

УДК 538.945

PACS: 74.20De

DOI: 10.51368/2307-4469-2023-11-5-363-383

EDN: OPWTIR



Эквивалентная электрическая схема сверхпроводников на основе двухжидкостной модели при переменных токах

К. А. Осипов, А. Н. Варюхин, М. А. Овдиенко, А. В. Гелиев

Рассмотрены переходные процессы в сверхпроводниках, протекающие при замыкании ключа (или его размыкании) в электрической цепи на постоянном токе, а также процессы при синусоидальном изменении электродвижущей силы (ЭДС) источника тока. Для описания переходных процессов представлена эквивалентная электрическая схема сверхпроводников в соответствии с двухжидкостной моделью, согласно которой все электроны в сверхпроводнике разделены на два типа – сверхпроводящие и нормальные. При этом впервые введены инерционные индуктивности для сверхпроводящих и нормальных электронов L_s и L_n , характеризующих динамику ускорения различных «сортов» электронов вследствие возбуждения электрического поля при переменных условиях, а также эффективное сопротивление R_n для описания диссипации энергии при возбуждении нормальных электронов. Получены зависимости нормального и сверхпроводящего токов, электрического поля в сверхпроводниках от частоты ЭДС источника тока, вычислены средняя мощность источника тока и тепловыделение за счет джоулевых потерь в сверхпроводнике при возбуждении нормальных электронов в зависимости от частоты и температуры.

Ключевые слова: сверхпроводимость, высокотемпературная сверхпроводимость, ВТСП, двухжидкостная модель, нормальные электроны, сверхпроводящие электроны, переменный ток, эквивалентная электрическая схема, инерционные индуктивности для сверхпроводящих и нормальных электронов.

Введение

Сверхпроводящий материал находится в сверхпроводящем состоянии только в опреде-

ленном диапазоне внешних условий (температура и внешних магнитных полей). При температурах ниже критической $T < T_c$ сверхпроводник претерпевает фазовый переход и переходит в сверхпроводящее состояние [1–3], и на постоянном токе не испытывает никакого сопротивления. При наличии внешнего магнитного поля $H < H_{c1}$, где H_{c1} – первое критическое поле, сверхпроводник II-го рода находится в мейснеровском состоянии [4], т. е. сверхпроводящий материал вытесняет внешнее магнитное поле из объема сверхпроводника [5–8]. При напряженностях внешнего магнитного поля $H > H_{c1}$, что соответствует смешанному состоянию, в сверхпроводник начинает проникать магнитное поле в виде тонких отдельных нитей или так называемых

Осипов Константин Анатольевич, в.н.с., к.т.н.

E-mail: kaosipov@ciam.ru

Варюхин Антон Николаевич, зам. ген. директора – директор исследовательского центра «Гибридных и электрических силовых установок», к.т.н.

Овдиенко Максим Александрович, зам. директора исследовательского центра, к.т.н.

Гелиев Александр Валикович¹, нач. отдела, к.ф.-м.н. ГНЦ, ФАУ «ЦИАМ имени П. И. Баранова». Россия, 111116, Москва, ул. Авиамоторная, 2.

Статья поступила в редакцию 20.07.2023

После доработки 29.08.2023

Принята к публикации 20.09.2023

© Осипов К. А., Варюхин А. Н., Овдиенко М. А., Гелиев А. В., 2023

вихрей Абрикосова, магнитное поле в которых создается сверхпроводящими токами, циркулирующими вокруг нормальной сердцевинки с радиусом порядка длины когерентности ξ сверхпроводника II-го рода [9–13]. Причем, как оказывается, магнитный поток в вихревом состоянии квантуется, и квант магнитного потока равен $\Phi_0 = \pi\hbar c / e \approx 2,0678 \times 10^{-7}$ Гс·см². При протекании постоянного транспортного тока (даже при небольшом значении) в бездефектном сверхпроводнике за счет действующей силы Лоренца f_L со стороны транспортного тока, протекающего через сверхпроводник, возникает дрейф вихревой решетки [14–17], что соответствует режиму течения потока (flux flow). Однако при наличии примесей и дефектов кристаллической решетки различного типа, на которых вихри «пиннингуются» (локализуются), дрейф вихревой решетки возникает при плотностях тока $j_r > j_c$ где j_c – критическая плотность тока. Дрейф вихрей индуцирует вихревое электрическое поле в сверхпроводнике вследствие изменения магнитного потока в толще сверхпроводника $\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{V}_{др}] / c$, где $\mathbf{V}_{др}$ – скорость дрейфа вихревой решетки, \mathbf{B} – средняя магнитная индукция в сверхпроводнике. Возбужденное электрическое поле в свою очередь приводит в движение нормальные электроны в нормальных сердцевинках вихрей, радиус которых приблизительно равен длине когерентности ξ , в результате чего и происходит диссипация энергии [14–17]. Поэтому даже на постоянном токе при наличии внешнего магнитного поля ($H > H_{c1}$) при отсутствии центров пиннинга возникает сопротивление в сверхпроводнике (формула Бардина-Стефана [14–17]). С ростом величины внешнего магнитного поля в диапазоне $H_{c1} < H < H_{c2}$, где H_{c2} – второе критическое поле, количество квантов магнитного потока в сверхпроводнике увеличивается и соответственно растет сопротивление.

В 1987 году К. Мюллер и Г. Беднорц получили Нобелевскую премию за открытие сверхпроводника $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ («YBCO» – оксид иттрия-бария-меди) с критической температурой 92 [K], которая оказалась выше температуры кипения жидкого азота 77 [K]. Открытие высокотемпературной сверхпроводимости, в

частности, привело к разработке и производству высокотемпературных сверхпроводящих (ВТСП) лент и катушек. ВТСП ленты первого поколения характеризовались низким значением критического тока, что осложняло их применение в практических приложениях. ВТСП ленты второго поколения позволили существенно увеличить критический ток, особенно при наличии внешних полей за счет введения центров пиннинга, на которых локализовались так называемые вихри Абрикосова.

Положительные результаты в производстве ВТСП-лент второго поколения и соответственно катушек позволили их использование в электрических машинах. Можно отметить, например, что на международном авиационно-космическом салоне (МАКС) в 2021 году впервые совершил полет экспериментальный самолет Як-40ЛЛ (летающая лаборатория) с работающим демонстратором гибридной силовой установки (ГСУ) мощностью 500 кВт с применением высокотемпературных сверхпроводников в качестве обмоток возбуждения на статоре электродвигателя [18, 19].

Развитие ВТСП-технологий за последние несколько десятилетий и их применение в технических устройствах, в частности, в электрических двигателях и генераторах фактически приводит к проблеме теоретического предсказания характеристик ВТСП-лент и катушек на переменном токе при наличии внешнего магнитного поля при различных температурах охлаждения. Потенциальное решение данной задачи имеет не только фундаментальное, но и прикладное значения, поскольку это позволит теоретически предсказывать характеристики электродвигателей и электрогенераторов с применением ВТСП-технологий (коэффициент полезного действия, электромагнитный момент и мощность) при различных температурах (например, жидкого азота – 77 [K] или жидкого водорода 20 [K]), магнитных полях и частотах переменного тока. Исходя из этого, можно будет оценивать целесообразность применения ВТСП-лент в электрических машинах по сравнению с криопробниками (алюминий, медь при низких температурах).

Глобально задача ставится так, чтобы теоретически из первых физических принципов предсказывать вольт-амперные (ВАХ), неста-

ционарные характеристики и тепловыделение в высокотемпературных сверхпроводящих лентах при переменных условиях (токах и внешних полях при различной ориентации к ab -плоскости сверхпроводника). Также соответствующая доработка математических моделей по предсказанию характеристик лент и тепловыделения с учетом различных эффектов, протекающих в высокотемпературных сверхпроводниках, потенциально позволит в будущем пойти по пути компьютерного проектирования материалов (ВТСП-лент и катушек).

Непосредственное использование микроскопической теории сверхпроводимости (теории БКШ – Бардин, Купер, Шриффер) и нестационарной феноменологической теории Гинзбурга-Ландау для предсказания нестационарных характеристик ВТСП-лент не представляется возможным в силу их сложности и нелинейности. Следует отметить, что уравнения Гинзбурга-Ландау являются приближенными и феноменологическими, и строго говоря, могут применяться только в области температур близких к критическим. В рассматриваемом случае необходимо получить правдоподобную математическую модель, которая бы предсказывала нестационарные характеристики ВТСП-лент на переменном токе при наличии внешнего магнитного поля.

Безусловно поставленная задача является достаточно сложной с фундаментальной точки зрения, поскольку необходимо описывать все основные нестационарные процессы, происходящие в сверхпроводниках II рода в смешанном состоянии (или так называемой фазе Шубникова). Вклад в тепловыделение в ВТСП вносит не только возбуждение нормальных электронов при переменном ЭДС источника тока, но и потери, связанные с вязким движением вихрей Абрикосова. Также известно, что основными потерями в сверхпроводниках II-го рода являются гистерезисные, которые связаны с вязким движением вихревой решетки и центрами пиннингов в сверхпроводниках.

Ситуация усложняется тем, что реальные ВТСП-ленты имеют слоистую структуру [18, 19], некоторые из них являются проводящими, и при описании физических процессов необходимо иметь в виду, что при переменном ЭДС источника питания составляющие тока

возбуждаются не только в сверхпроводящем слое, но и в соседних слоях ленты. Например, ВТСП-лента II-го поколения компании СуперОкс имеет сложную структуру из восьми слоев. Кроме самого сверхпроводящего слоя, три слоя являются проводящими (медь, серебро и подложка Hastelloy).

Следует отметить, что при описании движения вихревой решетки часто используют понятие транспортного тока, поскольку от него зависит сила Лоренца, которая действует на вихрь Абрикосова, но нигде не дается четкого определения вышеупомянутого термина. Вероятно, это связано с тем, что в источниках по предсказанию ВАХ в основном рассматриваются стационарные процессы, в этом случае ток в сверхпроводнике будет переноситься сверхпроводящими электронами и нет необходимости конкретизировать данный термин. При описании нестационарных процессов необходимо дать четкое определение транспортного тока в силу того, что, как было отмечено ранее, токи возбуждаются не только в сверхпроводящем слое, но и в других слоях ВТСП-ленты, а также необходимо иметь в виду, что ток непосредственно в самом сверхпроводнике переносится как через нормальные, так и сверхпроводящие электроны согласно двухжидкостной модели.

Таким образом, под **транспортным током** будем в дальнейшем понимать **ток, возбуждающийся в сверхпроводящем слое** в ВТСП-ленте, который переносится как за счет **сверхпроводящих**, так и **нормальных электронов**.

