

УДК 538.945

PACS: 74.20De

DOI: 10.51368/2307-4469-2023-11-6-473-490

EDN: REPJMO



Эквивалентная электрическая схема сверхпроводников с учетом магнитной и инерционных индуктивностей для сверхпроводящих и нормальных электронов

К. А. Осипов, А. Н. Варюхин, В. С. Захарченко, А. В. Гелиев

Для описания переходных процессов при возбуждении токов в сверхпроводниках как при постоянной, так и переменной электродвижущей силе источника тока введены инерционные индуктивности для сверхпроводящих и нормальных электронов (L_s и L_n) в эквивалентной электрической схеме в соответствии с двухжидкостной моделью сверхпроводников. В работе представлена эквивалентная электрическая схема сверхпроводников с учетом магнитной и инерционных индуктивностей, которая позволяет оценивать тепловыделение в высокотемпературных сверхпроводниках при переменных токах за счет возбуждения нормальных электронов. Показано, что пренебрежение теми или иными инерционными индуктивностями (L_s или L_n) приводит к физическим противоречиям с имеющимися экспериментальными данными по сверхпроводникам при переменных токах. Кроме того, в работе получено, что в общем случае суммарная индуктивность для обычных (несверхпроводящих) проводников с током должна представляться как последовательное соединение магнитной индуктивности, связанной с изменением магнитного потока, и инерционной индуктивности для нормальных электронов L_n .

Ключевые слова: инерционные индуктивности, магнитная индуктивность, эквивалентная электрическая схема, сверхпроводимость, высокотемпературная сверхпроводимость, двухжидкостная модель, нормальные электроны, сверхпроводящие электроны.

Введение

Для сопровождения и интерпретации данных в ходе проведения экспериментов по

определению нестационарных и вольт-амперных (ВАХ) характеристик высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) при переменных и постоянных токах необходимо иметь адекватную математическую модель по предсказанию объемной мощности тепловыделения в сверхпроводниках, построенную из первых физических принципов. В дальнейшем соответствующая доработка математических моделей с учетом различных протекающих процессов в сверхпроводниках позволит предсказывать ВАХ при различных температурах (не только при температурах жидкого азота, но и жидкого водорода). Математическая модель, откалиброванная по различным экспериментальным данным, позволит оценивать характеристики (коэффициент полезного действия, мощность и электромагнитный момент)

Осипов Константин Анатольевич, в.н.с., к.т.н.

E-mail: kaosipov@ciam.ru

Варюхин Антон Николаевич, зам. ген. директора – директор исследовательского центра, к.т.н.

Захарченко Виктор Савельевич, нач. отдела, к.т.н.

Гелиев Александр Валикоевич, нач. отдела, к.ф.-м.н.

ГНЦ, федеральное автономное учреждение «Центральный институт авиационного моторостроения имени П. И. Баранова».

Россия, 111116, Москва, ул. Авиамоторная, 2.

Статья поступила в редакцию 20.07.2023

После доработки 6.10.2023

Принята к публикации 23.10.2023

© Осипов К. А., Варюхин А. Н., Захарченко В. С., Гелиев А. В., 2023

электрических машин (электродвигателей, электрогенераторов) с применением ВТСП-лент и катушек.

В сверхпроводниках удельное сопротивление равно нулю только в определенном диапазоне внешних условий. При температурах ниже критической $T < T_c$ и внешних полях $H < H_{c1}$ материал находится в сверхпроводящем состоянии и на постоянном токе не испытывает никакого сопротивления. При напряженности магнитного поля $H_{c1} < H < H_{c2}$ в сверхпроводник II-го рода проникают вихри Абрикосова, образуя правильную треугольную решетку [1–5]. С ростом напряженности внешнего поля H плотность вихрей увеличивается. В бездефектном материале (без наличия центров пиннинга) при протекании транспортного тока под действием силы Лоренца, действующей на вихри, в сверхпроводнике возникает дрейф вихревой решетки, в результате чего индуцируется электрическое поле в соответствии с законом об электромагнитной индукции. Электрическое поле приводит в движение электроны в нормальных сердцевинах вихрей Абрикосова, вследствие чего и происходит диссипация энергии в сверхпроводниках [6–9].

