = \\ &= q_\omega \delta(z - z_q). \end{aligned}$$

Пусть этот точечный источник тепла находится в бесконечно тонком слое $(z_q - \Delta z/2, z_q + \Delta z/2)$. Тогда, для фурье-образов полей из (2), можно записать в пределе (при $\Delta z \rightarrow 0$) уравнения:

$$\begin{cases} \Delta \tilde{T}_{s,\omega} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} 0 \\ \Delta \tilde{h}_{s,\omega,z} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} q_\omega. \end{cases}$$

В матричном виде эти предельные уравнения можно записать в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_{s,\omega} \\ \tilde{h}_{s,\omega,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_q+0} - \begin{pmatrix} \tilde{T}_{s,\omega} \\ \tilde{h}_{s,\omega,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_q-0} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_\omega \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Выразим теперь левую часть граничного условия (20) через вектор-столбцы \hat{T}_l и \hat{T}_{N+1} полупространств, снаружи плоскостройной структуры. Для этого разобьем область с номером s на две области и обозначим их индексами l и r (левая и правая, если смотреть

на рис. 2б). Введем вектор-столбцы \hat{T}_l и \hat{T}_r в этих областях. Тогда члены слева от знака равенства в (20) можно выразить как

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}_{s,\omega} \\ \tilde{h}_{s,\omega,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_q-0} = \mathbf{R}_l \times \hat{T}_l, \quad \begin{pmatrix} \tilde{T}_{s,\omega} \\ \tilde{h}_{s,\omega,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_q+0} = \mathbf{L}_r \times \hat{T}_r. \quad (21)$$

Кроме того, используя (13), можно записать

$$\hat{T}_l = \mathbf{Q}_L \times \hat{T}_r, \quad \hat{T}_r = \mathbf{Q}_R \times \hat{T}_{N+1}, \quad (22)$$

где матрицы \mathbf{Q}_L и \mathbf{Q}_R представляются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_L &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{pmatrix}^{-1} \times [\mathbf{L}_2 \times (\mathbf{R}_2)^{-1}] \times \dots \times \\ &\times [\mathbf{L}_{s-1} \times (\mathbf{R}_{s-1})^{-1}] \times \mathbf{L}_l, \\ \mathbf{Q}_R &= (\mathbf{R}_r)^{-1} \times [\mathbf{L}_{s+1} \times (\mathbf{R}_{s+1})^{-1}] \times \dots \times \\ &\times [\mathbf{L}_N \times (\mathbf{R}_N)^{-1}] \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_{N+1} \gamma_{N+1} & -\kappa_{N+1} \gamma_{N+1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_l &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_s(z_d - z_{s-1})} \\ \kappa_s \gamma_s & -\kappa_s \gamma_s e^{-\gamma_s(z_d - z_{s-1})} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_r &= \begin{pmatrix} e^{-\gamma_s(z_s - z_d)} & 1 \\ \kappa_s \gamma_s e^{-\gamma_s(z_s - z_d)} & -\kappa_s \gamma_s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставляя (22) в (21), и затем полученные выражения в (20), получаем:

$$\mathbf{H}_R \times \hat{T}_{N+1} = \mathbf{H}_L \times \hat{T}_l + \mathbf{V}, \quad (23)$$

где $\mathbf{V} = (0, q_\omega)^T$ – вектор-столбец, характеризующий возбуждающее воздействие на плоскостройную систему точечного источника тепла, а матрицы \mathbf{H}_R и \mathbf{H}_L – характеризуют отклик на внешнее возбуждение слоистой структуры справа и слева от источника тепла и выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_R &= \mathfrak{T}_R \times \left(\prod_{m=s+1}^N \mathfrak{T}_m \right) \times \mathfrak{T}_{N+1}, \\ \mathbf{H}_L &= \left(\mathfrak{T}_1 \times \left(\prod_{m=2}^{s-1} \mathfrak{T}_m \right) \times \mathfrak{T}_L \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

где матрицы \mathfrak{T}_m при $m \neq s$ выражаются формулой $\mathfrak{T}_m = \mathbf{L}_m \times (\mathbf{R}_m)^{-1}$, а матрицы \mathfrak{T}_L и \mathfrak{T}_R – формулами $\mathfrak{T}_L = \mathbf{L}_l \times (\mathbf{R}_l)^{-1}$, $\mathfrak{T}_R = \mathbf{L}_r \times (\mathbf{R}_r)^{-1}$.

Произведение матриц в скобках выражений (24) имеет простой смысл: произведение $\left(\prod_{m=2}^{s-1} \mathfrak{T}_m\right) \times \mathfrak{T}_L$ – есть последовательное (вдоль оси Z) произведение матриц пленок плоскостной структуры слева от точечного гармонического источника тепла, включая матрицу соответствующей одной из двух пленок слоя с номером s . А произведение $\mathfrak{T}_R \times \left(\prod_{m=s+1}^N \mathfrak{T}_m\right)$ – есть последовательное (вдоль оси Z) произведение матриц пленок плоскостной структуры справа от точечного гармонического источника тепла, включая матрицу соответствующей второй из двух пленок слоя с номером s .

Далее, в рассматриваемой задаче точечный источник тепла находится исключительно внутри плоскостной структуры. Поэтому в столбцах $\hat{\tau}_1$ и $\hat{\tau}_{N+1}$ есть только компоненты волн, идущие от плоскостной структуры. Поэтому эти столбцы имеют вид

$$\hat{\tau}_1 = (0; \hat{T}_{1,\omega}^-)^T, \quad \hat{\tau}_{N+1} = (\hat{T}_{N+1,\omega}^+; 0)^T.$$

Чтобы получить отличные от нуля компоненты $\hat{\tau}_1$ и $\hat{\tau}_{N+1}$ разобьем матрицы на \mathbf{H}_R и \mathbf{H}_L каждую на элементы $H_{RA}, H_{RB}, H_{RC}, H_{RD}$ и $H_{LA}, H_{LB}, H_{LC}, H_{LD}$ следующим образом:

$$\mathbf{H}_R = \begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{H}_L = \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix},$$

тогда уравнение (23) примет вид

$$\begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{T}_{N+1,\omega}^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{T}_{1,\omega}^- \end{pmatrix} + \mathbf{V}. \quad (25)$$

Если еще учесть, что $\mathbf{V} = (0, q_\omega)^T$, то уравнение (25) можно представить следующей системой из двух уравнений

$$\begin{aligned} H_{RA} \hat{T}_{N+1,\omega}^+ &= H_{LB} \hat{T}_{1,\omega}^-, \\ H_{RC} \hat{T}_{N+1,\omega}^+ &= H_{LD} \hat{T}_{1,\omega}^- + q_\omega. \end{aligned}$$

Полученные уравнения можно снова объединить в одно матричное 2×2 уравнение:

$$\begin{pmatrix} -H_{LB} & H_{RA} \\ -H_{LD} & H_{RC} \end{pmatrix} \hat{\tau}_{out} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_\omega \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где введен вектор-столбец $\hat{\tau}_{out} = (\hat{T}_{1,\omega}^-; \hat{T}_{N+1,\omega}^+)^T$.

Решая это уравнение, найдем $\hat{T}_{1,\omega}^-$ и $\hat{T}_{N+1,\omega}^+$, а значит, убывающие при удалении от плоскостной структуры температурные поля:

$$\hat{T}_{1,\omega}^- = \frac{q_\omega H_{RA}}{H_{RC} H_{LB} - H_{RA} H_{LD}}, \quad (27)$$

$$\hat{T}_{N+1,\omega}^+ = \frac{q_\omega H_{LB}}{H_{RC} H_{LB} - H_{RA} H_{LD}}. \quad (28)$$

Убывающее влево поле (в направлении $z \rightarrow -\infty$) находим по формуле

$$T_{1,\omega}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}_{1,\omega}^- e^{\gamma_1 z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (29)$$

и убывающее вправо поле (в направлении $z \rightarrow +\infty$) – по формуле

$$\begin{aligned} T_{N+1,\omega}(x, y, z) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{T}_{N+1,\omega}^+ e^{-\gamma_{N+1}(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (30)$$

Наконец, при необходимости, зная $\hat{\tau}_1$ и $\hat{\tau}_{N+1}$, можно найти последовательно вектор-столбцы температур в любой внутренней области $\hat{\tau}_j$, так как они однозначно определяются граничными условиями. После этого, гармоническое поле температур в любой из этих областей может быть найдено по формуле (5).

Таким образом, гармоническое поле температур будет определено во всем пространстве.

Внимательное рассмотрение решения задачи нестационарной теплопроводности для гармонического точечного заряда делает очевидным математическую аналогию гармонического решения для фиксированной частоты ω и соответствующей задачи электростатики.

Действительно, сравним выражения для матриц слоев соответствующих задач (таблица).

Из сравнения видно, что с точностью до переобозначений аналогичных величин все выражения совпадают, за исключением замены $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ на комплексную функцию $\gamma_j = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - i\omega(\rho_j c_j / \kappa_j)}$.