В данной работе не будут рассматриваться различные эффекты, связанные с наличием внешнего магнитного поля и соответственно прониканием квантов магнитного потока, что будет сделано позднее. На данном этапе будут рассматриваться эффекты, связанные с возбуждением транспортного тока, протекающего через сверхпроводник, в переходном процессе при замыкании (или размыкании) ключа при постоянном токе и при переменном ЭДС источника питания. В дальнейшем при рассмотрении сверхпроводников II-го рода, находящихся в смешанном состоянии, нижеприведенные теоретические выкладки, идеи и соответствующие выводы будут в частности использоваться для предсказания ВАХ, неста-

ционных характеристик и тепловыделения при дрейфе вихревой решетки.

При переменном токе в сверхпроводнике в безвихревом состоянии сопротивление отличается от нуля всегда, и с ростом амплитуды транспортного тока и температуры сверхпроводника оно только нарастает. Данный факт, вытекающий из различных экспериментальных данных [12], можно понять в рамках двухжидкостной модели сверхпроводников. Согласно этой модели, которая, например, коротко представлена в работах [20–23], по аналогии с теорией сверхтекучести жидкого гелия He-II весь объем сверхпроводника заполнен двумя «жидкостями», состоящими из нормальных и сверхпроводящих электронов соответственно. При различных переходных процессах в сверхпроводнике возникает электрическое поле, которое зависит от частоты изменения тока и различных макроскопических параметров электрической цепи. Это электрическое поле ускоряет два типа «жидкостей» из нормальных и сверхпроводящих электронов соответственно. Сверхпроводящие электроны не рассеивают энергию за счет объединения в куперовские пары (поскольку данное состояние является более энергетически выгодным), согласно одному из возможных механизмов возникновения сверхпроводящего состояния [24–29], а нормальные электроны испытывают рассеяние на неоднородностях кристаллической решетки. В результате возникают электрическое сопротивление и выделение энергии в виде джоулева тепла.

Для того, чтобы математически описать протекающие переходные процессы и прояснить основные физические идеи, необходимо ввести эквивалентную электрическую схему сверхпроводников при переменных токах, которая бы соответствовала двухжидкостной модели, что непосредственно и сделано в данной работе.

В дальнейшем основа предложенной эквивалентной схемы сверхпроводников будет также применяться для анализа более сложных протекающих процессов в сверхпроводниках (в том числе в реальных ВТСП-лентах с учетом слоистости их структуры) при различных внешних условиях, например, при постоянном и переменном транспортных токах, в

отсутствие или наличия внешнего магнитного поля, с учетом добавления в сверхпроводящий материал так называемых центров пиннинга для локализации вихрей Абрикосова и другие эффекты посредством добавления соответствующих элементов и параметров электрической цепи в эквивалентную электрическую схему. Более того, без рассмотрения данной эквивалентной схемы и введения инерционных индуктивностей для нормальных и сверхпроводящих электронов невозможно корректно описывать нестационарные характеристики и тепловыделение в сверхпроводниках в единице объема при переменных условиях из первых физических принципов. В этом смысле данная работа является существенным заделом для дальнейшего предсказания нестационарных характеристик и тепловыделения в сверхпроводниках при переменных условиях, опираясь на фундаментальные уравнения, описывающие процессы, протекающие в сверхпроводниках.

Эквивалентная электрическая схема сверхпроводников. Переходной процесс при замыкании ключа на постоянном токе

Как уже было отмечено, при переменных токах сопротивление сверхпроводника отличается от нуля (даже при нулевом внешнем магнитном поле, когда нет вихрей Абрикосова). Для того, чтобы учесть динамику ускорения нормальных и сверхпроводящих электронов в эквивалентной электрической схеме необходимо ввести две отдельные ветви для нормального и сверхпроводящего токов, и при этом ввести некоторые макроскопические параметры, которые будут определять инерционные характеристики тех или иных электронов при наводящихся электрических полях в сверхпроводнике при переменных условиях.

Введем так называемые инерционные индуктивности для нормальных и сверхпроводящих электронов – L_n и L_s соответственно (рис. 1). При движении сверхпроводящих электронов потери энергии отсутствуют в силу формирования куперовских пар (согласно одному из возможных механизмов – теория БКШ), поэтому нет необходимости вводить эффективное сопротивление в ветви для сверхпро-

водящего тока. На нормальных электронах происходит рассеяние энергии, как в обычных проводниках, и соответственно для них справедлив обычный дифференциальный закон Ома, поэтому в электрической схеме необходимо ввести элемент, который будет описывать диссипацию энергии на нормальных электронах, т. е. некоторое сопротивление R_n (рис. 1). В дальнейшем необходимо будет определить введенные макроскопические параметры L_n , L_s и R_n , используя микроскопические уравнения для нормального и сверхпроводящего токов.

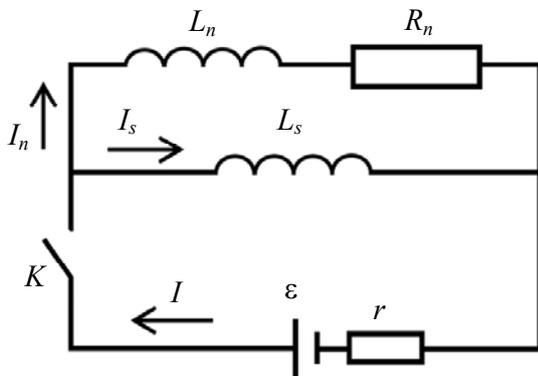


Рис. 1. Эквивалентная электрическая схема сверхпроводников на основе двухжидкостной модели при постоянном токе при замыкании (или размыкании) ключа

Справедливости ради отметим, что в данной работе не будет учитываться «обычная» индуктивность L (или так называемая магнитная индуктивность) всей электрической цепи (сверхпроводящей ленты в том числе), которая связана с законом электромагнитной индукции для того, чтобы не затенять идеи, связанные с двухжидкостной моделью сверхпроводников. Эквивалентная электрическая схема сверхпроводников с учетом магнитной и инерционных индуктивностей будет представлена в следующих работах. Однако заранее отметим, что введение индуктивности L не повлияет на определение и важность инерционных индуктивностей L_n и L_s для нормальных и сверхпроводящих электронов в сверхпроводниках, представленных в данной работе.

Для начала рассмотрим случай, когда образец сверхпроводника подключен к источнику постоянного тока с некоторой электродви-

жущей силой (ЭДС) источника тока ε и внутренним сопротивлением r . Согласно законам Кирхгофа, запишем уравнения для токов и падений напряжения для двух различных замкнутых контуров (в системе СГС):

$$\begin{cases} I(t) = I_n(t) + I_s(t), \\ \varepsilon - \frac{1}{c^2} L_s \dot{I}_s(t) = I(t)r, \\ \varepsilon - \frac{1}{c^2} L_n \dot{I}_n(t) = I_n(t)R_n + Ir. \end{cases} \quad (1)$$

Если не учитывать переходные процессы, протекающие в эквивалентной электрической цепи сверхпроводника, то для начала можно просто рассмотреть установившееся состояние, т. е. все производные по времени по сверхпроводящему и нормальному токам будут равны нулю. Из (1) получим, что независимо от того, какое сопротивление R_n , конечный ток, протекающий через нормальную фазу I_n , равен нулю. Таким образом, весь ток пойдет по пути наименьшего сопротивления, т. е. через сверхпроводящую фазу и будет равен $I_s = \varepsilon / r$.

Рассмотрим полную задачу (1) с учетом всех переходных процессов в электрической цепи и исследуем различные характеристики. Из первого и второго уравнений системы (1) выразим нормальный ток в переходном процессе:

$$I_n(t) = \frac{1}{r} \left(\varepsilon - \frac{1}{c^2} L_s \dot{I}_s(t) - I_s(t)r \right). \quad (2)$$

Подставив нормальный ток (2) в третье уравнение системы (1), получим следующее уравнение:

$$\frac{L_s L_n}{c^4 r} \ddot{I}_s + \frac{1}{c^2} \left(L_n + \frac{(R_n + r)}{r} L_s \right) \dot{I}_s + R_n I_s = \frac{R_n}{r} \varepsilon. \quad (3)$$

Разделив на $L_s L_n / c^4 r$ вышеприведенное уравнение, получим классическое колебательное уравнение для сверхпроводящего тока:

$$\ddot{I}_s + \frac{c^2 r}{L_s L_n} \left(L_n + \frac{R_n + r}{r} L_s \right) \dot{I}_s + \frac{c^4 r R_n}{L_s L_n} I_s = \frac{c^4 R_n}{L_s L_n} \varepsilon. \quad (4)$$

В (4) введем следующие обозначения:

$$2\gamma \equiv \frac{c^2 r}{L_s L_n} \left(L_n + \frac{R_n + r}{r} L_s \right), \quad (5)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{c^4 r R_n}{L_s L_n}, \quad X_s \equiv \frac{c^4 R_n}{L_s L_n} \varepsilon,$$

где γ , ω_0 , X_s – коэффициент затухания, собственная частота колебательного процесса и эффективная внешняя сила, приводящая в движение сверхпроводящий ток, соответственно. В результате получим дифференциальное уравнение второго порядка для сверхпроводящего тока с эффективной внешней силой в правой части уравнения:

$$\ddot{I}_s + 2\gamma \dot{I}_s + \omega_0^2 I_s = X_s. \quad (6)$$

Поскольку на данном этапе неизвестны характерные величины в уравнении – собственная частота ω_0 и коэффициент затухания γ , необходимо рассмотреть решения как с колебательным, так и апериодическим переходным процессом. Для начала рассмотрим колебательный переходный процесс, т. е. случай, когда $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$. Общее решение неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (6) записывается в следующем виде:

$$I_s(t) = \frac{X_s}{\omega_0^2} + e^{-\gamma t} (C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t). \quad (7)$$

где C_1 и C_2 – константы интегрирования и введено обозначение $\Omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$. В начальный момент времени сверхпроводящий и нормальный токи равны нулю ($I_s(0) = 0$, $I_n(0) = 0$). Условия для первых производных от сверхпроводящего и нормального токов в начальный момент времени можно легко найти из системы уравнений (1), используя нулевые начальные условия: $\left. \frac{dI_s}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\varepsilon c^2}{L_s}$ и

$\left. \frac{dI_n}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\varepsilon c^2}{L_n}$. Из начальных условий найдем,

что константы интегрирования в (7) равны $C_1 = -X_s / \omega_0^2$, $C_2 = -\frac{\varepsilon (\gamma - rc^2 / L_s)}{r \Omega}$.

При необходимости можно рассмотреть процесс размыкания ключа K , если удовлетворить следующим начальным условиям: $I_s(0) = \varepsilon / r$, $I_n(0) = 0$ и $\dot{I}_s(0) = \dot{I}_n(0) = 0$. Условия для первых производных от сверхпроводящего и нормального токов в начальный момент времени также находятся из системы уравнений (1).