При переменном токе сопротивление сверхпроводников II-го рода всегда отлично от нуля, даже при сильном пиннинге вихрей Абрикосова, когда вихри локализируются на различных дефектах, и с ростом амплитуды транспортного тока и температуры сверхпроводника оно только нарастает, что связано с выделением тепла за счет возбуждения нормального тока (носителями которого являются нормальные электроны) вследствие возникновения индуцированного электрического поля в сверхпроводнике при изменяющихся условиях.

Данный факт, вытекающий из различных экспериментальных данных, можно понять, если воспользоваться двухжидкостной моделью сверхпроводников [10–13]. Согласно этой модели, сверхпроводник состоит из нормальных и сверхпроводящих электронов. При переменном токе в сверхпроводнике возникает изменяющееся электрическое поле. Это электрическое поле ускоряет два типа электронов. Сверхпроводящие электроны не рассеивают энергию за счет объединения в куперовские

пары (поскольку данное состояние является более энергетически выгодным), согласно одному из возможных механизмов возникновения сверхпроводящего состояния [14–20], а при движении нормальных электронов происходит диссипация энергии в виде джоулева тепла. В результате возникает электрическое сопротивление.

В работе на данном этапе не будут рассматриваться различные эффекты, связанные с наличием внешнего магнитного поля, а будут исследоваться переходные процессы в сверхпроводниках при выходе на стационарный режим при постоянном токе и процессы возбуждения нормального и сверхпроводящего токов при гармоническом изменении электродвижущей силы (ЭДС) источника тока как с учетом инерционных, так и магнитной индуктивностей.

Эквивалентная электрическая схема сверхпроводников при переменных токах

Рассмотрим эффекты, связанные с возбуждением тока в сверхпроводнике, без наличия внешнего магнитного поля $H = 0$, либо при напряженности поля $H < H_{c1}$, при котором сверхпроводник II-го рода будет находиться в мейснеровском состоянии [21–26]. Для того, чтобы описать нестационарные процессы при переменных условиях в сверхпроводниках, необходимо ввести эквивалентную электрическую схему сверхпроводников при переменных токах, которая бы соответствовала двухжидкостной модели [10–13].

В дальнейшем основа предложенной эквивалентной схемы сверхпроводников будет также применяться для анализа более сложных протекающих процессов в сверхпроводниках при различных внешних условиях, например, при постоянном и переменном транспортных токах при наличии внешнего магнитного поля, с учетом добавления в сверхпроводящий материал так называемых центров пиннинга для локализации вихрей Абрикосова и другие эффекты посредством добавления соответствующих элементов и параметров в эквивалентную электрическую схему.

На рис. 1 представлена эквивалентная электрическая схема сверхпроводников в без-

вихревом состоянии в соответствии с двухжидкостной моделью. Для начала будем рассматривать переходные процессы при постоянном ЭДС источника тока при замыкании ключа K (рис. 1а). Аналогичным образом можно рассмотреть переходные процессы при размыкании ключа K , изменив соответствующие начальные условия. В схеме выделены две отдельные ветви для нормального и

сверхпроводящего токов. В каждой ветви введены так называемые инерционные индуктивности для нормального и сверхпроводящего токов соответственно – L_n и L_s . Инерционные индуктивности будут учитывать различную динамику движения двух типов электронов в силу того, что разные «типы» электронов будут подчиняться различным микроскопическим уравнениям движения.