Таблица

Электростатика	Теплопроводность
$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \epsilon_1 & -\gamma \epsilon_1 \end{pmatrix}^{-1}, \gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$	$\mathfrak{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_1 \gamma_1 & -\kappa_1 \gamma_1 \end{pmatrix}^{-1}, \gamma_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - i\omega(\rho_1 c_1 / \kappa_1)}$
$\mathbf{T}_j = \mathbf{L}_j \times (\mathbf{R}_j)^{-1}$	$\mathfrak{T}_j = \mathbf{L}_j \times (\mathbf{R}_j)^{-1}$
$\mathbf{L}_j = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_{j-1}} \\ \gamma \epsilon_j & -\gamma \epsilon_j e^{-\gamma d_{j-1}} \end{pmatrix},$ $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$	$\mathbf{L}_j = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_j d_{j-1}} \\ \kappa_j \gamma_j & -\kappa_j \gamma_j e^{-\gamma_j d_{j-1}} \end{pmatrix},$ $\gamma_j = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - i\omega(\rho_j c_j / \kappa_j)}$
$\mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_{j-1}} & 1 \\ \gamma \epsilon_j e^{-\gamma d_{j-1}} & -\gamma \epsilon_j \end{pmatrix},$ $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$	$\mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} e^{-\gamma_j d_{j-1}} & 1 \\ \kappa_j \gamma_j e^{-\gamma_j d_{j-1}} & -\kappa_j \gamma_j \end{pmatrix},$ $\gamma_j = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - i\omega(\rho_j c_j / \kappa_j)}$
$\mathbf{T}_{N+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma \epsilon_{N+1} & -\gamma \epsilon_{N+1} \end{pmatrix},$ $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$	$\mathfrak{T}_{N+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \kappa_{N+1} \gamma_{N+1} & -\kappa_{N+1} \gamma_{N+1} \end{pmatrix}, \gamma_{N+1} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - i\omega(\rho_{N+1} c_{N+1} / \kappa_{N+1})}$
потенциал φ_j	температура $(T_{j,\omega} - T_0)$, где T_0 – температура на ∞
диэлектрическая проницаемость ϵ_j	коэффициент теплопроводности κ_j
электрическая индукция $\mathbf{D}_j = \epsilon_j \mathbf{E}_j = -\epsilon_j \nabla \varphi_j$	плотность потока тепла $\mathbf{h}_{j,\omega} = -\kappa_j \nabla T_{j,\omega}$
заряд q	мощность тепловыделения гармонического источника тепла q_ω

Гармоническое температурное поле точечного гармонического источника тепла в градиентной плоскостройной структуре.

Обобщенный метод отражений для гармонических источников в задачах теплопроводности плоскостройных сред

Опираясь на выявленную аналогию, рассмотрим задачу нахождения гармонического поля температур от точечного гармонического источника тепла q_ω , расположенного в полупространстве с коэффициентом теплопровод-

ности κ_f (см. рис. 3). Источник находится на некотором расстоянии от пленки с произвольной зависимостью коэффициента теплопроводности $\kappa_p(z)$. Можно представить такую градиентную структуру достаточно большим (но конечным) количеством пленок $m = 1, 2, \dots, N_p$ с коэффициентами теплопроводности $\kappa_{p,m}$ и толщинами h_m , нанесенных на полупространство с коэффициентом теплопроводности κ_d (см. рис. 3).

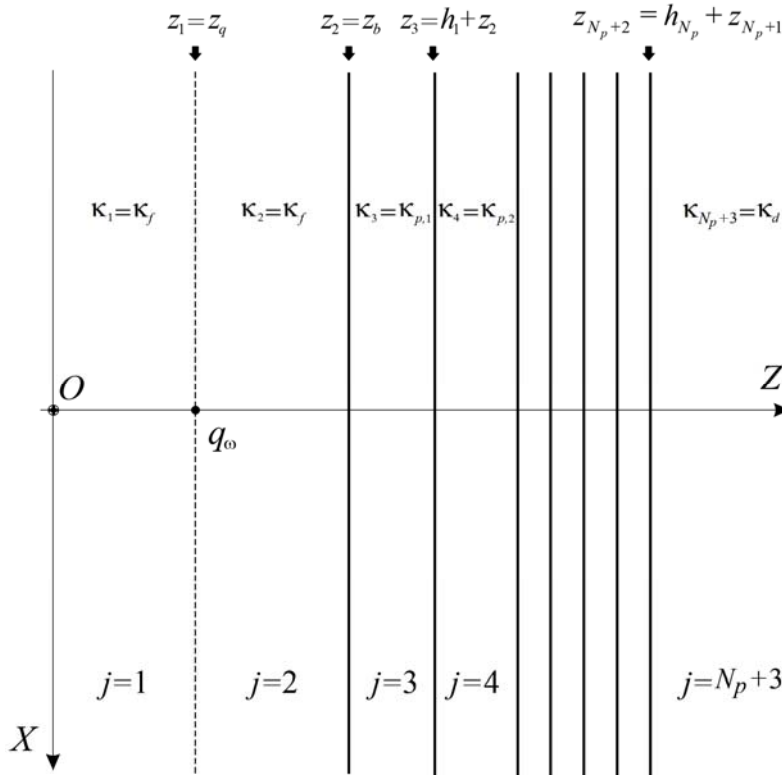


Рис. 3. Точечный гармонический источник тепла q_ω , расположенный в пространстве с коэффициентом теплопроводности κ_f в точке с координатой z_q на расстоянии $(z_b - z_q)$ от системы пленок с толщинами h_m и коэффициентами теплопроводности $\kappa_{p,m}$, расположенных на границе полупространства с коэффициентом теплопроводности κ_d

В системе координат (см. рис. 3) источника тепла находится в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}_q = (0; 0; z_q)$, на расстоянии $d = (z_b - z_q)$ вдоль оси Z от первой пленки. Эту задачу можно рассмотреть как задачу нахождения гармонического температурного поля от точечного источника тепла, расположенного на поверхности вспомогательной пленки толщины $d = (z_b - z_q)$, причем коэффициент теплопроводности этой вспомогательной пленки и полупространства слева равны κ_f . В такой постановке задачи можно выделить следующие пронумерованные области:

а) полупространство с номером $j = 1$ и коэффициентом теплопроводности κ_f слева от источника;

б) вспомогательная пленка с номером $j = 2$, коэффициентом теплопроводности $\kappa_2 = \kappa_f$ и толщиной d ;

в) пленки с номерами $j = m + 2$, где $m = 1, 2, \dots, N_p$, коэффициентами теплопроводности $\kappa_j = \kappa_{p,m}$ и толщинами h_m , которые приближенно заменяют исходную пленку с непрерывно меняющимся коэффициентом теплопроводности;

г) полупространство с номером $j = N_p + 3$ (справа от плоскостлой структуры) и коэффициентом теплопроводности $\kappa_{N_p+3} = \kappa_d$ (см. рис. 3).

В рассматриваемой задаче $N = N_p + 2$, $z_1 = z_q$, $z_2 = z_b$, $z_3 = h_1 + z_2$, $z_4 = h_2 + z_3$, ..., $z_{N_p+2} = h_{N_p} + z_{N_p+1}$. Общую толщину всех пленок градиентной плоскостлой структуры обозначим как $h_{tot} = \sum_{m=1}^{N_p} h_m$. Тогда,

$\mathbf{H}_R = \mathfrak{I}_2 \times \prod_{m=1}^{N_p} \mathbf{P}_m \times \mathfrak{I}_{N_p+3}$, $\mathbf{H}_L = (\mathfrak{I}_1)^{-1}$ и уравнение (23) примет вид

$$\left(\mathfrak{I}_2 \times \prod_{m=1}^{N_p} \mathbf{P}_m \times \mathfrak{I}_{N_p+3} \right) \times \hat{\tau}_{N_p+3} = (\mathfrak{I}_1)^{-1} \times \hat{\tau}_1 + \mathbf{V}, \quad (31)$$

где матрицы выражаются следующими формулами

$$\mathfrak{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma_f \kappa_f & -\gamma_f \kappa_f \end{pmatrix}^{-1}, \quad \mathfrak{I}_{N_p+3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \gamma_d \kappa_d & -\gamma_d \kappa_d \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V} = (0; q_\omega)^T,$$

$$\mathfrak{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_f d} \\ \gamma_f \kappa_f & -\gamma_f \kappa_f e^{-\gamma_f d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma_f d} & 1 \\ \gamma_f \kappa_f e^{-\gamma_f d} & -\gamma_f \kappa_f \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} ch(\gamma_f d) & sh(\gamma_f d)/\gamma_f \kappa_f \\ \gamma_f \kappa_f sh(\gamma_f d) & ch(\gamma_f d) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_m = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma_{p,m} h_m} \\ \gamma_{p,m} \kappa_{p,m} & -\gamma_{p,m} \kappa_{p,m} e^{-\gamma_{p,m} h_m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{-\gamma_{p,m} h_m} & 1 \\ \gamma_{p,m} \kappa_{p,m} e^{-\gamma_{p,m} h_m} & -\gamma_{p,m} \kappa_{p,m} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} ch(\gamma_{p,m} h_m) & sh(\gamma_{p,m} h_m)/\gamma_{p,m} \kappa_{p,m} \\ \gamma_{p,m} \kappa_{p,m} sh(\gamma_{p,m} h_m) & ch(\gamma_{p,m} h_m) \end{pmatrix}.$$

Введем матрицу \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} = \prod_{m=1}^{N_p} \mathbf{P}_m \times \mathfrak{T}_{N_p+3}.$$

где составляющие \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} и \mathfrak{D} являются функциями γ_d , а также функций γ_m и параметров всех пленок $\kappa_{p,m}$, h_m ($m=1, 2, \dots, N_p$) и коэффициента теплопроводности полупространства за пленками κ_d . Учитывая, что

$$\mathbf{H}_R = \begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} = \mathfrak{T}_2 \times \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(\gamma_f d) & sh(\gamma_f d)/\gamma_f \kappa_f \\ \gamma_f \kappa_f sh(\gamma_f d) & ch(\gamma_f d) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix},$$

находим $H_{RA} = \mathfrak{A} ch(\gamma_f d) + \mathfrak{C} sh(\gamma_f d)/\gamma_f \kappa_f$ и $H_{RC} = \mathfrak{A} \gamma_f \kappa_f sh(\gamma_f d) - \mathfrak{C} ch(\gamma_f d)$.