Учитывая, что $X_s / \omega_0^2 = \varepsilon / r$, тогда сверхпроводящий ток $I_s(t)$ будет равен:

$$I_s(t) = \frac{\varepsilon}{r} \left\{ 1 - e^{-\gamma t} \left[\cos \Omega t + \frac{(\gamma - rc^2 / L_s)}{\Omega} \sin \Omega t \right] \right\}. \quad (8)$$

Также зависимость для сверхпроводящего тока (8) можно записать следующим образом, введя сдвиг фаз:

$$I_s(t) = \frac{\varepsilon}{r} \left\{ 1 - e^{-\gamma t} \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma - rc^2 / L_s}{\Omega} \right)^2} \cos(\Omega t - \delta) \right\}. \quad (9)$$

где сдвиг фаз равен $\delta = \arctg \left(\frac{\gamma - rc^2 / L_s}{\Omega} \right)$.

При $t \gg 1/\gamma$ экспоненциальная часть сверхпроводящего тока затухает и стремится к $I_s(t) \rightarrow \varepsilon / r$. Вычитая из 2-го уравнения для напряжений 3-е в системе (1), получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{c^2} L_n \frac{dI_n(t)}{dt} + I_n(t) R_n = \frac{1}{c^2} L_s \frac{dI_s(t)}{dt}. \quad (10)$$

В дальнейшем уравнение (10) будет использоваться при выводе введенных макроскопических параметров (L_s , L_n , R_n) в эквивалентной электрической схеме сверхпроводников путем сопоставления с микроскопическими уравнениями движения для сверхпроводящих и нормальных электронов. Из уравнения (10) также фактически вытекает то, что при возбуждении сверхпроводящего тока индуцируется нормальный ток вследствие зависимости правой части уравнения $(L_s / c^2) \dot{I}_s$ от времени. При $t \gg 1/\gamma$ когда сверхпроводящий ток стремится к постоянной

величине $I_s(t) \rightarrow \varepsilon / r$, правая часть в (10) равна нулю, что математически приводит к затуханию нормального тока.

Зависимость нормального тока $I_n(t)$ от времени можно определить, если подставить ранее полученное выражение для сверхпроводящего тока (8) или (9) в (2). После преобразований получим

$$I_n(t) = \frac{\varepsilon c^2}{L_n} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t. \quad (11)$$

Из (11) видно, что нормальный ток экспоненциально затухает с течением времени. Полный ток, протекающий в электрической цепи, будет равен сумме сверхпроводящего (8) и нормального (11) токов:

$$I(t) = I_s(t) + I_n(t) = \frac{\varepsilon}{r} \left\{ 1 - e^{-\gamma t} \left[\begin{aligned} &\cos \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \\ &\frac{(\gamma - rc^2 / L_s - rc^2 / L_n)}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \times \\ &\times \sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \end{aligned} \right] \right\}. \quad (12)$$

Таким образом, с течением времени полный ток $I(t)$ будет стремиться к постоянной величине $I(t) \rightarrow \varepsilon / r$ и протекать исключительно через сверхпроводящую фазу. Можно отметить, что характерное время установления стационарного режима для колебательно-переходного процесса определяется величиной $1/\gamma = 2 / \{c^2 (r/L_s + r/L_n + R_n/L_n)\}$, как следует из полученных зависимостей (8) и (11).

До этого был рассмотрен случай, когда $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$, что соответствует колебательному переходному процессу. Рассмотрим случай равенства коэффициента затухания γ и собственной частоты колебаний ω_0 . При $\omega_0^2 - \gamma^2 = 0$ период колебаний $T = 2\pi / \Omega$ обращается в бесконечность в силу следующего соотношения:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}} \rightarrow \infty. \quad (13)$$

При рассмотрении данного случая удобно искать решение уравнения (6) в виде $I_s(t) = \frac{X_s}{\omega_0^2} + \xi(t) e^{-\gamma t}$, где была введена некоторая вспомогательная функция $\xi(t)$. Тогда при $\omega_0^2 - \gamma^2 = 0$ получим, что функция $\xi(t)$ должна удовлетворять уравнению $\ddot{\xi} = 0$. Удовлетворив начальным условиям, в результате получим следующее выражение для сверхпроводящего тока:

$$I_s(t) = \frac{\varepsilon}{r} \left\{ 1 - e^{-\gamma t} \left[1 + t(\gamma - rc^2 / L_s) \right] \right\}. \quad (14)$$

Подставив зависимость сверхпроводящего тока (14) в (2), найдем нормальный ток:

$$I_n(t) = \frac{\varepsilon}{r} \left(2\gamma - \frac{L_s}{rc^2} \gamma^2 - \frac{rc^2}{L_s} \right) t e^{-\gamma t}. \quad (15)$$

Выражение в скобках в (15) можно свести к более простому виду, если учесть равенство коэффициента затухания и собственной частоты колебаний ($\gamma^2 = \omega_0^2$) в апериодическом процессе:

$$\begin{aligned} 2\gamma - \frac{L_s}{rc^2} \gamma^2 - \frac{rc^2}{L_s} \gamma^2 &= \frac{c^2 R_n}{L_n} + \frac{rc^2}{L_n} - \frac{L_s}{rc^2} \gamma^2 = \\ &= \frac{c^2 R_n}{L_n} + \frac{rc^2}{L_n} - \frac{L_s}{rc^2} \omega_0^2 = \frac{rc^2}{L_n}. \end{aligned}$$

Таким образом, нормальный ток будет определяться следующим образом:

$$I_n(t) = \frac{\varepsilon c^2}{L_n} t e^{-\gamma t}. \quad (16)$$

Полный ток в переходном процессе при замыкании ключа в цепи будет описываться следующей функциональной зависимостью:

$$I(t) = I_s(t) + I_n(t) = \frac{\varepsilon}{r} \left\{ 1 - e^{-\gamma t} \left(1 + \left(\gamma - \frac{rc^2}{L_s} - \frac{rc^2}{L_n} \right) t \right) \right\}. \quad (17)$$

Для апериодического переходного процесса (при $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$) аналогичным образом проведя соответствующие математические

выкладки и удовлетворив соответствующим начальным условиям, в конечном итоге получим следующую зависимость для сверхпроводящего тока:

$$I_s(t) = \frac{\varepsilon}{r} \left(1 + \frac{\alpha_2 - rc^2 / L_s}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{-\alpha_1 t} - \frac{\alpha_1 - rc^2 / L_s}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{-\alpha_2 t} \right), \quad (18)$$

где введены обозначения $\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, $\alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Вышеприведенное выражение (18) можно записать через гиперболические функции:

$$I_s(t) = \frac{\varepsilon}{r} \left(1 - e^{-\gamma t} \left(\frac{\operatorname{ch} \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t + \frac{\gamma - rc^2 / L_s}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t \right) \right).$$

Подставив (18) в (2), после математических преобразований получим зависимость для нормального тока в апериодическом переходном процессе ($\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$):

$$I_n(t) = \frac{\varepsilon c^2}{L_n} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \operatorname{sh} \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t. \quad (19)$$

Полный ток в апериодическом переходном процессе $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$ в эквивалентной электрической схеме есть сумма сверхпроводящего (18) и нормального (19) токов:

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{r} \left(1 - e^{-\gamma t} \left(\frac{\operatorname{ch} \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t + \frac{\gamma - rc^2 / L_s - rc^2 / L_n}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t \right) \right).$$

Электрическое поле в сверхпроводнике, действующее на нормальные и сверхпроводящие электроны

Для колебательного переходного процесса (случай $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$) получим выражение для электрического поля в сверхпроводнике E_s , ускоряющего сверхпроводящие электроны. Для того, чтобы показать основные физические процессы, протекающие в сверхпроводниках, на переменных токах, и не затенять идеи,

заложенные в эквивалентной электрической схеме на основе двухжидкостной модели, на данном этапе не будут рассматриваться вопросы, связанные с распределением сверхпроводящего тока по сечению сверхпроводящей ленты (хотя это можно сделать при необходимости), а также эффекты, связанные с распариванием куперовских пар (согласно одному из механизмов возникновения сверхпроводящего состояния) при увеличении их скорости под действием индуцированного ускоряющего электрического поля от источника тока.

По определению сверхпроводящий ток можно записать как произведение плотности тока на поперечное сечение, т.е. $I_s(t) = j_s(t) \Delta S^*$, где ΔS^* – эффективная площадь поперечного сечения сверхпроводящей ленты, по которой протекает транспортный ток, а плотность тока запишем через произведение концентрации n_s , заряда и скорости сверхпроводящих электронов: $\mathbf{j}_s(t) = -n_s e \mathbf{V}_s(t)$. Используя (8), получим выражение для скорости сверхпроводящих электронов $V_s(t)$:

$$V_s(t) = -\frac{\varepsilon}{r n_s e \Delta S^*} \times \left\{ 1 - e^{-\gamma t} \left(\cos \Omega t + \frac{(\gamma - rc^2 / L_s)}{\Omega} \sin \Omega t \right) \right\}. \quad (20)$$

Следует отметить, что под n_s и e будем понимать концентрацию и заряд сверхпроводящих электронов соответственно, а не куперовских пар. Если под зарядом понимать заряд пары $2e$, а под n_s концентрацию куперовских пар, которых в два раза меньше по сравнению с общим количеством сверхпроводящих электронов, то в любом случае плотность сверхпроводящего тока, которая определяется как произведение соответствующих величин $\mathbf{j}_s(t) = -n_s e \mathbf{V}_s(t)$, останется такой же.

Запишем уравнение для сверхпроводящих электронов (или так называемое первое уравнение Лондонов), т.е. без учета релаксационного члена, описывающего диссипацию энергии вследствие взаимодействия электронов с кристаллической решеткой:

$$m_s^* \frac{d\mathbf{V}_s(t)}{dt} = -e\mathbf{E}(t), \quad (21)$$

где m_s^* – эффективная масса сверхпроводящих электронов. Определив скорость сверхпроводящих электронов из выражения (8) и связи $I_s(t) = -n_s e V_s \Delta S^*$, получим функциональную зависимость электрического поля от времени для колебательного переходного процесса (случая $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$):

$$E(t) = \frac{\varepsilon}{r} \frac{1}{(n_s e^2 / m_s^*) \Delta S^*} e^{-\gamma t} \times \left(\frac{(\gamma(\gamma - rc^2 / L_s) + \Omega^2)}{\Omega} \sin \Omega t + \frac{rc^2}{L_s} \cos \Omega t \right). \quad (22)$$

Из (22) видно, что с течением времени электрическое поле экспоненциально затухает, т. е. при временах $\tau \gg 1/\gamma$ электрическое поле стремится к нулю $E(t) \rightarrow 0$. Таким образом, на постоянном токе в установившемся режиме электрическое поле в сверхпроводнике равно нулю, как и должно быть. В противном случае даже бесконечно малая величина электрического поля приводила бы к бесконечным значениям сверхпроводящего тока в сверхпроводнике, что противоречило бы физическому смыслу. Используя выражение (18), аналогично можно получить действующее электрическое поле и для апериодического случая $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$:

$$E(t) = \frac{\varepsilon}{r} \frac{1}{(n_s e^2 / m_s^*) \Delta S^*} \times \left(\frac{\alpha_2 (\alpha_1 - rc^2 / L_s)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{-\alpha_2 t} - \frac{\alpha_1 (\alpha_2 - rc^2 / L_s)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{-\alpha_1 t} \right), \quad (23)$$

где $\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, $\alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.