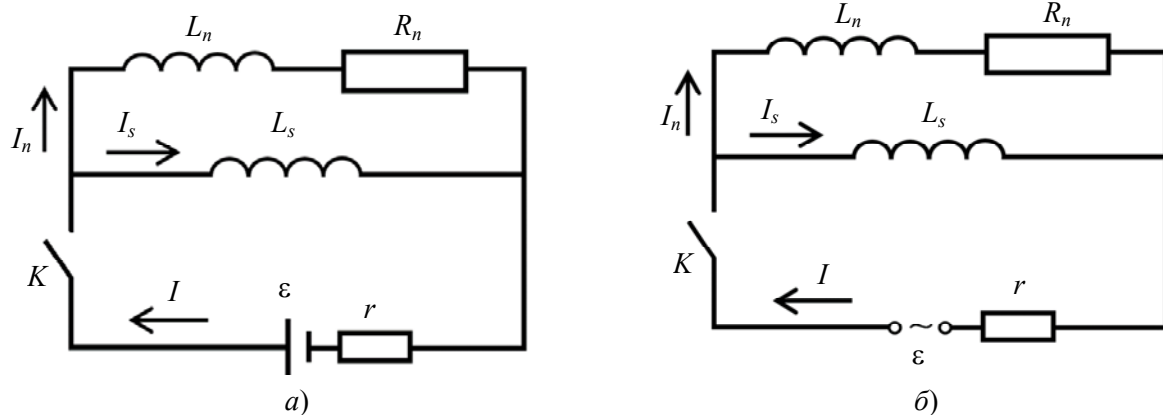


Рис. 1. Эквивалентная электрическая схема сверхпроводников (в безвихревом состоянии) на основе двухжидкостной модели: а) – на постоянном токе; б) – при переменном ЭДС источника тока

Как было отмечено ранее, при возбуждении нормальных электронов происходит рассеяние энергии, поэтому в ветви для нормального тока введено эффективное сопротивление R_n , отвечающее за диссипацию энергии. В дальнейшем необходимо будет определить введенные макроскопические параметры эквивалентной электрической цепи для нормального и сверхпроводящего токов путем сопоставления с микроскопическими уравнениями для движения двух групп электронов. Запишем уравнения для электрической цепи, отражающие два закона Кирхгофа:

$$\begin{cases} I(t) = I_n(t) + I_s(t), \\ \varepsilon - (1/c^2)L_s\dot{I}_s = I(t)r, \\ \varepsilon - (1/c^2)L_n\dot{I}_n = I_n(t)R_n + Ir, \end{cases} \quad (1)$$

где r – внутреннее сопротивление источника тока. Отметим, что все уравнения будут записаны в системе СГС.

Из системы уравнений (1) получим, что сверхпроводящий ток подчиняется следую-

щему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\ddot{I}_s + 2\gamma\dot{I}_s + \omega_0^2 I_s = X_s, \quad (2)$$

где были введены коэффициент затухания γ , квадрат собственной частоты колебаний ω_0^2 и эффективная внешняя сила для сверхпроводящего тока X_s :

$$\begin{aligned} 2\gamma &= \frac{rc^2}{L_s L_n} \left(L_n + \frac{R_n + r}{r} L_s \right), \quad \omega_0^2 = \frac{c^4 r R_n}{L_s L_n}, \\ X_s &= \frac{c^4 R_n \varepsilon}{L_s L_n}. \end{aligned} \quad (3)$$

При решении уравнения (2) возникают два случая: $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$ и $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$. Поскольку на данном этапе неизвестны введенные макроскопические параметры цепи, необходимо рассматривать два случая. Для начала рассмотрим первый случай, т. е. $\omega_0^2 - \gamma^2 > 0$, соответствующий колебательному переходному процессу. В начальный момент времени