Уравнение (31) для рассматриваемой задачи примет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & H_{RA} \\ \gamma_f \kappa_f & H_{RC} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{T}_{1,\omega}^- \\ \hat{T}_{N_p+3,\omega}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q_\omega \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Из (32), после несложных преобразований, получим

$$\hat{T}_{1,\omega}^- = \frac{q_\omega H_{RA}}{H_{RC} + \gamma_f \kappa_f H_{RA}} = \frac{q_\omega}{2\gamma_f \kappa_f} + \frac{q_\omega}{2\gamma_f \kappa_f} \left(\frac{\gamma_f \kappa_f \mathfrak{A} - \mathfrak{C}}{\gamma_f \kappa_f \mathfrak{A} + \mathfrak{C}} \right) e^{-2\gamma_f d}, \quad (33)$$

$$\hat{T}_{N_p+3,\omega}^+ = \frac{q_\omega}{H_{RC} + \gamma_f \kappa_f H_{RA}} = \frac{q_\omega}{\gamma_f \kappa_f \mathfrak{A} + \mathfrak{C}} e^{-\gamma_f d}. \quad (34)$$

Найдем температурное поле $T_{1,\omega}(x, y, z)$ в полупространстве ($j=1$) при $z \leq z_{q\omega}$ и температурное поле $T_{N_p+3,\omega}(x, y, z)$ в полупространстве за плоскостойкой структурой при $z \geq z_{N_p+2}$.

Выражение (33) для $\hat{T}_{1,\omega}^-$ перепишем в виде

$$\hat{T}_{1,\omega}^- = \frac{q_\omega}{2\gamma_f \kappa_f} + \frac{q_\omega}{2\gamma_f \kappa_f} e^{-2\gamma_f(z_b - z_q)} \mathfrak{R}(\lambda), \quad (35)$$

где в функции $\mathfrak{R}(\lambda)$ все остальные параметры (кроме $\lambda = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$) задачи считаются фиксированными. Функция $\mathfrak{R}(\lambda)$ выражается формулой

$$\mathfrak{R}(\lambda) = \frac{\gamma_f \kappa_f \mathfrak{A} - \mathfrak{C}}{\gamma_f \kappa_f \mathfrak{A} + \mathfrak{C}}. \quad (36)$$

Можно показать, что функцию $\mathfrak{R}(\lambda)$ всегда можно представить в виде

$$\mathfrak{R}(\lambda) = \frac{\kappa_f - \kappa_{p,1}}{\kappa_f + \kappa_{p,1}} + \chi(\lambda), \quad (37)$$

где $\chi(\lambda)$ – экспоненциально спадающая функция $\lambda = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Зная выражение (35) для $\hat{T}_{1,\omega}^-$, можно вычислить $T_{1,\omega}(x, y, z)$ по формуле (29). Аналогично, зная $\hat{T}_{N_p+3,\omega}^+$ можно вычислить $T_{N_p+3,\omega}(x, y, z)$ по формуле (30), где $N = N_p + 2$.

Развитие и обобщение метода отражений

Можно найти другую форму записи для поля температур $T_{1,\omega}(x, y, z)$ точечного гармонического источника тепла q_ω в точке $\mathbf{r}_q = (0; 0; z_q)$, расположенного рядом с градиентной плоскостростой структурой.

Введем сначала функцию

$$\mathbb{U}_\omega(x, y, z) = \frac{q_\omega}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma_f |z|}}{2\kappa_f \gamma_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (38)$$

которая определяет поля температуры точечного источника тепла q_ω , расположенного в начале координат в *однородном* пространстве с коэффициентом теплопроводности κ_f . Можно строго показать [24], что функция $\mathbb{U}_\omega(x, y, z)$ имеет вид

$$\mathbb{U}_\omega(x, y, z) = q_\omega F\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right), \quad (39)$$

где

$$F\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = \frac{\exp\left(\left((i-1)/\sqrt{2}\right)\sqrt{\omega(\rho_f c_f / \kappa_f)}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{4\pi\kappa_f\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

При $\omega \rightarrow 0$ экспонента стремится к единице и $\mathbb{U}(x, y, z)$ стремится к стационарному решению для точечного источника. Знак в показателе экспоненты зависит от определения вида временного преобразования Фурье. В нашем случае, обратное преобразование выбрано в виде $f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$. При таком выборе знака и обратного преобразования, модуль функции (39) экспоненциально убывает при удалении от источника, в соответствии с физической природой решения.

Один пример. Возьмем гармонический точечный источник тепла в начале координат, расположенный в начале координат, мощность тепловыделения которого определяется как $Q_h = q_h e^{i\omega_0 t}$, где q_h – постоянная амплитуда, ω_0 – циклическая частота. Тогда Фурье-образ источника равен: $q_\omega(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_h e^{i\omega t} dt = q_h \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega+\omega_0)t} dt = 2\pi q_h \delta(\omega + \omega_0)$. Тогда поле температур источника будет определяться формулой

$$T(x, y, z, t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) 2\pi q_h \delta(\omega + \omega_0) e^{-i\omega t} d\omega = q_h e^{i\omega_0 t} \frac{\exp\left(-\sqrt{\omega_0(\rho_f c_f / 2\kappa_f)}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) \exp\left(-i\sqrt{\omega_0(\rho_f c_f / 2\kappa_f)}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{4\pi\kappa_f\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

То есть, при удалении от источника амплитуда колебаний температуры убывает по экспоненциально-степенному закону, а фазовый сдвиг колебаний увеличивается относительно фазы источника. В малой окрестности источника колебания температуры происходят в фазе с ним, амплитуда колебаний происходит по известному степенному закону.

Рассмотрим точечный гармонический источник тепла q_ω в точке $\mathbf{r}_q = (0; 0; z_q)$, расположенного рядом с градиентной плоскостростой структурой.

Введем функцию обратного преобразования Фурье $\mathfrak{h}(u, v)$ функции $\chi(\lambda)$ по переменным ξ и η :

$$\begin{aligned} h(u, v) &= \\ &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right) e^{i(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда, применяя теорему о свертке, получим из (29), (35) и (37)

$$\begin{aligned} T_{1,\omega}(x, y, z) &= \mathbb{U}_{\omega}(x, y, z - z_q) + \\ &+ \left(\frac{\kappa_f - \kappa_{p,1}}{\kappa_f + \kappa_{p,1}} \right) \mathbb{U}_{\omega}(x, y, z - z_{ref}) + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, v) \mathbb{U}_{\omega}(x - u, y - v, z - z_{ref}) dudv, \end{aligned} \quad (41)$$

где $z_{ref} = 2z_b - z_q$ есть координата зеркального отражения точки z_q относительно плоскости $z = z_b$ (левой границы градиентной плоскострой структуры).

При численном нахождении $T_{1,\omega}(x, y, z)$ по формуле (41) можно устранить четырехкратное интегрирование в последнем члене следующим образом.

Сначала нужно привести двойное интегрирование в (40) к однократному интегрированию с помощью перехода к полярным координатам в плоскостях (u, v) и (ξ, η) по формулам $u = \mathbb{R} \cos \psi$, $v = \mathbb{R} \sin \psi$ и $\xi = \lambda \cos \theta$, $\eta = \lambda \sin \theta$. Используя тождество

$$\int_0^{2\pi} e^{i\lambda \mathbb{R} \cos(\psi - \theta)} d\theta = 2\pi J_0(\lambda \mathbb{R}),$$

можно перейти от двойного интегрирования к однократному

$$\begin{aligned} h(\mathbb{R}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \chi(\lambda) e^{i\lambda \mathbb{R} \cos(\psi - \theta)} d\theta d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0(\lambda \mathbb{R}) \chi(\lambda) \lambda d\lambda, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} h(u, v) &= h\left(\sqrt{u^2 + v^2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} J_0\left(\lambda \sqrt{u^2 + v^2}\right) \chi(\lambda) \lambda d\lambda. \end{aligned} \quad (42)$$

Функция $h(\mathbb{R})$ является плавной быстро убывающей функцией, ее можно приблизить сплайнами и, при численном интегрировании в (41), можно использовать эту функцию в виде сплайн-аппроксимации.