Определение инерционных индуктивностей (L_n, L_s) для нормальных и сверхпроводящих электронов

В результате с помощью эквивалентной электрической схемы сверхпроводников, состоящей из двух ветвей, по которым отдельно протекают нормальные и сверхпроводящие

токи, получены различные зависимости – зависимости нормального и сверхпроводящего токов от времени, электрического поля, ускоряющего нормальные и сверхпроводящие электроны. Также получена оценка для характерного времени затухания нормального тока и электрического поля до установления стационарного режима. Однако во всех этих уравнениях присутствуют неизвестные параметры элементов цепи – L_n, L_s, R_n, γ и ω_0 . Для того, чтобы определить недостающие коэффициенты, характеризующие макропараметры системы, необходимо связать их с микроскопическими параметрами, записав уравнения для нормальных и сверхпроводящих электронов. Запишем уравнения движения для нормальных и сверхпроводящих электронов:

$$\begin{cases} m_n^* \frac{d\mathbf{V}_n(t)}{dt} = -\frac{m_n^*}{\tau} \mathbf{V}_n(t) - e\mathbf{E}(t), \\ m_s^* \frac{d\mathbf{V}_s(t)}{dt} = -e\mathbf{E}(t) \end{cases} \quad (24)$$

где $\mathbf{V}_n, \mathbf{V}_s, m_n^*$ и m_s^* – скорости и эффективные массы нормальных и сверхпроводящих электронов соответственно, τ – время релаксации нормальных электронов в сверхпроводящем материале.

Умножим первое уравнение в (24) на $(-en_n)$, а второе – на $(-en_s)$, где n_n и n_s – концентрации нормальных и сверхпроводящих электронов согласно двухжидкостной модели сверхпроводников, и используем определение плотности соответствующих токов $\mathbf{j}_n(t) = -en_n \mathbf{V}_n(t)$, $\mathbf{j}_s(t) = -en_s \mathbf{V}_s(t)$, в результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \tau \frac{d\mathbf{j}_n(t)}{dt} + \mathbf{j}_n(t) = \alpha_n \sigma_0 \mathbf{E}(t), \\ \tau \frac{d\mathbf{j}_s(t)}{dt} = \alpha_s \sigma_0 \left(\frac{m_n^*}{m_s^*} \right) \mathbf{E}(t), \end{cases} \quad (25)$$

где были введены следующие обозначения: $\sigma_0 = ne^2 \tau / m_n^*$ – удельная электропроводность сверхпроводящего материала, находящегося в нормальном состоянии, $\alpha_s = n_s / n$, $\alpha_n = n_n / n$ – доли сверхпроводящих и нормальных элек-

тронов, n – концентрация всех электронов проводимости (сумма всех сверхпроводящих и нормальных электронов).

Умножим первое уравнение в (26) на $(\Delta l / \alpha_n \sigma_0)$, где Δl – длина сверхпроводящей ленты, и учтем, что нормальный ток равен $I_n = j_n \Delta S^*$, где ΔS^* – эффективная площадь поперечного сечения, по которой фактически протекает нормальный ток:

$$\frac{\tau}{\Delta S} \frac{\Delta l}{\alpha_n \sigma_0} \frac{d\mathbf{I}_n(t)}{dt} + \mathbf{I}_n(t) \frac{\Delta l}{\alpha_n \sigma_0 \Delta S} = \Delta l \mathbf{E}(t). \quad (26)$$

Сопоставив (26) с (10), которое было получено для замкнутого контура, охватывающего ветви, по которым протекает сверхпроводящий и нормальный токи, положим, что

$$R_n \equiv \frac{\Delta l}{\alpha_n \sigma_0 \Delta S^*}, \quad \frac{1}{c^2} L_n \equiv \frac{\tau}{\Delta S^*} \frac{\Delta l}{\alpha_n \sigma_0} = \tau R_n. \quad (27)$$

В этом случае выражение для R_n полностью согласуется с общеизвестным выражением для сопротивления элемента проводника длиной Δl с эффективной площадью поперечного сечения ΔS^* и удельным сопротивлением $1/\sigma_0$ с учетом того, что концентрация носителей тока равна $\alpha_n n$. Если удельная проводимость σ_0 и площадь поперечного сечения ΔS^* изменяются по длине проводника, то эти выражения необходимо переписать через интегральные соотношения:

$$R_n = \int \frac{dl}{\alpha_n \sigma_0 \Delta S^*(l)}, \quad \frac{1}{c^2} L_n = \int \frac{\tau}{\Delta S^*(l)} \frac{dl}{\sigma_0}. \quad (28)$$

Для того, чтобы сопоставляемые уравнения (10) и (26) были полностью согласованы друг с другом, необходимо, чтобы правые части двух соответствующих уравнений были равны друг другу, поэтому запишем:

$$\frac{1}{c^2} L_s \frac{d\mathbf{I}_s(t)}{dt} = \Delta l \mathbf{E}(t). \quad (29)$$

Для того, чтобы найти инерционную индуктивность для сверхпроводящих электронов L_s , воспользуемся вторым уравнением в (25), которое по своей сути является модификацией первого уравнения Лондонов для движения

сверхпроводящих электронов, умножив его на эффективную площадь поперечного сечения сверхпроводника ΔS^* , в результате получим следующее уравнение:

$$\tau \frac{d\mathbf{I}_s(t)}{dt} = \alpha_s \sigma_0 \Delta S^* \left(\frac{m_n^*}{m_s^*} \right) \mathbf{E}(t). \quad (30)$$

Путем сопоставления (29) и (30), получим выражение для инерционной индуктивности для сверхпроводящих электронов L_s :

$$L_s = \frac{\tau c^2}{\alpha_s \sigma_0 \Delta S^*} \left(\frac{m_s^*}{m_n^*} \right) \Delta l. \quad (31)$$

Для изменяющейся площади поперечного сечения сверхпроводника также запишем выражение (31) в интегральной форме:

$$L_s = \frac{c^2}{\alpha_s} \left(\frac{m_s^*}{m_n^*} \right) \int \frac{\tau dl}{\sigma_0 \Delta S^*}. \quad (32)$$

Отношение эффективных инерционных индуктивностей для сверхпроводящей и нормальной фаз будет зависеть от отношения долей концентраций и эффективных масс сверхпроводящих и нормальных электронов:

$$\frac{L_s}{L_n} = \frac{\alpha_n}{\alpha_s} \left(\frac{m_s^*}{m_n^*} \right). \quad (33)$$

Проведем математические преобразования в выражениях для инерционных индуктивностей L_n и L_s :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} L_n &= \tau R_n = \frac{\tau}{\Delta S^*} \frac{\Delta l}{\alpha_n \sigma_0} = \frac{\tau \Delta l}{\Delta S^*} \frac{m_n^*}{\alpha_n n e^2 \tau} = \\ &= \frac{m_n^*}{n_n e^2} \frac{\Delta l}{\Delta S^*} = \frac{m_n^*}{4\pi n_n e^2} 4\pi \frac{\Delta l}{\Delta S^*} = \frac{4\pi}{\omega_{p,n}^2} \frac{\Delta l}{\Delta S^*}, \\ \frac{1}{c^2} L_s &= \frac{1}{\alpha_s} \left(\frac{m_s^*}{m_n^*} \right) \tau \frac{\Delta l}{\Delta S^*} \frac{m_n^*}{n e^2 \tau} = \\ &= \frac{m_s^*}{n_s e^2} \frac{\Delta l}{\Delta S^*} = 4\pi \frac{m_s^*}{4\pi n_s e^2} \frac{\Delta l}{\Delta S^*} = \frac{4\pi}{\omega_{p,s}^2} \frac{\Delta l}{\Delta S^*}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\omega_{p,n} = \sqrt{4\pi n_n e^2 / m_n^*}$ – плазменная (или так называемая ленгмюровская) частота для нормальных электронов в сверхпроводнике, которая, как правило, возникает в уравнениях ко-

лебаний плазмы при неподвижных ионах при воздействии электрического поля. Аналогичным образом введена плазменная частота и для сверхпроводящих электронов

$$\omega_{p,s} = \sqrt{4\pi n_s e^2 / m_s^*}.$$

Заметим, что согласно (34) L_n и L_s обратно пропорциональны квадрату соответствующих плазменных частот. При увеличении плазменных частот $\omega_{p,n}$ и $\omega_{p,s}$ введенные эффективные индуктивности, характеризующие инерционные свойства различных «сортов» электронов, будут уменьшаться по величине, что будет соответствовать уменьшению инертных свойств, т. е. уменьшению некоторой «эффективной массы» электронов.

Величину L_n / L_s можно выразить через отношение плазменных частот для нормальных и сверхпроводящих электронов:

$$\frac{L_n}{L_s} = \frac{\omega_{p,s}^2}{\omega_{p,n}^2}. \quad (35)$$

Также инерционные индуктивности можно записать через глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник:

$$\begin{cases} L_n = \frac{4\pi c^2}{\omega_{p,n}^2} \frac{\Delta l}{\Delta S^*} = \frac{4\pi \lambda_L^2}{\alpha_n} \left(\frac{m_n^*}{m_s^*} \right) \frac{\Delta l}{\Delta S^*}, \\ L_s = \frac{4\pi c^2}{\omega_{p,s}^2} \frac{\Delta l}{\Delta S^*} = \frac{4\pi \lambda_L^2}{\alpha_s} \frac{\Delta l}{\Delta S^*}, \end{cases} \quad (36)$$

где $\lambda_L^2 = \frac{m_s^* c^2}{4\pi n e^2}$ – квадрат лондоновской глубины проникновения магнитного поля, где n – полная концентрация электронов проводимости. По сути параметр λ_L соответствует глубине проникновения магнитного поля при нулевой температуре $T = 0$ [K]. Следует отметить, что в выражении для λ_L^2 фигурирует именно эффективная масса сверхпроводящих электронов m_s^* .