нормальный и сверхпроводящий токи равны нулю $I_s(0) = 0$, $I_n(0) = 0$. Начальные условия для первых производных от токов легко получить из системы уравнений (1): $\left. \frac{dI_s}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\varepsilon c^2}{L_s}$,

$$I_s(t) = \frac{\varepsilon}{r} \left\{ 1 - e^{-\gamma t} \left(\cos \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \frac{(\gamma - rc^2 / L_s)}{\Omega} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t \right) \right\}. \quad (4)$$

Подставив (4) во второе уравнение системы (1), получим выражение для нормального тока:

$$I_n(t) = \frac{\varepsilon c^2}{L_n} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\gamma t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t. \quad (5)$$

Очевидно, что при $t \gg 1/\gamma$ нормальный ток $I_n(t)$ экспоненциально затухает согласно

$$\left\{ \begin{aligned} I_s(t) &= \frac{\varepsilon}{r} \left(1 - e^{-\gamma t} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t + \frac{\gamma - rc^2 / L_s}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t \right) \right), \\ I_n(t) &= \frac{\varepsilon c^2}{L_n} \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} e^{-\gamma t} \operatorname{sh} \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Из (6) следует, что для случая $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$ нормальный ток экспоненциально стремится к нулю.

Определение инерционных индуктивностей L_n и L_s из микроскопических уравнений движения нормальных и сверхпроводящих электронов

В результате с помощью эквивалентной электрической схемы сверхпроводников, представленной на рис. 1, состоящей из двух ветвей, по которым отдельно протекают нормальные и сверхпроводящие токи, получены зависимости нормального и сверхпроводящего токов от времени для колебательного и аperiodического переходных процессов.

Однако во всех этих выражениях присутствуют неизвестные параметры – L_n , L_s , R_n , γ и ω_0 . Для того, чтобы определить недо-

$\left. \frac{dI_n}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\varepsilon c^2}{L_n}$. В этом случае зависимость сверхпроводящего тока от времени $I_s(t)$ будет определяться следующим выражением:

(5). Весь ток будет протекать исключительно через сверхпроводящую фазу и будет стремиться к $I(t) \rightarrow \varepsilon / r$.

Приведем результаты для аperiodического переходного процесса $\omega_0^2 - \gamma^2 < 0$. Зависимости сверхпроводящего и нормального токов от времени будут определяться следующим образом:

стающие коэффициенты, характеризующие макропараметры системы, необходимо связать их с микроскопическими параметрами, записав уравнения для нормальных и сверхпроводящих электронов. Запишем уравнения движения для нормальных и сверхпроводящих электронов:

$$\left\{ \begin{aligned} m_n^* \frac{d\mathbf{V}_n(t)}{dt} &= -\frac{m_n^*}{\tau} \mathbf{V}_n(t) - e\mathbf{E}(t), \\ m_s^* \frac{d\mathbf{V}_s(t)}{dt} &= -e\mathbf{E}(t). \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где \mathbf{V}_n , \mathbf{V}_s , m_n^* и m_s^* – скорости и эффективные массы нормальных и сверхпроводящих электронов соответственно, τ – время релаксации нормальных электронов в сверхпроводящем материале. Умножим первое уравнение в (7) на $(-en_n)$, а второе – на $(-en_s)$, где n_n и n_s – концентрации нормальных и сверхпро-

водящих электронов, и используем определение плотности соответствующих токов $\mathbf{j}_n(t) = -en_n \mathbf{V}_n(t)$, $\mathbf{j}_s(t) = -en_s \mathbf{V}_s(t)$, в результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \tau \frac{d\mathbf{j}_n(t)}{dt} + \mathbf{j}_n(t) = \alpha_n \sigma_0 \mathbf{E}(t), \\ \tau \frac{d\mathbf{j}_s(t)}{dt} = \alpha_s \sigma_0 \left(\frac{m_n^*}{m_s^*} \right) \mathbf{E}(t), \end{cases} \quad (8)$$

где были введены следующие обозначения: $\sigma_0 = ne^2\tau / m_n^*$ – удельная электропроводность сверхпроводящего материала, находящегося в нормальном состоянии, $\alpha_s = n_s / n$, $\alpha_n = n_n / n$ – доли концентраций сверхпроводящих и нормальных электронов, n – концентрация всех электронов проводимости в материале (сумма сверхпроводящих и нормальных электронов).