Формулу (41) легко обобщить на случай точечного источника тепла q_{ω} , расположенного в произвольной точке $\mathbf{r}_q = (x_q; y_q; z_q)$. Полное температурное поле $T_{1,\omega} = T_{2,\omega}$ в полупространстве $j=1$ и области $j=2$ (легко показать, что выражения для $T_{1,\omega}(x, y, z)$ и $T_{2,\omega}(x, y, z)$ одинаковы) можно записать в виде

$$\begin{aligned} T_{1,\omega}(x, y, z) &= \mathbb{U}_{\omega}(x - x_q, y - y_q, z - z_q) + \\ &+ \left(\frac{\kappa_f - \kappa_{p,1}}{\kappa_f + \kappa_{p,1}} \right) \mathbb{U}_{\omega}(x - x_q, y - y_q, z - z_{ref}) + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, v) \mathbb{U}_{\omega}(x - x_q - u, y - y_q - v, z - z_{ref}) dudv, \end{aligned} \quad (43)$$

причем, универсальная функция $h(u, v)$ не зависит от величины и положения гармонического точечного источника тепла q_{ω} , а зависит от коэффициентов теплопроводности всех областей задачи и толщин всех пленок.

Полученная формула дает обобщение метода отражений в задачах гармонической теплопроводности на случай, когда гармонический точечный источник тепла q_{ω} расположен в полупространстве рядом с плоскострой градиентной структурой, расположенной на границе другого полупространства. Выражение (43) имеет простой физический смысл. Первый член в (43) – это поле температур исходного точечного гармонического источника тепла q_{ω} (источника поля), второй член – это поле температур виртуального точечного гармонического источника тепла величины $q_{\omega} (\kappa_f - \kappa_{p,1}) / (\kappa_f + \kappa_{p,1})$, расположенного зеркально относительно ближайшей границы плоскострой градиентной структуры $z = z_b$, а третий член – это поле температур от точечных гармонических виртуальных источников тепла, распределенных по плоскости $z = z_{ref}$ с плотностью $q_{\omega} h$ по области размером порядка толщины плоскострой гра-

диентной структуры. Последний член (43) весьма быстро убывает с ростом толщины плоскостойкой структуры.

Обобщение метода отражений на случай системы точечных гармонических источников

Обобщим теперь полученный метод зеркальных отражений на потенциал полного температурного гармонического поля

$$\mathbb{T}_s(x, y, z) = \sum_{k=1}^{N_q} q_{\omega,k} F\left(\sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z-z_{q,k})^2}\right). \tag{44}$$

Суммируя (43) для каждого заряда $q_{\omega,k}$ по всем N_q источникам системы и замечая, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N_q} q_{\omega,k} F\left(\sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z-(2z_b-z_{q,k}))^2}\right) = \\ & = \sum_{k=1}^{N_q} q_{\omega,k} F\left(\sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + ((2z_b-z)-z_{q,k})^2}\right) = \mathbb{T}_s(x, y, 2z_b-z), \end{aligned}$$

получим обобщение метода отражений для задач теплопроводности для произвольных распределений источников тепла в полупространстве перед плоскостойкой структурой в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{tot}(x, y, z) &= \mathbb{T}_s(x, y, z) + \\ &+ \frac{(\kappa_f - \kappa_{p,1})}{(\kappa_f + \kappa_{p,1})} \mathbb{T}_s(x, y, 2z_b - z) + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, v) \mathbb{T}_s(x-u, y-v, 2z_b - z) dudv. \end{aligned} \tag{45}$$

В случае гармонических источников, для поля за пленкой не удастся вывести формулу, аналогичную электростатической задаче и задаче стационарной теплопроводности. Однако, в области $z > z_b$ поле температур может быть найдено следующим универсальным методом.

Вычислив из (45) поле температур на границе $z = z_b$, то есть $\mathbb{T}_2|_{z=z_b} = \mathbb{T}_{tot}|_{z=z_b}$, можно найти на границе распределение полного потока тепла $\mathbb{H}_{2,z}|_{z=z_b} = -\kappa_f \partial \mathbb{T}_{tot} / \partial z|_{z=z_b}$ и далее, найти фурье-образы этих величин на этой границе, то есть найти вектор:

$\mathbb{T}_{tot}(x, y, z)$ в области $z \leq z_b$ перед плоскостойкой структурой, произвольной компактной системы N_q точечных источников тепла $q_{\omega,k}$, расположенных в точках с радиус-векторами $\mathbf{r}_{q,k} = (x_{q,k}; y_{q,k}; z_{q,k})$, где $k = 1, 2, \dots, N_q$.

Если бы не было плоскостойкой структуры, то потенциал этой системы зарядов-источников представлялся бы формулой

$$\left(\begin{array}{c} \tilde{\mathbb{T}} \\ \tilde{\mathbb{H}}_z \end{array} \right) \Big|_{z=z_b} = \left(\begin{array}{c} \tilde{\mathbb{T}}_2 \\ -\kappa_f \partial \tilde{\mathbb{T}}_2 / \partial z \end{array} \right) \Big|_{z=z_b}.$$

Тогда, если требуется найти распределение температуры внутри плоскостойкой структуры в некотором сечении или в полупространстве за структурой при $z = \zeta$, в общем случае можно поступить следующим образом. Необходимо разбить плоскостойкую структуру в интервале $z_b \leq z \leq \zeta$ на достаточное число тонких пленок, настолько тонких, чтобы в пределах пленки можно считать коэффициент теплопроводности постоянной величиной (это разбиение можно сделать в любой градиентной и плоскостойкой структуре). Тогда, распределение $\tilde{\mathbb{T}}(\xi, \eta, \zeta)$ фурье-образа потенциала при $z = \zeta$ можно найти, из уравнения

$$\left(\begin{array}{c} \tilde{\mathbb{T}} \\ \tilde{\mathbb{H}}_z \end{array} \right) \Big|_{z=z_b} = \prod \mathfrak{T}_m \times \left(\begin{array}{c} \tilde{\mathbb{T}} \\ \tilde{\mathbb{H}}_z \end{array} \right) \Big|_{z=\zeta},$$

где $\prod \mathfrak{T}_m$ – последовательное произведение матриц \mathfrak{T}_m всех тонких пленок разбиения ин-

тервала $z_b \leq z \leq \zeta$. Тогда, распределение температуры $\mathbb{T}(x, y, \zeta)$ в рассматриваемом сечении $z = \zeta$ определится обратным фурье-преобразованием

$$\mathbb{T}(x, y, \zeta) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x + i\eta y} \tilde{\mathbb{T}}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta. \quad (46)$$

Таким образом, зная распределение источников тепла или их температурное поле \mathbb{T}_s в свободном пространстве, можно определить температурное поле этих источников в полупространствах и внутри произвольной градиентной плоскостройной структуры.

Распределение температуры от гармонического источника тепла, идущего от тела, расположенного вблизи плоскостройной структуры

Рассмотрим тело, у которого температура однородна на поверхности, но меняется во времени. Пусть это тело имеет (для простоты) осевую симметрию относительно оси Z , ко-

торая нормальна к плоскостройной структуре (см. рис. 4). Поверхность тела определим параметрическими функциями $R = R(s)$ и $z = z(s)$, где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние до оси Z точки поверхности тела с координатами (x, y, z) , s – длина дуги образующей, отсчитываемой от точки тела, ближайшей к плоскостройной структуре. Полную длину дуги образующей поверхности тела обозначим S_{\max} .

Введем также вспомогательную осесимметричную поверхность, расположенную внутри тела, на малом расстоянии от поверхности тела. Зададим эту поверхность также параметрически функциями $r_a = r_a(s_a)$ и $z_a = z_a(s_a)$, где $r_a = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$ – расстояние до оси Z точки вспомогательной поверхности с координатами (x_a, y_a, z_a) , s_a – длина дуги образующей вспомогательной поверхности, отсчитываемой от ее точки, ближайшей к плоскостройной структуре. Полную длину образующей вспомогательной поверхности обозначим S'_{\max} (см. рис. 4).