Преобразуем ранее введенные параметры, входящие в зависимости сверхпроводящего и нормального токов, электрического поля от времени – собственную частоту колебаний ω_0 , коэффициент затухания γ с помощью полученных соотношений для введенных макро-

скопических параметров эквивалентной электрической схемы R_n , L_n и L_s согласно (27), (34) и (36).

$$\omega_0^2 = \frac{c^4 r R_n}{L_s L_n} = \frac{r c^2}{L_s \tau} = \frac{\alpha_s n e^2 \Delta S^* r}{m_s^* \Delta l \tau}. \quad (37)$$

$$\begin{aligned} 2\gamma &= c^2 \left(\frac{R_n}{L_n} + \frac{r}{L_n} + \frac{r}{L_s} \right) = \\ &= \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau} \frac{r}{R_n} + \frac{1}{\tau} \frac{r}{R_n} \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_n} \right) \left(\frac{m_n^*}{m_s^*} \right), \\ 2\gamma &= \frac{1}{\tau} \left\{ 1 + \frac{r}{R_n} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\alpha_n} \frac{m_n^*}{m_s^*} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

где r – внутреннее сопротивление источника тока.

Для того, чтобы узнать какой случай рассматривать $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$ или $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$ (колебательный или апериодический) при решении классических уравнений колебаний для сверхпроводящих и нормальных токов, необходимо оценить разницу $\omega_0^2 - \gamma^2$ в зависимости от конкретного случая (например, от величин температуры или внутреннего сопротивления источника тока):

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \gamma^2 &= \frac{1}{\tau^2} \frac{r}{R_n} \frac{\alpha_s}{\alpha_n} \frac{m_n^*}{m_s^*} - \\ &- \frac{1}{4\tau^2} \left\{ 1 + \frac{r}{R_n} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\alpha_n} \frac{m_n^*}{m_s^*} \right) \right\}^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Также формально можно ввести добротность $Q = \omega_0 / 2\gamma$ рассматриваемой эквивалентной электрической цепи:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\sqrt{\frac{r}{R_n} \frac{\alpha_s}{\alpha_n} \frac{m_n^*}{m_s^*}}}{\left\{ 1 + \frac{r}{R_n} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\alpha_n} \frac{m_n^*}{m_s^*} \right) \right\}}.$$

Следует отметить, что после того, как были определены макроскопические параметры эквивалентной электрической цепи сверхпроводника (инерционные индуктивности L_n , L_s и сопротивление нормальной фазы R_n), то можно легко убедиться в том, что зависимость

электрического поля от времени также можно получить из уравнения движения для нормальных электронов. Умножив первое уравнение в (24) на выражение $(-en_n \tau \Delta S / m_n^*)$ и учитывая, что $I_n(t) = (-en_n \mathbf{V}_n) \Delta S^*$, получим следующее уравнение:

$$\tau \frac{dI_n(t)}{dt} + I_n(t) = \alpha_n \sigma_0 E(t) \Delta S^*. \quad (40)$$

Подставив в (40) зависимость для нормального тока $I_n(t)$ из (11) или (19) в зависимости от типа переходного процесса (колебательного или апериодического) и проведя соответствующие математические преобразования, можно получить зависимость электрического поля, действующего на нормальные электроны, от времени, которое будет совпадать с выражениями (22) или (23), что показывает согласованность уравнений.

Несколько слов по эффективным массам сверхпроводящих и нормальных электронов (m_s^* и m_n^* соответственно). Следует отметить, что в общем случае эффективная масса двух типов электронов в сверхпроводниках может различаться. Основной физический смысл эффективной массы связан с взаимодействием электронов (или дырок) с периодической структурой кристалла. Эффективную массу нормальных электронов m_n^* в сверхпроводнике, находящегося в нормальном состоянии, следует определять стандартным способом через дисперсионное соотношение $E(k)$:

$$m_{ij}^{-1} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial k_i \partial k_j}, \text{ где можно заметить, что } m_{ij}^{-1}$$

представляет собой тензор второго ранга. Для простейшего случая (изотропного материала) эффективную массу можно представить как

$$m^* = \hbar^2 \left(\frac{d^2 E}{dk^2} \right)^{-1}. \text{ Согласно справочным дан-}$$

ным [30, 31], в основном для различных типов материалов эффективная масса электронов находится в диапазоне $m^* / m_e \sim 0,01 - 2$, где m_e – масса электрона. Безусловно для отдельных материалов может и выходить за пределы указанного диапазона, все зависит от типа кристаллической решетки.

Эффективную массу сверхпроводящих электронов m_s^* также необходимо вычислять из дисперсионного соотношения согласно микроскопической теории сверхпроводимости, что безусловно является непростой задачей. m_s^* можно оценить с помощью экспериментальных данных, например, измерив глубину проникновения магнитного поля λ в сверхпроводник и используя соотношение $m_s^* = \frac{4\pi n_s e^2 \lambda^2}{c^2}$. Также следует иметь ввиду, что сверхпроводники II-го рода обладают анизотропными свойствами, поэтому эффективные массы сверхпроводящих электронов в разных плоскостях сверхпроводника (ab и c) отличаются друг от друга, причем, как правило, выполняется следующее соотношение $m_{\perp} \gg m_{\parallel} \sim m_e$, где m_e – электронная масса [16].

Случай переменной электродвижущей силы источника тока

Пусть теперь ЭДС источника тока $\varepsilon(t)$ будет меняться периодическим образом как функция $\cos \omega t$ (или в комплексной записи $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$). Реальный физический смысл будет иметь только действительная часть комплексного числа. Эквивалентная схема сверхпроводника в случае переменного ЭДС представлена на рис. 2.

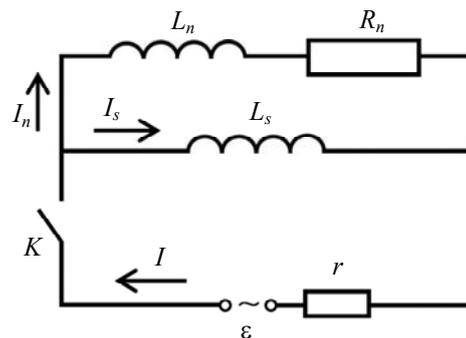


Рис. 2. Эквивалентная электрическая схема сверхпроводника в случае переменной электродвижущей силы источника тока $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$

Выразим из первых двух уравнений системы (1) нормальный ток:

$$I_n(t) = \frac{1}{r} \left(\varepsilon - \frac{1}{c^2} L_s \dot{I}_s(t) - I_s(t) r \right). \quad (41)$$

Подставив нормальный ток (41) в третье уравнение системы (1) и проведя соответствующие математические выкладки, приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению колебаний второго порядка для сверхпроводящего тока для переменного ЭДС источника тока:

$$\ddot{i}_s + \left(\frac{c^2 r}{L_s} + \frac{c^2 (R_n + r)}{L_n} \right) \dot{i}_s + \frac{c^4 r R_n}{L_n L_s} i_s = \left(\frac{c^4 R_n}{L_n L_s} + \frac{\omega c^2}{L_s} i \right) \varepsilon_0 e^{i\omega t}. \quad (42)$$

Преобразуя слагаемое в комплексной форме в правой части (42) через амплитуду и комплексную экспоненту, получим:

$$\left(\frac{c^4 R_n}{L_n L_s} + \frac{\omega c^2}{L_s} i \right) = \frac{c^2}{L_s} \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{c^2 R_n}{L_n} \right)^2} e^{i\varphi}, \quad (43)$$

$$\varphi = \arctg \left(\frac{\omega L_n}{c^2 R_n} \right).$$

$$I_s(t) = \frac{X_{0s}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i \omega} e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-\gamma t} (C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t) = \frac{X_{0s} (\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} (\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)) + e^{-\gamma t} (C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t), \quad (45)$$

где $\Omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$ (при $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$).

Удовлетворив начальным условиям задачи $I_s(0) = 0$, $\dot{I}_s(0) = \varepsilon_0 c^2 / L_s$, получим достаточно громоздкое выражение:

$$I_s(t) = \frac{X_{0s} \{ (\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \varphi) + 2\gamma\omega \sin(\omega t + \varphi) \}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} + e^{-\gamma t} \{ C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t \}, \quad (46)$$

$$\begin{cases} C_1 = - \frac{X_{0s} \{ (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2\gamma\omega \sin \varphi \}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}, \\ C_2 = \frac{\varepsilon c^2}{\Omega L_s} + \frac{X_{0s} \{ \omega [\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma^2] \sin \varphi - \gamma [\omega_0^2 + \omega^2] \cos \varphi \}}{\Omega \{ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2 \}}. \end{cases}$$

Видно, что второе слагаемое в (46) экспоненциально затухает с течением времени, и при $t \gg 1/\gamma$ сверхпроводящий ток стремится к выражению вида:

$$I_s(t) = \frac{X_{0s} \{ (\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t + \varphi) + 2\gamma\omega \sin(\omega t + \varphi) \}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}. \quad (47)$$

В результате приходим к более компактной форме записи (42):

$$\ddot{I}_s(t) + 2\gamma \dot{I}_s(t) + \omega_0^2 I_s(t) = X_{0s} e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad (44)$$

где была введена амплитуда эффективной внешней силы, возбуждающей сверхпроводящий ток $X_{0s} = (c^2 \varepsilon_0 / L_s) \sqrt{\omega^2 + (c^2 R_n / L_n)^2}$, $\varphi = \arctg(\omega L_n / c^2 R_n)$. Таким образом, амплитуда «внешней силы» X_{0s} и соответствующий сдвиг фаз φ будут зависеть от частоты изменения внешнего напряжения в электрической цепи – $X_{0s} = X_{0s}(\omega)$, $\varphi = \varphi(\omega)$.

Общее решение неоднородного уравнения можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения (с нулевой правой частью) и частного решения неоднородного (с ненулевой правой частью). Тогда сверхпроводящий ток будет зависеть от времени следующим образом:

Преобразуя зависимость в фигурных скобках в (47) и перейдя к косинусу с дополнительным сдвигом фаз, получим:

$$I_s(t) = \frac{c^2 \epsilon_0}{L_s} \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{c^2 R_n}{L_n}\right)^2} \times \frac{\cos(\omega t + \varphi - \delta_1)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}, \quad (48)$$

где сдвиги фаз соответственно выражаются следующим образом: $\text{tg}\delta_1 = 2\gamma\omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$, $\varphi(\omega) = \text{arctg}(\omega L_n / c^2 R_n)$.