Умножим первое уравнение в (8) на $(\Delta l / \alpha_n \sigma_0)$, где Δl – длина сверхпроводящей ленты, и учтем, что нормальный ток равен $I_n = j_n \Delta S^*$, где ΔS^* – эффективная площадь поперечного сечения сверхпроводящей ленты, по которой протекает транспортный ток в сверхпроводнике:

$$\frac{\tau}{\Delta S^*} \frac{\Delta l}{\alpha_n \sigma_0} \frac{d\mathbf{I}_n(t)}{dt} + \mathbf{I}_n(t) \frac{\Delta l}{\alpha_n \sigma_0 \Delta S^*} = \Delta l \mathbf{E}(t). \quad (9)$$

Для того, чтобы не отвлекаться от основной сути, на данном этапе не будем учитывать распределение тока по сечению сверхпроводника (хотя при необходимости это можно сделать). Если из второго уравнения вычесть третье исходной системы для эквивалентной электрической цепи (1), то получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{c^2} L_n \frac{dI_n}{dt} + I_n(t) R_n = \frac{1}{c^2} L_s \frac{dI_s}{dt}. \quad (10)$$

Сопоставив (9) с (10), которое было получено для замкнутого контура, охватывающего ветви, по которым протекает сверхпроводящий и нормальный токи, положим, что

$$R_n \equiv \frac{\Delta l}{\alpha_n \sigma_0 \Delta S^*}, \quad L_n \equiv c^2 \frac{\tau}{\alpha_n \Delta S^*} \frac{\Delta l}{\sigma_0} = c^2 \tau R_n. \quad (11)$$

Если учесть, что концентрация носителей нормального тока равна $\alpha_n n$, то в этом случае выражение для R_n полностью согласуется с

общеизвестным выражением для сопротивления элемента проводника длиной Δl с площадью поперечного сечения ΔS^* и удельным сопротивлением $1/(\alpha_n \sigma_0)$.

Для того, чтобы сопоставляемые уравнения (9) и (10) были полностью согласованы друг с другом, необходимо, чтобы правые части двух соответствующих уравнений были равны друг другу, поэтому запишем:

$$\frac{1}{c^2} L_s \frac{d\mathbf{I}_s(t)}{dt} = \Delta l \mathbf{E}(t). \quad (12)$$

Для того, чтобы найти инерционную индуктивность для сверхпроводящих электронов L_s , воспользуемся вторым уравнением в (8), которое по своей сути является модификацией первого уравнения Лондонов для сверхпроводящих электронов, умножив его на ΔS^* , в результате получим следующее уравнение:

$$\tau \frac{d\mathbf{I}_s(t)}{dt} = \alpha_s \sigma_0 \Delta S^* \left(\frac{m_n^*}{m_s^*} \right) \mathbf{E}(t). \quad (13)$$

Из уравнений (12) и (13), получим:

$$\begin{aligned} L_s &= \frac{c^2 \Delta l E(t)}{\frac{d\mathbf{I}_s(t)}{dt}} = \left(\frac{m_s^*}{m_n^*} \right) \frac{\tau c^2 \Delta l}{\alpha_s \sigma_0 \Delta S^*} = \\ &= \left(\frac{m_s^*}{m_n^*} \right) \frac{\tau c^2}{\alpha_s n e^2 \tau / m_n^*} \frac{\Delta l}{\Delta S^*} = \frac{4\pi m_s^* c^2}{\alpha_s} \frac{\Delta l}{4\pi n e^2 \Delta S^*}. \end{aligned}$$