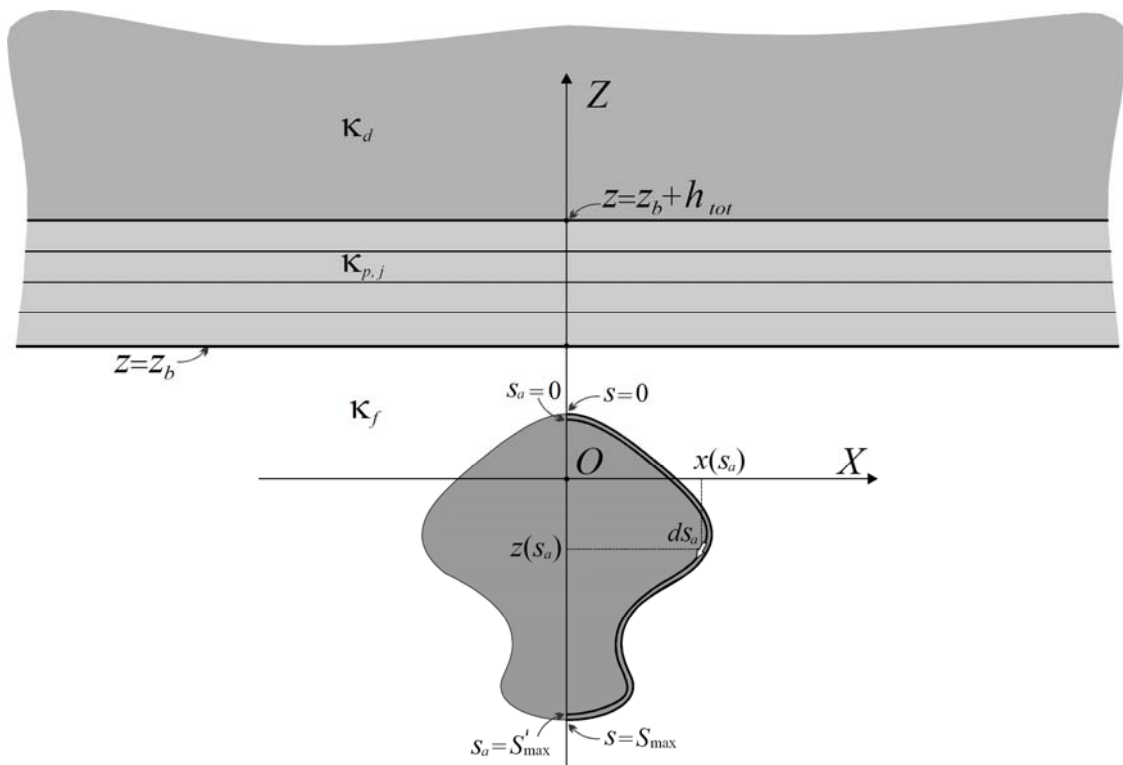


Рис. 4. Осесимметричное тело у плоскостройной структуры, расположенной на границе полупространства. Геометрия задачи

Температурное поле снаружи тела будем аппроксимировать полем гармонического источника тепла, который с некоторой плотностью распределен по поверхности вспомогательного тела. Пусть $\sigma_\omega(s_a)$ – поверхностная плотность фурье-образа мощности тепловыделения (поверхностная плотность гармонического источника тепла) по вспомогательной поверхности. В силу осевой симметрии задачи σ_ω есть функция только одного параметра s_a .

Рассмотрим кольцо толщины ds_a и радиусом $r_a(s_a)$ на поверхности вспомогательного тела. В силу осевой симметрии задачи, распределение источника тепла равномерно по поверхности кольца. Тогда временной Фурье-образ полной мощности тепловыделения кольца dQ_ω равен $dQ_\omega = 2\pi r(s_a)\sigma_\omega(s_a)ds_a$. Погонную плотность гармонического тепловыделения кольца обозначим как $d\lambda_\omega = dQ_\omega/2\pi r(s_a)$. Найдем температурное

поле этого кольца. В силу линейности уравнений задачи справедлив принцип суперпозиции, которым мы и воспользуемся, используя также аналогию с подобной электростатической задачей [25].

Запишем температурное поле точечного гармонического источника тепла (39) в виде

$$\mathbb{U}_\omega(x, y, z) = \frac{q_\omega}{4\pi\kappa_f} \frac{\exp\left(\beta\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

где $\beta = ((i-1)/\sqrt{2})\sqrt{\omega(\rho_f c_f/\kappa_f)}$ – величина, имеющая размерность обратной длины.

Пусть центр кольца находится в начале координат, плоскость кольца – плоскость XU . Тогда, Фурье-образ температурного поля в точке (x, y, z) от точечного (бесконечно малого) элемента кольца длины $r(s_a)d\varphi$, выделяемого углом с вершиной в центре кольца $d\varphi$ полярной системы координат, будет равен

$$dT_\omega = \frac{d\lambda_\omega r(s_a)}{4\pi\kappa_f} \frac{\exp\left(\beta\sqrt{(x-r(s_a)\cos\varphi)^2 + (y-r(s_a)\sin\varphi)^2 + z^2}\right)}{\sqrt{(x-r(s_a)\cos\varphi)^2 + (y-r(s_a)\sin\varphi)^2 + z^2}} d\varphi.$$

В силу справедливости принципа суперпозиции, гармоническое температурное поле всего кольца, будет равно интегралу от вклада всех элементов кольца

$$dT_\omega = \frac{d\lambda_\omega r(s_a)}{4\pi\kappa_f} \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(\beta\sqrt{(x-r(s_a)\cos\varphi)^2 + (y-r(s_a)\sin\varphi)^2 + z^2}\right)}{\sqrt{(x-r(s_a)\cos\varphi)^2 + (y-r(s_a)\sin\varphi)^2 + z^2}} d\varphi.$$

Преобразуем выражение под корнями

$$(x-r(s_a)\cos\varphi)^2 + (y-r(s_a)\sin\varphi)^2 + z^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + r(s_a)^2) - 2r(s_a)(x\cos\varphi + y\sin\varphi).$$

и перейдем к цилиндрической системе координат для точки наблюдения $x = R\cos\vartheta$, $y = R\sin\vartheta$, тогда

$$\begin{aligned} dT_\omega &= \frac{d\lambda_\omega r(s_a)}{4\pi\kappa_f} \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(\beta\sqrt{R^2 - 2r(s_a)R\cos(\vartheta-\varphi) + r(s_a)^2 + z^2}\right)}{\sqrt{R^2 - 2r(s_a)R\cos(\vartheta-\varphi) + r(s_a)^2 + z^2}} d\varphi = \\ &= \frac{d\lambda_\omega r(s_a)}{4\pi\kappa_f} \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(\beta\sqrt{R^2 - 2r(s_a)R\cos(\varphi-\vartheta) + r(s_a)^2 + z^2}\right)}{\sqrt{R^2 - 2r(s_a)R\cos(\varphi-\vartheta) + r(s_a)^2 + z^2}} d\varphi. \end{aligned}$$

Замечая, что, в силу периодичности косинуса, можно пределы интегрирования смешать как угодно (результатирующее температурное поле не зависит от ϑ в силу симметрии). Выберем начало отсчета ϑ так, чтобы $\cos(\varphi - \vartheta) = -\cos \varphi$, то есть положим $\vartheta = \pi$, тогда

$$\begin{aligned} dT_{\omega} &= \frac{d\lambda_{\omega} r(s_a)}{4\pi\kappa_f} \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(\beta\sqrt{\left(R^2 + r(s_a)^2 + z^2\right) + 2r(s_a)R\cos\varphi}\right)}{\sqrt{\left(R^2 + r(s_a)^2 + z^2\right) + 2r(s_a)R\cos\varphi}} d\varphi = \\ &= \frac{d\lambda_{\omega} r(s_a)}{4\pi\kappa_f} \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(\beta\sqrt{\left((R+r(s_a))^2 + z^2\right) - 4r(s_a)R\sin^2(\varphi/2)}\right)}{\sqrt{\left((R+r(s_a))^2 + z^2\right) - 4r(s_a)R\sin^2(\varphi/2)}} d\varphi. \end{aligned} \quad (47)$$

Формула (47) была получена для случая, когда плоскость кольца лежит в плоскости $z = 0$ (в плоскости XY). Если плоскость кольца находится в плоскости $z(s_a)$, то (47) можно переписать в виде

$$dT_{\omega} = \frac{d\lambda_{\omega} r(s_a)}{4\pi\kappa_f} \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(\beta\sqrt{\left((R+r(s_a))^2 + (z-z(s_a))^2\right) - 4r(s_a)R\sin^2(\varphi/2)}\right)}{\sqrt{\left((R+r(s_a))^2 + (z-z(s_a))^2\right) - 4r(s_a)R\sin^2(\varphi/2)}} d\varphi. \quad (48)$$

Введем безразмерную величину $\tau = 2\sqrt{r(s_a)R} / \sqrt{\left(R+r(s_a)\right)^2 + (z-z(s_a))^2}$ и, используя выражение для фурье-образа полной мощности тепловыделения кольца $dQ_{\omega} = 2\pi r(s_a) d\lambda_{\omega}$, получим

$$\begin{aligned} dT_{\omega} &= \frac{d\lambda_{\omega} R}{4\pi\kappa_f \sqrt{\left(R+r(s_a)\right)^2 + (z-z(s_a))^2}} \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(\beta\sqrt{\left(R+r(s_a)\right)^2 + (z-z(s_a))^2} \sqrt{1-\tau^2\sin^2(\varphi/2)}\right)}{\sqrt{1-\tau^2\sin^2(\varphi/2)}} d\varphi = \\ &= \frac{dQ_{\omega}}{2\pi^2\kappa_f \sqrt{\left(R+r(s_a)\right)^2 + (z-z(s_a))^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\exp\left(\mu\sqrt{1-\tau^2\sin^2\zeta}\right)}{\sqrt{1-\tau^2\sin^2\zeta}} d\zeta. \end{aligned} \quad (49)$$

где введена безразмерная величина $\mu = \beta\sqrt{\left(r+r(s_a)\right)^2 + (z-z(s_a))^2}$.