Амплитуда сверхпроводящего тока является функцией частоты и на определенной частоте должен достигаться резонанс сверхпроводящего тока.

$$I_{s0} = \frac{c^2 \epsilon_0}{L_s} \sqrt{\frac{\omega^2 + (c^2 R_n / L_n)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}. \quad (49)$$

Взяв производную по частоте от подкоренного выражения в (49) и приравняв ее к нулю, получим частоту, при которой сверхпроводящий ток I_{s0} имеет резонанс:

$$\omega_{res}^2 = -\left(\frac{c^2 R_n}{L_n}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{c^2 R_n}{L_n}\right)^4 + \omega_0^4 + 2\left(\frac{c^2 R_n}{L_n}\right)^2 \omega_0^2 - \left(\frac{2\gamma c^2 R_n}{L_n}\right)^2}. \quad (50)$$

Следует иметь ввиду, что именно резонанс токов будет соответствовать резонансу силы Лоренца f_L , действующей на вихри Абрикосова в сверхпроводнике в смешанном состоянии со стороны транспортного тока j_r , в силу равенства $f_L = \Phi_0 j_r / c$, что в конечном итоге может приводить к увеличению скорости вязкого движения вихревой решетки или срыву вихрей с центров пиннинга и соответственно росту сопротивления в сверхпроводнике.

Теперь найдем зависимость нормального тока в сверхпроводнике от времени в случае переменного ЭДС $\epsilon = \epsilon_0 e^{i\omega t}$. Из первого и третьего уравнений системы (1) найдем сверхпро-

водящий ток $I_s(t) = \frac{1}{r} \left(\epsilon - \frac{1}{c^2} L_n \dot{I}_n - I_n (R_n + r) \right)$.

Подставив сверхпроводящий ток $I_s(t)$ во второе уравнение системы (1) и проведя соответствующие математические преобразования, получим уравнение для нормального тока:

$$\ddot{I}_n + \left(\frac{c^2 (R_n + r)}{L_n} + \frac{c^2 r}{L_s} \right) \dot{I}_n + \frac{c^4 r R_n}{L_s L_n} I_n = \frac{\omega c^2 \epsilon_0}{L_n} e^{i(\omega t + \pi/2)}. \quad (51)$$

Используя обозначения, принятые в (5), запишем (51) в виде:

$$\ddot{I}_n + 2\gamma \dot{I}_n + \omega_0^2 I_n = X_{0n} e^{i(\omega t + \pi/2)}, \quad (52)$$

где $X_{0n} = \omega c^2 \epsilon_0 / L_n$. Решая обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (52) и удовлетворив начальному условию для нормального тока I_n и условию для его первой производной ($I_n(0) = 0$ и $\dot{I}_n(0) = \epsilon_0 c^2 / L_n$), получим:

$$I_n(t) = -\frac{X_{0n} (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2} + \frac{X_{0n} 2\omega\gamma \cos \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2} + e^{-\gamma t} (C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t), \quad (53)$$

где константы C_1 и C_2 равны

$$C_1 = \frac{-X_{0n} 2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2}, \quad (54)$$

$$C_2 = \frac{\epsilon c^2}{\Omega L_n} + \frac{X_{0n} \omega (\omega_0^2 - \omega^2 - 2\gamma^2)}{\Omega \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2 \right)}.$$

При $t \gg 1/\gamma$ правая часть в (53) уничтожается, и нормальный ток будет равен:

$$I_n(t) = \frac{-X_{0n} (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2} + \frac{X_{0n} 2\omega\gamma \cos \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2}. \quad (55)$$

Сведем (55) к следующему виду:

$$I_n(t) = \frac{X_{0n}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2}} \cos(\omega t - \delta_2), \quad (56)$$

где $\operatorname{tg} \delta_2 = -(\omega_0^2 - \omega^2) / 2\omega\gamma$. Амплитуда тока, протекающего через нормальную фазу, равна

$$\begin{aligned} I_{n0} &= \frac{X_{0n}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2}} = \\ &= \frac{\omega c^2 \varepsilon_0 / L_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2}}. \end{aligned} \quad (57)$$

Таким образом, используя выражения (49) и (57), получим отношение амплитуд сверхпроводящего и нормального токов при $t \gg 1/\gamma$:

$$\frac{I_{s0}}{I_{n0}} = \frac{L_n}{L_s \omega} \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{c^2 R_n}{L_n}\right)^2} = \frac{L_n}{L_s} \sqrt{1 + \left(\frac{c^2 R_n}{\omega L_n}\right)^2}. \quad (58)$$

Если учесть (33), то отношение амплитуд можно выразить через доли концентраций и эффективные массы сверхпроводящих и нормальных электронов:

$$\frac{I_{s0}}{I_{n0}} = \frac{\alpha_s}{\alpha_n} \left(\frac{m_n^*}{m_s^*}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2}. \quad (59)$$

Можно рассмотреть различные предельные случаи выражения (59). При малых параметрах $\nu \equiv \omega\tau \ll 1$ отношение амплитуд токов

будет примерно равно $\frac{I_{s0}}{I_{n0}} \approx \frac{\alpha_s}{\alpha_n} \left(\frac{m_n^*}{m_s^*}\right) \frac{1}{\omega\tau}$, в

случае больших значений $\nu = \omega\tau \gg 1$ получим

$\frac{I_{s0}}{I_{n0}} \approx \frac{\alpha_s}{\alpha_n} \left(\frac{m_n^*}{m_s^*}\right)$, т. е. в этом случае зависимость

от частоты пропадает, и отношение амплитуд токов сверхпроводящей и нормальной фазы равно постоянной величине.

Также можно оценить влияние температуры на отношение амплитуд, поскольку концентрации сверхпроводящих и нормальных электронов являются функциями температуры. Глубина проникновения магнитного поля $\lambda(T)$ в сверхпроводник во всем диапазоне температур аппроксимируется следующей зависимостью [16, 17]:

$$\lambda^2(T) = \lambda_L^2 / \left(1 - (T/T_c)^4\right), \quad (60)$$

где λ_L – лондоновская глубина проникновения, $\lambda_L^2 = m_s^* c^2 / 4\pi n e^2$. Доли концентраций сверхпроводящих и нормальных электронов определяются как $\alpha_s = n_s / n$, $\alpha_n = n_n / n$. Очевидно, что сумма долей концентраций равна единице $\alpha_s + \alpha_n = 1$. Отсюда, используя (60) легко получить зависимость концентраций сверхпроводящих и нормальных электронов от температуры, $n_s(T) = n \left(1 - (T/T_c)^4\right)$, $n_n = n (T/T_c)^4$. Тогда доли концентраций α_s и α_n будут зависеть от температуры аналогичным образом:

$$\alpha_s(T) = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4, \quad \alpha_n = \left(\frac{T}{T_c}\right)^4. \quad (61)$$

В итоге отношение амплитуд токов разных фаз будет зависеть от температуры как

$$\frac{I_{s0}}{I_{n0}} = \frac{1 - (T/T_c)^4}{(T/T_c)^4} \left(\frac{m_n^*}{m_s^*}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega\tau}\right)^2}. \quad (62)$$

Чем отношение I_{s0} / I_{n0} будет меньше, тем выделение энергии в виде джоулева тепла при возбуждении нормальных электронов.

Вычислим тепловыделение за счет возбуждения нормальной фазы переменным ЭДС источника тока $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$. Из физических соображений ясно, что напряжение ε представляет собой работу, которую совершает источник тока за время dt , на единицу протекшего заряда dq , т. е. $\varepsilon = \delta A / dq$. Тогда средняя мощность источника тока будет определяться как полная работа в единицу времени $\langle P \rangle = \left\langle \varepsilon \frac{dq_n}{dt} \right\rangle = \langle \varepsilon I_n \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 I_{n0} \cos \delta_2$. Тогда подставив (57) и сдвиг фаз δ в (77), получим:

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\omega c^2 \varepsilon_0^2 / L_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2}} \times \\ &\times \cos \left(\arctg \left(-\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega\gamma} \right) \right) = \frac{\gamma \omega^2 c^2 \varepsilon_0^2 / L_n}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma)^2}, \end{aligned} \quad (63)$$

где $\langle P \rangle$ – средняя (за период) мощность источника тока. Видно, что мощность является функцией частоты. Оценим частоту, при которой достигается резонанс мощности, продифференцировав по частоте. Получим, что резонанс мощности источника тока достигается при внешней частоте равной частоте собственных колебаний, т. е. при $\omega_{res} = \omega_0$. Максимальная мощность источника тока равна

$$\begin{aligned} \langle P_{max} \rangle &= \frac{1}{4} \frac{c^2 \varepsilon_0^2}{\gamma L_n} = \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0^2}{\gamma \tau R_n} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0^2 / R_n}{\left\{ 1 + \frac{r}{R_n} \left(1 + \frac{\alpha_s m_n^*}{\alpha_n m_s^*} \right) \right\}} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0^2}{\left\{ R_n + r \left(1 + \frac{\alpha_s m_n^*}{\alpha_n m_s^*} \right) \right\}}, \end{aligned} \quad (64)$$

где R_n определяется выражением (27).

Вычислим электрическое поле, действующее на нормальные и сверхпроводящие электроны в сверхпроводнике, при переменном напряжении источника тока. Сверхпроводящий ток при $t \gg 1/\gamma$ зависит от времени и частоты следующим образом:

$$I_s(t) = \frac{\varepsilon_0 c^2}{L_s} \sqrt{\frac{\omega^2 + (1/\tau)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} e^{i(\omega t + \varphi - \delta_1)}, \quad (65)$$

где $\varphi(\omega) = \arctg \omega \tau$, $\delta_1(\omega) = \arctg(2\gamma\omega / (\omega_0^2 - \omega^2))$.

Электрическое поле найдем через производную по времени от сверхпроводящего тока, используя (29), (65):

$$\begin{aligned} E(\omega, t) &= \frac{1}{\Delta l} \frac{1}{c^2} L_s \frac{dI_s(t)}{dt} = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\Delta l} \omega \sqrt{\frac{\omega^2 + (1/\tau)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} e^{i(\omega t + \varphi - \delta_1 + \pi/2)}. \end{aligned} \quad (66)$$

Из (66) видно, что в случае постоянного напряжения источника тока, т. е. при нулевой частоте ($\omega = 0$), электрическое поле в сверхпроводнике, являющееся функцией частоты, равно нулю, как и должно быть на постоянном

токе. Зависимость для электрического поля как в (66) также можно получить из соответствующих уравнений, используя ток, протекающий через нормальную фазу сверхпроводника.

Формально проверим тепловыделение (объемную мощность q_v) в сверхпроводнике за счет возбуждения сверхпроводящего тока $q_{vs} = \langle \mathbf{j}_s(t) \cdot \mathbf{E}(t) \rangle = \frac{1}{2} j_{s0} E_0 \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Очевидно, что оно равно нулю, как и должно быть. Теперь вычислим тепловыделение в сверхпроводнике за счет возбуждения нормальных электронов при гармоническом изменении ЭДС источника тока:

$$\begin{aligned} q_{vn} &= \langle \mathbf{j}_n(t) \cdot \mathbf{E}(t) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} j_{n0} E_0 \cos \left(\varphi - \delta_1 + \frac{\pi}{2} + \delta_2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \varepsilon_0^2}{\Delta S \Delta l \tau^2 R_n} \frac{1}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2 \right]}. \end{aligned} \quad (67)$$

Используя выражение (27) для эффективного сопротивления R_n , получим:

$$q_{vn} = \frac{1}{2} \alpha_n \sigma_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\Delta l} \right)^2 \frac{\omega^2 / \tau^2}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2 \right]}. \quad (68)$$

Аналогично можно получить максимальное значение тепловыделения за счет возбуждения нормальных электронов ($q_{vn})_{max}$:

$$(q_{vn})_{max} = \frac{1}{2} \alpha_n \sigma_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\Delta l} \right)^2 \frac{1}{(2\gamma\tau)^2}. \quad (69)$$

Оценка макроскопических параметров эквивалентной электрической схемы сверхпроводников

Для дальнейших оценок полученных макроскопических параметров (инерционных индуктивностей для нормальных и сверхпроводящих электронов и эффективного сопротивления) в эквивалентной электрической цепи воспользуемся некоторыми характерными величинами для высокотемпературного сверхпроводника $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$, представлен-

ными в работе [32]. Концентрация электронов проводимости равна $n = 1,68 \times 10^{21} \text{ см}^{-3}$, время релаксации нормальных электронов $\tau = 5 \times 10^{-14} \text{ с}$. Тогда в системе СГС удельная проводимость будет равна $\sigma_0 = 2,127 \times 10^{16} \text{ с}^{-1}$ или $\sigma_0 \approx 2,36 \times 10^6 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Безусловно удельная проводимость материала σ_0 , концентрация электронов проводимости n и время релаксации нормальных электронов τ являются функциями температуры, но для оценки характерных значений и понимания диапазона изменения ранее введенных макроскопических параметров будем считать их постоянными. В более общем случае необходимо учитывать температурные зависимости физических величин, т. е. $n = n(T)$, $\sigma_0 = \sigma_0(T)$ и $\tau = \tau(T)$ для каждого сверхпроводящего материала.

Для простоты будем считать, что эффективные массы электронов примерно равны между собой и сопоставимы с массой свободного электрона, т. е. $m_n^* \approx m_s^* \approx m_e$, тогда инерционные индуктивности будут определяться как $L_n = \frac{4\pi\lambda_L^2 \Delta l}{\alpha_n \Delta S^*}$ и $L_s = \frac{4\pi\lambda_L^2 \Delta l}{\alpha_s \Delta S^*}$. В дальнейшем будем рассматривать два диапазона температур $0 \leq T \ll T_c$ и $T \sim T_c$. Тогда для первого диапазона будет справедливо, что глубина проникновения магнитного поля будет соответствовать лондоновской глубине проникновения $\lambda(T) \approx \lambda_L$, а эффективная площадь поперечного сечения очевидно будет равна $\Delta S^* \approx 2\lambda_L \Delta a$, где Δa – ширина сверхпроводящей ленты. Коэффициент «2» связан с тем, что ток будет протекать как в нижнем, так и верхнем поверхностных слоях ленты за счет вытеснения тока к границам. Вблизи критической температуры $T \sim T_c$ согласно эмпирической зависимости (60) для глубины проникновения будет справедливо следующее соотношение $\lambda(T) \gg \lambda_L$, поэтому можно считать, что ток будет распределен по всему сечению ленты, т. е. $\Delta S^* \approx \Delta l_z \Delta a$, где Δl_z – толщина сверхпроводящего слоя, что и происходит в обычных проводниках при небольших частотах переменного тока (без учета скин-

эффекта). Также учтем, что при температурах $0 \leq T \ll T_c$ доля концентраций сверхпроводящих электронов равна $\alpha_s = 1 - (T/T_c)^4 \approx 1$, а при $T \sim T_c$ доля концентраций нормальных электронов примерно равна $\alpha_n = (T/T_c)^4 \approx 1$. С учетом этого получим выражения для оценки минимальных значений инерционных индуктивностей: $(L_s)_{\min} = \frac{2\pi\lambda_L \Delta l}{\Delta a}$ и $(L_n)_{\min} = \frac{4\pi\lambda_L^2 \Delta l}{\Delta a \Delta l_z} = \frac{2\lambda_L}{\Delta l_z} (L_s)_{\min}$. Однако при изменении температуры эти параметры неограниченно возрастают, т. е. в диапазоне температур $T \in [0; T_c]$ справедливо $(L_s)_{\min} \leq L_s < \infty$ и $(L_n)_{\min} \leq L_n < \infty$. Для индуктивностей можно приближенно написать:

$$L_n \approx \frac{(L_n)_{\min}}{\alpha_n}, \quad L_s \approx \frac{(L_s)_{\min}}{\alpha_s}. \quad (70)$$

Приближение связано с тем, что согласно вышесказанному в (70) не учитывается зависимость эффективной площади поперечного сечения ΔS^* , по которой протекает ток, от температуры, которая также зависит от геометрических параметров ВТСП-ленты. При необходимости это можно сделать. Ниже представлены графики зависимостей инерционных индуктивностей, определенных формулами (70):

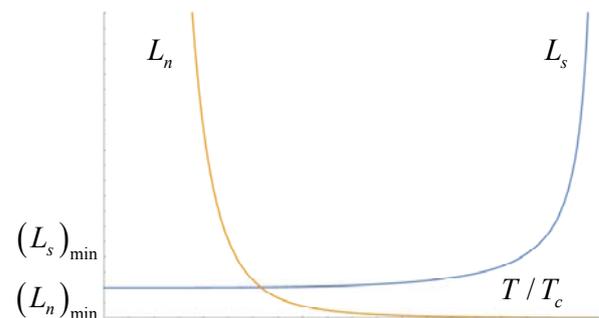


Рис. 3. Графики зависимостей инерционных индуктивностей L_n, L_s в зависимости от относительной температуры T/T_c

Отметим, что неправомерно сравнивать друг с другом величины магнитной (связанной с изменением магнитного потока) и инерци-

онных индуктивностей, поскольку в эквивалентной электрической схеме присутствуют параллельные контуры, в котором происходят различные переходные процессы между нормальным и сверхпроводящим токами. Кроме того, инерционные индуктивности варьируются в широком диапазоне значений от некоторого минимального $(L_s)_{\min}$ и $(L_n)_{\min}$ до бесконечности при изменении температуры согласно зависимостям (70) и рис. 3.

Из соотношения (27) следует, что эффективное сопротивление можно определить через инерционную индуктивность L_n как $R_n = L_n / c^2 \tau$. Тогда легко получить минимальное значение сопротивления за счет возбуждения нормальных электронов $(R_n)_{\min} = (L_n)_{\min} / c^2 \tau = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\Delta l}{\Delta S^*}$. При изменении температуры в диапазоне $T \in [0; T_c]$ согласно соотношению $R_n \approx (R_n)_{\min} / \alpha_n$ эффективное сопротивление будет варьироваться в диапазоне $(R_n)_{\min} \leq R_n < \infty$ (рис. 4).

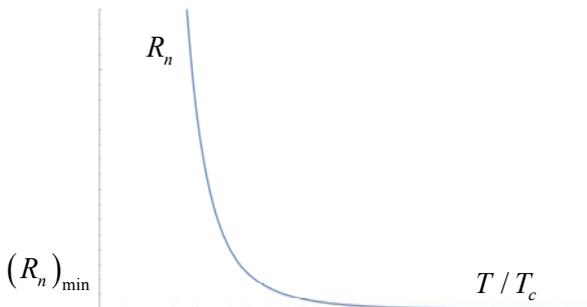


Рис. 4. Влияние относительной температуры на эффективное сопротивление R_n

Стоит отметить, бесконечное значение эффективного сопротивления R_n не означает, что будут происходить бесконечно большие джоулевы потери. Необходимо рассматривать реальные токи в контурах для сверхпроводящего и нормального токов и вычислять тепловыделение при возбуждении нормальных электронов. В этом отношении не возникает никаких физических и математических противоречий.

Для оценки некоторых физических параметров в качестве примера возьмем длину ленты $\Delta l = 15$ см, ширину $\Delta a = 1$ см, толщину

сверхпроводящего слоя $\Delta l_z = 10^{-3}$ см. Из [16] следует, что лондоновская глубина проникновения λ_L для материала $YBa_2Cu_3O_7$ по плоскости ab (в силу анизотропии материала) равна $\lambda_L = 2,7 \times 10^{-6}$ см. Тогда в системе СГС для данного набора параметров получим минимальные значения инерционных индуктивностей $(L_s)_{\min} \approx 2,5 \times 10^{-4}$ см, $(L_n)_{\min} \approx 1,37 \times 10^{-6}$ см и эффективного сопротивления $(R_n)_{\min} \approx 3,05 \times 10^{-14}$ с/см, что соответствует $(R_n)_{\min} \approx 2,7 \times 10^{-2}$ Ом в системе СИ.

При нулевой температуре в силу (68) очевидно, что $q_{vn} = 0$. Оценим максимальную объемную мощность в сверхпроводнике $(q_{vn})_{\max}$ при критической температуре, в этом случае $\alpha_n = 1$. Для этого предположим, что амплитуда напряжения источника тока равна $\varepsilon_0 \sim 5$ В, а его внутреннее сопротивление $r \sim 0,02$ Ом. Тогда в силу соотношения (38) и равенства эффективных масс получим $2\gamma\tau = 1 + \frac{r}{(R_n)_{\min}} \approx 1,74$ и максимальную объемную мощность тепловыделения в сверхпроводнике $(q_{vn})_{\max} \approx 4 \times 10^8$ Вт/м³. Объем сверхпроводящей ленты для рассматриваемого случая равен $\Delta V = 1,5 \times 10^{-8}$ м³. Тогда максимальная мощность тепловыделения в сверхпроводнике равна $(P_n)_{\max} = (q_{vn})_{\max} \Delta V = 6$ Вт.

Необходимо отметить важную особенность в эквивалентной электрической схеме, представленной на рис. 1. При температурах близких к критической $T \sim T_c$ однозначно то, что в силу ранее введенных соотношений (5) необходимо рассматривать апериодический переходной процесс $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$ ($\omega_0 \rightarrow 0$, $L_s \rightarrow \infty$) и соответствующие зависимости для сверхпроводящего (18) и нормального (19) токов. При разложении формул (18) и (19) по малому параметру $\omega_0 / \gamma \rightarrow 0$ вблизи T_c получим, что $I_s(t) \rightarrow 0$, т. е. весь ток, который заводится в электрическую цепь пойдет через нормальную фазу и асимптотически будет стремиться к $I_n(t) \rightarrow \frac{\varepsilon}{r + R_n}$. Таким образом,

приведенная эквивалентная электрическая схема формально справедлива во всем диапазоне температур (вплоть до критической) при предположении о справедливости двухжидкостной модели сверхпроводников в данном диапазоне температур и не возникает никаких внутренних физических и математических противоречий в различных предельных случаях в силу непрерывности решения.