Вводя обозначение $\alpha = \sqrt{1-\tau^2\sin^2\zeta}$, разложим подынтегральную функцию:

$$\frac{\exp(\mu\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \mu\alpha + \frac{(\mu\alpha)^2}{2} + \frac{(\mu\alpha)^3}{6} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(\mu\alpha)^n}{n!} \right) = \frac{1}{\alpha} + \mu + \frac{\mu^2\alpha}{2} + \frac{\mu^3\alpha^2}{6} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\mu^n\alpha^{n-1}}{n!}. \quad (50)$$

Интегрируя (50) по ζ от нуля до $\pi/2$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\exp\left(\mu\sqrt{1-\tau^2\sin^2\zeta}\right)}{\sqrt{1-\tau^2\sin^2\zeta}} d\zeta &= \int_0^{\pi/2} \left(1-\tau^2\sin^2\zeta\right)^{-\frac{1}{2}} d\zeta + \mu \int_0^{\pi/2} \left(1-\tau^2\sin^2\zeta\right)^{\frac{0}{2}} d\zeta + \frac{\mu^2}{2} \int_0^{\pi/2} \left(1-\tau^2\sin^2\zeta\right)^{\frac{1}{2}} d\zeta + \\ &+ \frac{\mu^3}{6} \int_0^{\pi/2} \left(1-\tau^2\sin^2\zeta\right) d\zeta + \frac{\mu^4}{24} \int_0^{\pi/2} \left(1-\tau^2\sin^2\zeta\right)^{\frac{3}{2}} d\zeta + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \int_0^{\pi/2} \left(1-\tau^2\sin^2\zeta\right)^{\frac{n-1}{2}} d\zeta. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\int_0^{\pi/2} (1 - \tau^2 \sin^2 \zeta)^{\frac{n-1}{2}} d\zeta = \left(\frac{\pi}{2}\right) \mathfrak{F}\left(1/2, -\frac{(n-1)}{2}, 1, \tau^2\right),$$

где \mathfrak{F} – гипергеометрическая функция Гаусса [26, 27], получим представление интеграла в (49) следующим быстроходящимся рядом

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\exp(\mu\sqrt{1-\tau^2 \sin^2 \zeta})}{\sqrt{1-\tau^2 \sin^2 \zeta}} d\zeta = \left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \mathfrak{F}\left(1/2, -\frac{(n-1)}{2}, 1, \tau^2\right). \quad (51)$$

Тогда, фурье-образ температурного поля кольца примет вид

$$dT_{\omega} = \frac{dQ_{\omega}}{4\pi\kappa_f \sqrt{(R+r(s_a))^2 + (z-z(s_a))^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \mathfrak{F}\left(1/2, -\frac{(n-1)}{2}, 1, \tau^2\right). \quad (52)$$

Подставляя $dQ_{\omega} = 2\pi r(s_a)\sigma_{\omega}(s_a)ds_a$ и интегрируя по ds_a , получим полное температурное поле в точке (R, z) от распределения гармонических источников тепла по вспомогательной поверхности с плотностью источников тепла $\sigma_{\omega}(s_a)$

$$\mathbb{T}_s(x, y, z) = T_{\omega}(R, z) = \frac{1}{2\kappa_f} \int_0^{s'_{\max}} \frac{r(s_a)\sigma_{\omega}(s_a)ds_a}{\sqrt{(R+r(s_a))^2 + (z-z(s_a))^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \mathfrak{F}\left(1/2, -\frac{(n-1)}{2}, 1, \tau^2\right), \quad (53)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние между точкой наблюдения и осью Z , $\tau = 2\sqrt{r(s_a)R} / \sqrt{(R+r(s_a))^2 + (z-z(s_a))^2}$.

Необходимо отметить, что можно было бы рассматривать распределение гармонических источников тепла σ_{ω} по поверхности исследуемого тела и не вводить вспомогательную поверхность с распределенной по ней плотностью гармонического источника тепла. Это сделано потому, что при $(R, z) \rightarrow (r_a, z_a)$ у подынтегрального выражения в (53) возникает особенность. Чтобы устранить трудности, связанные интегрированием несобственных интегралов и была введена вспомогательная поверхность. Расстояние между поверхностью тела и вспомогательной поверхностью весьма мало (в расчетах далее меньше 0.01 от характерного размера тела) и особенностей не возникает. Тем не менее, такой метод дает возможность определить ряд аппроксимирующих функций, который быстро сходится к решению задачи на поверхности тела. Применимость подобного способа устранения таких

проблем с бесконечностями интегрируемых функций была продемонстрирована в работах [28, 29].

Если рассматриваемое тело расположено рядом с плоскостистой структурой (см. рис. 4), то, из-за индуцированных в плоскостистой структуре источников, полная (от всех источников, результирующая) гармоническая температура \mathbb{T}_{tot} должна удовлетворять уравнению (2), причем, будем рассматривать задачу, когда температура тела должен быть постоянной по поверхности величиной (обозначим его U_{ω}). Кроме того, на плоских границах пленок должны быть непрерывны тангенциальные составляющие температурного поля и нормальные составляющие потока тепла. Гармоническая температура \mathbb{T}_{tot} , удовлетворяющий таким граничным условиям будет выражаться через \mathbb{T}_s формулой (45), а гармоническое температурное поле за бли-

жайшей границей плоскостной структуры – формулой (46). При этом граничные условия на границах плоскостной структуры будут выполняться автоматически.

Таким образом, задача определения полного гармонического поля во всем пространстве состоит в том, чтобы найти такое поле $\mathbb{T}_s(x, y, z)$, чтобы полное поле $\mathbb{T}_{tot}(x, y, z)$ удовлетворяло на поверхности тела условию $\mathbb{T}_{tot} = U_\omega$. Это можно сделать, разложив поле $\mathbb{T}_s(x, y, z)$ по подходящим функциям, удовлетворяющим уравнению (2), а коэффициенты разложения гармонического температурного поля \mathbb{T}_s по этим функциям определить из условия $\mathbb{T}_{tot} = U_\omega$ на границе тела.

Имея в виду общность дальнейшего изложения, перейдем к безразмерным координатам: $\tilde{x} = x/D$, $\tilde{y} = y/D$, $\tilde{z} = z/D$, где D – некоторое размерное расстояние.

Кроме того, нормируем гармоническую температуру на поверхности тела U_ω , то есть перейдем от размерной к безразмерной температуре $\tilde{\mathbb{T}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \mathbb{T}/U_\omega$ в безразмерных координатах. Тогда, граничное условие на поверхности тела запишется в виде $\tilde{\mathbb{T}}_{tot} = 1$, а дифференциальное уравнение задачи (2) без

источников в безразмерных величинах примет вид

$$i\tilde{\nu}_j \tilde{\mathbb{T}}_{j,\omega} + \tilde{\Delta} \tilde{\mathbb{T}}_{j,\omega} = 0,$$

где $\tilde{\nu}_j = \omega \rho_j c_j D^2 / \kappa_j$ – безразмерная величина, а $\tilde{\Delta}$ – безразмерный Лапласиан.

В рассматриваемом осесимметричном случае, для выполнения граничного условия на поверхности тела, достаточно удовлетворить его на линии пересечения поверхности тела с любой плоскостью симметрии, проходящей через ось Z (на образующей поверхности вращения). В качестве такой плоскости мы выберем плоскость (\tilde{x}, \tilde{z}) при $\tilde{y} = 0$. Более конкретно, достаточно удовлетворить граничному условию $\tilde{\mathbb{T}}_{tot}(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) = 1$ только на границе пересечения полуплоскости $\tilde{y} = 0$ при $\tilde{x} \geq 0$ и поверхности тела.

Будем искать решение, предполагая, что

$$\tilde{\sigma}(\tilde{s}_a) = \sum_{m=1}^N A_m \cos\left((m-1)\pi\tilde{s}_a / \tilde{S}'_{\max}\right),$$

где A_m – постоянные коэффициенты разложения. Тогда, безразмерную температуру снаружи тела $\tilde{\mathbb{T}}_s$ можно записать в виде

$$\tilde{\mathbb{T}}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{m=1}^N A_m \mathfrak{B}_m\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}\right), \quad (54)$$

где

$$\mathfrak{B}_m\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{S}'_{\max}} \cos\left(\frac{(m-1)\pi\tilde{s}_a}{\tilde{S}'_{\max}}\right) \frac{\tilde{r}(\tilde{s}_a) d\tilde{s}_a}{\sqrt{\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} + \tilde{r}(\tilde{s}_a)\right)^2 + \left(\tilde{z} - \tilde{z}(\tilde{s}_a)\right)^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \mathfrak{F}\left(1/2, -\frac{(n-1)}{2}, 1, \tilde{\tau}^2\right),$$

$$\tilde{\tau} = 2\sqrt{\tilde{r}(\tilde{s}_a)\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}} / \sqrt{\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} + \tilde{r}(\tilde{s}_a)\right)^2 + \left(\tilde{z} - \tilde{z}(\tilde{s}_a)\right)^2},$$

$$\mu = \left((i-1)/\sqrt{2}\right) D \sqrt{\omega(\rho_f c_f / \kappa_f)} \sqrt{\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} + \tilde{r}(\tilde{s}_a)\right)^2 + \left(\tilde{z} - \tilde{z}(\tilde{s}_a)\right)^2}.$$