Заключение

В работе впервые представлена эквивалентная электрическая схема сверхпроводников в соответствии с двухжидкостной моделью как на переменном, так и на постоянном токах с учетом переходного процесса (колебательного и апериодического) при замыкании (или размыкании) ключа в электрической цепи.

Для описания переходных процессов в сверхпроводниках впервые введены некоторые макроскопические параметры в ветвях для нормального и сверхпроводящего токов – инерционные индуктивности L_n и L_s для нормальных и сверхпроводящих электронов соответственно, а также эффективное сопротивление R_n для описания диссипации энергии при возбуждении нормальных электронов. Основной физический смысл введенных инерционных индуктивностей L_n и L_s заключается в том, что они отражают динамику ускорения двух типов электронов под действием переменных электрических полей в толще сверхпроводника.

Также эти параметры L_n и L_s были определены путем сопоставления макроскопических уравнений для всей электрической цепи с микроскопическими уравнениями движения нормальных и сверхпроводящих электронов. Получено, что инерционные индуктивности L_n и L_s определяются долями концентраций нормальных и сверхпроводящих электронов, а также квадратом глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник λ_L^2 .

Такой подход позволяет определять зависимости сверхпроводящих и нормальных токов, а также электрических полей от времени, частоты, температуры и других параметров рассматриваемой электрической цепи. Зная

токи и электрические поля, можно оценивать тепловыделение в объеме сверхпроводника при возбуждении нормальных электронов на переменном токе. Также можно оценивать влияние температуры и частоты переменного тока на тепловыделение.

Предложенный подход для анализа нестационарных процессов в сверхпроводниках на переменном токе является существенным вкладом для построения математических моделей по предсказанию вольт-амперных, нестационарных характеристик и тепловыделения при переменных условиях (переменных токах и магнитных полях) при соответствующей доработке математической модели и рассмотрении различных протекающих процессов в сверхпроводниках II-го рода, включая проникание квантов магнитного потока в виде вихрей Абрикосова при наличии внешних магнитных полей, дрейф вихревой решетки при наличии транспортного тока, пиннинг вихрей и многие другие эффекты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Onnes H. K.* / Leiden Comm. 1911. № 122b. P. 124.
2. *Onnes H. K.* / Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden. 1911. № 119b, 120b, 122b. – 124 p.
3. *Onnes H. K.* / Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden. 1914. № 139i.
4. *Meissner W., Ochsenfeld R.* / Naturwiss. 1933. Vol. 21. P. 787.
5. *London F., London H.* / Proc. Roy. Soc. 1935. № A149. P. 71.
6. *London F.* / Proc. Roy. Soc. 1935. № A512. P. 24 ; Phys. Rev. 1948. № 74. P. 562.
7. *London F.* / Physica. 1936. Vol. 3. P. 450.
8. *London F.* Une conception nouvelle de la supraconductibilité. – Paris, 1937.
9. *Абрикосов А. А.* Основы теории металлов. – М.: Наука, 1987.
10. *Абрикосов А. А.* / ДАН СССР. 1952. Т. 86. С. 489.
11. *Абрикосов А. А.* / ЖЭТФ. 1957. Вып. 32. С. 1442.
12. *Abrikosov A. A.* / Journal of Physics and Chemistry of Solids. 1957. Vol. 2. Iss. 3. P. 199–208.
13. *Cribier D., Jacrot B., Rao L. M., Farnoux B.* / Phys. Lett. 1964. Vol. 9. P. 106.
14. *Stephen M. J., Bardeen J.* / Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 14. № 4. P. 112–113.
15. *Bardeen J., Stephen M. J.* / Phys. Rev. 1965. Vol. 140. № 4A.
16. *Ципенюк Ю. М.* Физические основы сверхпроводимости: учебное пособие для вузов. – М.: Изд-во МФТИ, 2002.
17. *Шмидт В. В.* Введение в физику сверхпроводников. – М.: МЦНМО, 2000.

18. Petrykin V., Samoilenkov S. V., Kaul A. R., Vysotsky V. S. / Superconductor Science and Technology. 2014. Vol. 27. № 4. P. 044022.
19. Molodyk A., Samoilenkov S., Markelov A. et. al. / Scientific reports. 2021. Vol. 11. P. 2084.
20. Bardeen J. / Phys. Rev. Lett. 1958. Vol. 1. № 11. P. 399–400.
21. London F. Superfluids. Vol. 1 and 2. – New York: John Wiley and Sons., 1954.
22. Gorter C. J. Progress in Low-Temperature Physics. – North Holland Publishing Company. Chap. 1. 1955.
23. Landau L. D. / J. Phys. U.S.S.R. 1941. Vol. 5. P. 71.
24. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R. / Phys. Rev. 1957. Vol. 106. P. 162 ; Vol. 108. P. 1175.
25. Bardeen J., Stephen M. J. / Phys. Rev. 1965. Vol. 140. P. 1197.
26. Боголюбов Н. Н. / ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58 ; Nuovo cim. 1958. Vol. 7. P. 794.
27. Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В. Новый метод в теории сверхпроводимости. – М.: Наука, 1958.
28. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R. / Phys. Rev. 1957. Vol. 106. P. 162–164.
29. Бардин Дж., Купер Л., Шриффер Дж. Теория сверхпроводимости. – М.: ИЛ, 1960. С. 103.
30. Sze S. M. Physics of Semiconductor Devices. – John Wiley&Sons. Wiley-Interscience publication, 1981.
31. Harrison W. A. Electronic Structure and the Properties of Solids: The Physics of the Chemical Bond. – Dover Publications. Dover Books on Physics, 1989.
32. Tesar R., Sindler M., Kadlec C., Lipavsky P., Skrbek L. / Scientific Reports. 2021. Vol. 11. P. 21708.

PACS: 74.20De

Equivalent electrical circuit of superconductors in accordance with a two-fluid model at alternating currents

K. A. Osipov, A. N. Varyukhin, M. A. Ovdienko and A. V. Geliev

«Central Institute of Aviation Motors named after P. I. Baranov»
2 Aviamotornaya st., Moscow, 111116, Russia
E-mail: kaosipov@ciam.ru

Received 20.07.2023; revised 29.08.2023; accepted 20.09.2023

The paper considers transient processes in superconductors that occur when a key is closed (or opened) in an electrical circuit at direct current, as well as processes with a sinusoidal change in the electromotive force (EMF) of a current source. To describe transients, an equivalent electrical circuit of superconductors is presented in accordance with a two-fluid model, according to which all electrons in a superconductor are divided into two types – superconducting and normal. At the same time, inertial inductances were introduced for the first time for superconducting and normal electrons L_s and L_n characterizing the dynamics of acceleration of various types of electrons due to the excitation of an electric field under variable conditions, as well as effective resistance to describe energy dissipation when normal electrons are excited. The dependences of the normal and superconducting currents and the electric field in superconductors on the frequency of the EMF of the current source are obtained, the average power of the current source and heat generation due to Joule losses in the superconductor during excitation of normal electrons depending on frequency and temperature are calculated.

Keywords: superconductivity, high-temperature superconductivity, HTS, two-fluid model, normal electrons, superconducting electrons, alternating current, equivalent electrical circuit, inertial inductances for superconducting and normal electrons.

DOI: 10.51368/2307-4469-2023-11-5-363-383

REFERENCES

1. Onnes H. K., Leiden Comm., № 122b, 124 (1911).
2. Onnes H. K., Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden., № 119b, 120b, 122b, 124c (1911).
3. Onnes H. K., Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden., № 139i (1914).
4. Meissner W. and Ochsenfeld R., Naturwiss. **21**, 787 (1933).
5. London F. and London H., Proc. Roy. Soc. **A149**, 71 (1935).
6. London F., Proc. Roy. Soc. **A512**, 24 (1935) ; Phys. Rev. **74**, 562 (1948).
7. London F., Physica **3**, 450 (1936).
8. London F., Une conception nouvelle de la supraconductibilité, Paris, 1937.
9. Abrikosov A. A., Fundamentals of metals, Moscow, Nauka, 1987.
10. Abrikosov A. A. Reports of the Academy of Sciences USSR **86**, 489 (1952).
11. Abrikosov A. A., ZhETF **32**, 1442 (1957).
12. Abrikosov A. A., Journal of Physics and Chemistry of Solids **2** (3), 199–208 (1957).
13. Cribier D., Jacrot B., Rao L. M. and Farnoux B., Phys. Lett. **9**, 106 (1964).
14. Stephen M. J. and Bardeen J., Phys. Rev. Lett. **14** (4), 112–113 (1965).
15. Bardeen J. and Stephen M. J., Phys. Rev. **140** (4A) (1965).
16. Tsipenyuk Yu. M., Physical foundations of superconductivity: Textbook: For universities, Moscow, MIPT Publishing House, 2002.
17. Schmidt V. V., Introduction to the physics of superconductors, Moscow, ICNMO, 2000.
18. Petrykin V., Samoilenkov S. V., Kaul A. R. and Vysotsky V. S., Superconductor Science and Technology **27** (4), 044022 (2014).
19. Molodyk A., Samoilenkov S., Markelov A. et.al., Scientific reports **11**, 2084 (2021).
20. Bardeen J., Phys. Rev. Lett. **1** (11), 399–400 (1958).
21. London F., Superfluids, New York, John Wiley and Sons, vol. 1 and 2 (1954).
22. Gorter C. J., Progress in Low-Temperature Physics, North Holland Publishing Company, 1955, Chap. 1.
23. Landau L. D., J. Phys. U.S.S.R. **5**, 71 (1941).
24. Bardeen J., Cooper L. N. and Schrieffer J. R., Phys. Rev. **106**, 162 ; **108**, 1175 (1957).
25. Bardeen J. and Stephen M. J., Phys. Rev. **140**, 1197 (1965).
26. Bogolyubov N. N., ZhETF **34**, 58 (1958) ; Nuovo cim. **7**, 794 (1958).
27. Bogolyubov N. N., Tolmachev V. V. and Shirkov D. V., A new method in the theory of superconductivity, Moscow, Nauka, 1958.
28. Bardeen J., Cooper L. N. and Schrieffer J. R., Phys. Rev. **106**, 162–164 (1957).
29. Bardeen J., Cooper L. and Schrieffer J., In the collection: Theory of superconductivity, Moscow, IL, 1960, p. 103.
30. Sze S. M., Physics of Semiconductor Devices, John Wiley&Sons, Wiley-Interscience publication, 1981.
31. Harrison W. A. Electronic Structure and the Properties of Solids: The Physics of the Chemical Bond. Dover Publications. Dover Books on Physics, 1989.
32. Tesar R., Sindler M., Kadlec C., Lipavsky P. and Skrbek L., Scientific Reports **11**, 21708 (2021).