Тогда, из (45) нормированную температуру в среде между телом и плоскостной структурой можно представить в виде

$$\tilde{\mathbb{T}}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{m=1}^N A_m \left(\mathfrak{B}_m\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}\right) + \mathfrak{B}_m\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}\right) \right). \quad (55)$$

где

$$\mathfrak{B}_m\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \tilde{z}\right) = \frac{(\kappa_f - \kappa_{p,1})}{(\kappa_{p,1} + \kappa_f)} \mathfrak{B}_m\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}\right) + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{h}(\tilde{u}, \tilde{v}) \mathfrak{B}_m\left(\sqrt{(\tilde{x} - \tilde{u})^2 + (\tilde{y} - \tilde{v})^2}, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}\right) d\tilde{u} d\tilde{v}.$$

Граничное условие на поверхности тела $\tilde{\mathbb{T}}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 1$ в данной работе удовлетворялось приближенно, методом коллокаций [30]. Указанные уравнения записывались в равномерно распределенных N точках дуги образующей при $\tilde{y} = 0$ и $\tilde{x} > 0$ на поверхности тела. Решая полученные N линейных алгебраических уравнений с N неизвестными, находились A_m и, по формуле (55), распределение полного потенциала в области между телом и передней поверхностью первой пленки плоскостной структуры. Функция $\chi(\sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2})$ и затем $\mathfrak{h}(\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2})$ в формуле (55) вычислялась численно для точечного заряда, расположенного рядом с заданной плоскостной структурой по формулам (35)–(37) и (40). Затем функция $\mathfrak{h}(\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2})$ приближалась сплайном, который использовался для вычисления интегралов. В итоге, находится распределение нормированной температуры в нормированных координатах снаружи рассматриваемого тела, в слоистой структуре и в полупространстве за ней по известным значениям A_j .

Отметим, что рассмотренное безразмерное решение гармонической задачи, в отличие от аналогичной задачи стационарной теплопроводности (см. [22]), не одинаково для задач с геометрически подобной геометрией и одинаковыми соотношениями между κ_j задачи. Это связано с тем, что для рассматриваемой выше гармонической безразмерной задачи возникают безразмерные константы $D\sqrt{\omega(\rho_j c_j / \kappa_j)}$ в функциях μ и $\mathfrak{h}(\tilde{u}, \tilde{v})$. Чтобы гармонические решения задачи теплопроводности были математически эквивалентны, необходимо, чтобы, кроме подобия геометрии были одинаковы параметры областей ρ_j , c_j и κ_j для соответствующих областей, а также необходимо, чтобы еще и частоты размерных задач были обратно пропорциональны характерному размеру задачи D^2 . Иными словами, нужно, чтобы еще частота изменялась так, чтобы $\omega \sim D^{-2}$, тогда в безразмерных координатах будет иметь одинаковые распределения гармонических нормированных температур.

Из приведенного анализа рассмотрения гармонического изменения температуры в рассматриваемой задаче плоскостной структуры следует общий принцип эквивалентности для нестационарной задачи теплопроводности, с тепловым процессом развивающейся во времени. Его можно сформулировать следующим образом: пусть температура поверхности тела, расположенного у плоскостной структуры, меняется во времени как $U_s(t)$ с характерным временем T_s . Если положить $T_s = \rho_j c_j D^2 / \kappa_j$ ввести безразмерное время $\tilde{t} = t / T_s$, то в нормированных координатах пространственно-временное изменение температуры $\tilde{\mathbb{T}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t})$ во всех областях будет идентично для задач с подобной геометрией и одинаковыми нормированными функциями нагрева поверхности тела $\tilde{U}_s(\tilde{t})$. При этом предполагается, что в геометрически подобных задачах материалы всех сред, ρ_j , c_j и κ_j , одинаковы для всех j .

Пример вычисления распределений температуры вокруг тел вращения сложной формы

В качестве примера применения изложенной выше теории, были проведены численные расчеты распределения нормированной температуры вокруг вытянутого (вдоль оси Z) эллипсоида вращения, расположенного вблизи плоскостной структуры, состоящей из одной пленки. Нормирование координат проводилось на длину малой полуоси эллипсоида a_{el} (в плоскости, перпендикулярной оси Z). При этой нормировке длина большой полуоси равнялась 1,75. Центр эллипсоида находился в точке $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) = (0, 0, -1,25)$. Кратчайшее расстояние от эллипсоида до пленки было равно $\Delta\tilde{z} = 0,5$. Эллипсоид находился в среде с $\kappa_f = 1$, рядом с пленкой нормированной толщины $\tilde{h} = 1$ и коэффициентом теплопроводности $\kappa_p = 4$. Коэффициент теплопроводности полупространства за пленкой принимался равным $\kappa_d = 2$. Границы пленки определялись уравнениями $\tilde{z} = \tilde{z}_b = 1$ и $\tilde{z} = \tilde{z}_b + \tilde{h} = 2$. Кратчайшее расстояние от эл-

липсоида до пленки было равно $\Delta\tilde{z} = 0,5$. Для простоты численных расчетов, все коэффициенты $\tilde{\nu}_j = \omega(\rho_j c_j / \kappa_j) a_{el}^2$ считались для всех сред задачи равными. В этом случае полностью применим метод отражений работы [21], необходимо только при выводе делать замены $\tilde{\gamma} = \sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2}$ на $\tilde{\gamma}_j = \sqrt{\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2 - i\omega(\rho_j c_j / \kappa_j) a_{el}^2}$. В этом случае можно заменить двойное интегрирование суммированием по виртуальным гармоническим источникам тепла.

На рис. 5а показано распределение модуля нормированной температуры в плоскости, проходящей вдоль оси Z для стационарного

источника (для нулевой частоты и, соответственно, $\tilde{\nu}_j = 0$). Для сравнения на рис. 5б показано распределение модуля нормированной комплексной температуры для частоты, которая соответствует $\tilde{\nu}_j = 1$. Из сравнения видно, что с ростом частоты, из-за экспоненциального спада температуры при удалении от источника тепла, распределение становится локализованным ближе к источнику – эллипсоиду. Ясно, что при дальнейшем росте частоты эта тенденция продолжится и в пределе высокочастотные колебания температуры будут ограничены только тонким слоем у поверхности эллипсоида.

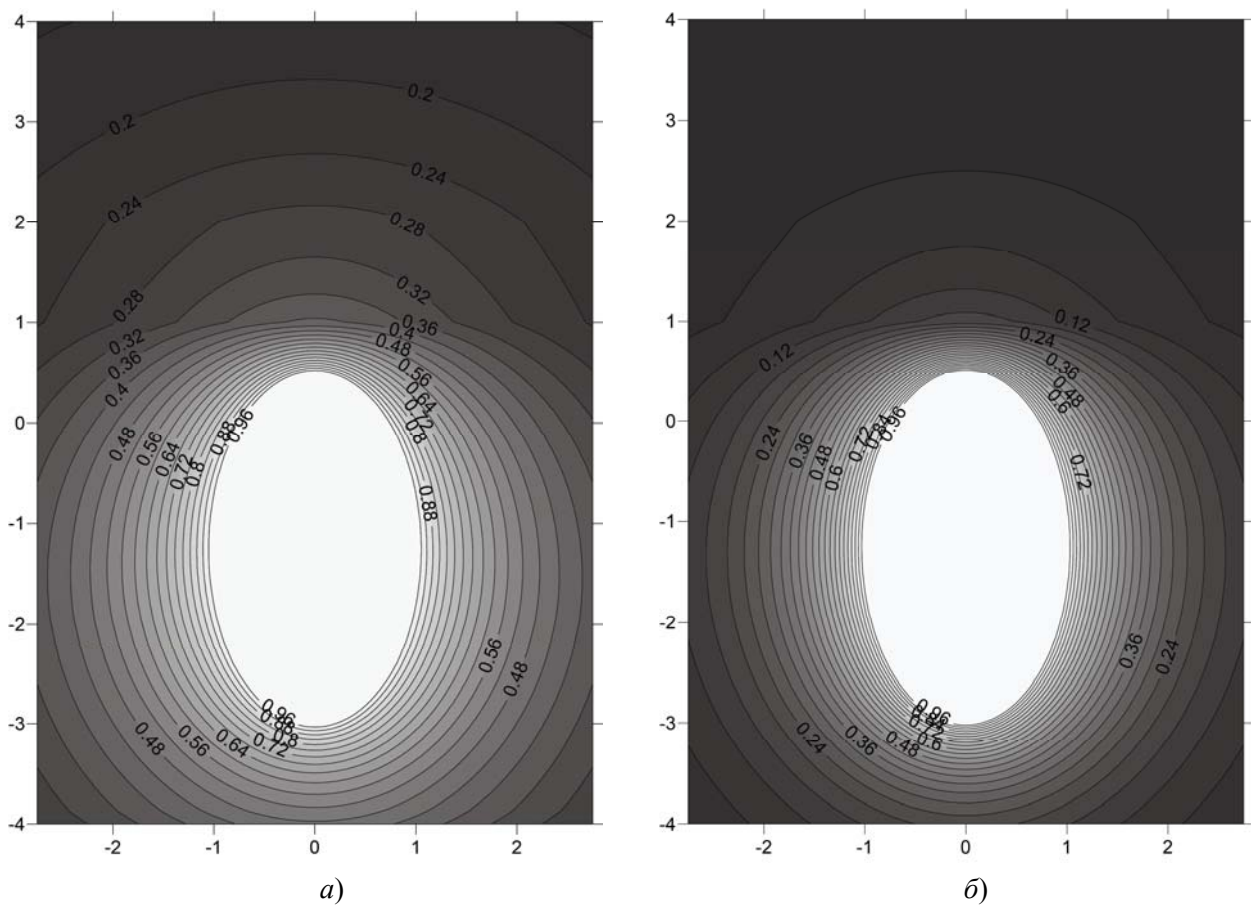


Рис. 5. Распределения модуля нормированной гармонической температуры вблизи эллипсоида вращения для стационарной температуры поверхности $\tilde{\nu}_j = 0$ а) и для случая $\tilde{\nu}_j = 1$ б). Коэффициенты теплопроводности сред: $\kappa_j = 1$, $\kappa_p = 4$, $\kappa_d = 2$, толщина пленки $\tilde{h} = 1$, ее границы $\tilde{z} = 1$ и $\tilde{z} = 2$

Заключение

В статье предложена оригинальная матричная техника нахождения решения нестационарной задачи теплопроводности в плоскостных средах. Предложена формулировка

ка обобщенного метода отражений для гармонического решения задачи. Продемонстрировано, как применять предложенный метод для нахождения распределений температуры вблизи симметричных тел вращения сложной формы, расположенных рядом с плоскостной

стой структурой. Представленные результаты расчетов распределений гармонически меняющейся температуры для задачи с одной пленкой демонстрируют возможности метода.

Анализ полученных уравнений позволил сформулировать условия применимости результатов к геометрически подобным задачам нестационарной теплопроводности, который справедлив при эквивалентности формы импульсов нагрева поверхности тела в нормированном временном масштабе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Гостехиздат, 1952.
2. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001.
3. Карташов Э. М., Кудинов В. А., Калашиников В. В. Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций: учеб. пособие для бакалавриата, специалитета и магистратуры / под общ. ред. Карташова Э. М. – М.: Издательство Юрайт, 2018.
4. Кудинов В. А., Кудинов И. В. / Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50. № 1. С. 118.
5. Ройзен Л. И. / Теплофизика высоких температур. 1981. Т. 19. № 4. С. 821.
6. Видин Ю. В. Инженерные методы расчета процессов теплопереноса. – Красноярск: Изд-во Красноярск. политех. ин-та, 1974.
7. Цой П. В. / Теплофизика высоких температур. 1986. Т. 24. № 3. С. 514.
8. Зарубин В. С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоатомиздат, 1983.
9. Pollack H. N. / Journal of Geophysical Research. 1965. Vol. 70. № 22. P. 5645.
10. Negi J. G., Singh R. N. / Pure and Applied Geophysics. 1969. Vol. 73. № 1. P. 143.
11. Negi J. G., Singh R. N. / Pure and Applied Geophysics. 1968. Vol. 69. № 1. P. 110.
12. Matysiak S. J., Perkowski D. M. / Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 50. № 1. P. 75.
13. Chew W. C. Waves and Fields in Inhomogeneous Media. – New York: IEEE Press, 1995.
14. Петрин А. Б. / Оптика и спектроскопия. 2020. Т. 128. № 11. С. 1676.
15. Петрин А. Б. / Оптика и спектроскопия. 2020. Т. 128. № 12. С. 1874.
16. Петрин А. Б. / ЖЭТФ. 2021. Т. 159. № 1. С. 35.
17. Кинг Р., Смит Г. Антенны в материальных средах: В 2-х книгах. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984.
18. King R. W. P. / IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1988. Vol. 36. № 6. P. 1080.
19. Петрин А. Б. / Оптика и спектроскопия. 2021. Т. 129. № 1. С. 55.
20. Петрин А. Б. / Оптика и спектроскопия. 2022. Т. 130. № 9. С. 1436.
21. Петрин А. Б. / Журнал технической физики. 2023. Т. 93. № 3. С. 318.
22. Петрин А. Б. / Успехи прикладной физики. 2023. Т. 11. № 1. С. 3–21.
23. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 2. Пространство. Время. Движение. – М.: Мир, 1977.
24. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
25. Силадьи М. Электронная и ионная оптика. – М.: Мир, 1990.
26. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1967.
27. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. – М.: Наука, 1984.
28. Петрин А. Б. / Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 3. С. 323.
29. Петрин А. Б. / Физика плазмы. 2010. Т. 36. № 7. С. 671.
30. Миллер Е., Поджо А. и др. Численные методы теории дифракции: сб. статей Математика. Вып. 29 / Пер. с англ. – М.: Мир, 1982.

PACS: 41.20.Cv, 44.10.+i, 44.05.+e.

Development of methods for solving problems of non-stationary heat conduction of flat-layered media

A. B. Petrin

Joint Institute for High Temperatures, Russian Academy of Sciences
Bd. 2, 13 Izhorskaya st., 125412, Moscow, Russia
E-mail: petrin@ihed.ras.ru, a_petrin@mail.ru

Received 21.03.2023; revised 29.03.2023; accepted 3.04.2023

The problem of heat propagation from a non-stationary point heat source located inside or outside a flat-layered heat-conducting medium is studied. The non-stationary problem is reduced to

the problem of a harmonic point heat source, for which the reflection method is generalized. The developed method of reflections for a point harmonic source is generalized to the case of an arbitrary system of sources and is used to solve problems of non-stationary thermal conductivity of plane-layered media with axisymmetric heat sources of complex shape.

Keywords: plane layered medium, reflection method, thermal conductivity, non-stationary thermal conductivity.

DOI: 10.51368/2307-4469-2023-11-2-93-114

REFERENCES

1. Luikov A. V., Theory of heat conduction, Moscow, Gostekhizdat, 1952 [in Russian].
2. Kartashov E. M., Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids, Moscow, Higher school, 2001 [in Russian].
3. Kartashov E. M., Kudinov V. A. and Kalashnikov V. V., Theory of heat and mass transfer: problem solving for multilayer structures: textbook. manual for undergraduate, specialist and magistracy / under total ed. E. M. Kartashova, Moscow, Yurait Publishing House, 2018 [in Russian].
4. Kudinov V. A. and Kudinov I. V., Teplofizika Vysokikh Temperatur **50** (1), 118 (2012) [in Russian].
5. Roizen L. I., Teplofizika Vysokikh Temperatur **19** (4), 821 (1981) [in Russian].
6. Vidin Yu. V., Engineering methods for calculating heat transfer processes, Krasnoyarsk, Krasnoyarsk Publishing House. polytechnic in-ta, 1974 [in Russian].
7. Tsoi P. V., Teplofizika Vysokikh Temperatur **24** (3), 514 (1986) [in Russian].
8. Zarubin V. S., Engineering methods for solving problems of heat conduction, Moscow, Energoatomizdat, 1983 [in Russian].
9. Pollack H. N., Journal of Geophysical Research **70** (22), 5645 (1965).
10. Negi J. G. and Singh R. N., Pure and Applied Geophysics **73** (1), 143 (1969).
11. Negi J. G. and Singh R. N., Pure and Applied Geophysics **69** (1), 110 (1968).
12. Matysiak S. J. and Perkowski D. M., Heat and Mass Transfer **50** (1), 75 (2014).
13. Chew W. C., Waves and Fields in Inhomogeneous Media, New York, IEEE Press, 1995.
14. Petrin A. B., Optics and Spectroscopy **128**, 1809 (2020).
15. Petrin A. B., Optika i Spectroscopiya **128** (12), 1874 (2020) [in Russian].
16. Petrin A. B., Journal of Experimental and Theoretical Physics **132**, 27 (2021).
17. King R. W. P. and Smith G. S., Antennas in Maters, Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1981.
18. King R. W. P., IEEE Trans. Microwave Theory Tech. **36** (6), 1080 (1988).
19. Petrin A. B., Optics and Spectroscopy **129**, 72 (2021).
20. Petrin A. B., Optics and Spectroscopy **130** (9), 1158 (2022).
21. Petrin A. B., Technical Physics **93** (3), 318 (2023) [in Russian].
22. Petrin A. B., Usp. Prikl. Fiz. **11** (1), 3–21 (2023) [in Russian].
23. Feynman R., Leighton R. and Sands M., Feynman Lectures on Physics, Vol. 2: Mainly Electromagnetism and Matter, Massachusetts, Addison-Wesley, 1964.
24. Vladimirov V. S., Equations of Mathematical Physics, Moscow, Nauka, 1981 [in Russian].
25. Szilagy M., Electron and Ion Optics, New York, Plenum Press, 1988.
26. Angot A., Mathematics for electrical and radio engineers, Moscow, Nauka, 1967 [in Russian].
27. Nikiforov A. F., Uvarov V. B., Special functions of mathematical physics, Moscow, Nauka, 1984 [in Russian].
28. Petrin A. B., High Temperature **48** (3), 305 (2010).
29. Petrin A. B., Plasma Physics Reports **36** (7), 627 (2010).
30. Miller E., Poggio A. et al., Numerical methods of the theory of diffraction: Collection of articles. Mathematics. Issue 29: Translation from English, Moscow, Mir, 1982.