Таким образом, инерционную индуктивность для сверхпроводящих электронов можно записать через лондоновскую глубину проникновения магнитного поля $\lambda_L^2 = m_s^* c^2 / 4\pi n e^2$:

$$L_s = \frac{4\pi \lambda_L^2 \Delta l}{\alpha_s \Delta S^*}. \quad (14)$$

Инерционную индуктивность для нормальных электронов L_n (11) можно также выразить через лондоновскую глубину проникновения магнитного поля λ_L , в итоге получим:

$$L_n = \left(\frac{m_n^*}{m_s^*} \right) \frac{4\pi \lambda_L^2 \Delta l}{\alpha_n \Delta S^*}. \quad (15)$$

Отношение инерционных индуктивностей для сверхпроводящих (14) и нормальных (15)

токов будет зависеть от отношения долей концентраций и эффективных масс сверхпроводящих и нормальных электронов:

$$\frac{L_s}{L_n} = \frac{\alpha_n}{\alpha_s} \left(\frac{m_s^*}{m_n^*} \right). \quad (16)$$

После некоторых преобразований инерционные индуктивности L_n и L_s также можно представить через плазменные (или ленгмюровские) частоты электронов:

$$L_n = \frac{4\pi c^2}{\omega_{p,n}^2} \frac{\Delta l}{\Delta S^*}, \quad L_s = \frac{4\pi c^2}{\omega_{p,s}^2} \frac{\Delta l}{\Delta S^*}, \quad (17)$$

где $\omega_{p,n} = \sqrt{4\pi n_n e^2 / m_n^*}$, $\omega_{p,s} = \sqrt{4\pi n_s e^2 / m_s^*}$ – плазменные частоты для нормальных и сверхпроводящих электронов. Тогда величину L_s / L_n можно выразить не через отношения долей концентраций и эффективных масс соответствующих «типов» электронов (16), а через отношение плазменных частот для нормальных и сверхпроводящих электронов $L_s / L_n = \omega_{p,n}^2 / \omega_{p,s}^2$. Преобразуем ранее введенные выражения, входящие в зависимости сверхпроводящего и нормального токов – собственную частоту колебаний ω_0 , коэффициент затухания γ с помощью полученных соотношений для введенных макроскопических параметров эквивалентной электрической схемы R_n , L_n и L_s (11)–(16):

$$\omega_0^2 = \frac{c^4 r R_n}{L_s L_n} = \frac{1}{\tau^2} \frac{r}{R_n} \frac{\alpha_s}{\alpha_n} \frac{m_n^*}{m_s^*}. \quad (18)$$

$$2\gamma = rc^2 \left(\frac{1}{L_s} + \frac{R_n + r}{rL_n} \right) = \frac{1}{\tau} \left\{ 1 + \frac{r}{R_n} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\alpha_n} \frac{m_n^*}{m_s^*} \right) \right\}. \quad (19)$$

Для того, чтобы узнать какой переходной процесс рассматривать (колебательный или апериодический), необходимо оценить разницу $\omega_0^2 - \gamma^2$ в зависимости от конкретного случая (например, от величин температуры или внутреннего сопротивления r):

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \gamma^2 &= \frac{1}{\tau^2} \frac{r}{R_n} \frac{\alpha_s}{\alpha_n} \frac{m_n^*}{m_s^*} - \\ &- \frac{1}{4\tau^2} \left\{ 1 + \frac{r}{R_n} \left(1 + \frac{\alpha_s}{\alpha_n} \frac{m_n^*}{m_s^*} \right) \right\}^2 = \\ &= \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2} \left\{ 1 + \frac{r}{R_n} + \omega_0^2 \tau^2 \right\}^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Следует отметить, что концентрации нормальных и сверхпроводящих электронов зависят от температуры, что легко вычислить, зная эмпирическую температурную зависимость для глубины проникновения магнитного поля $\lambda^2(T) = \lambda_L^2 / (1 - (T/T_c)^4)$ [8, 9]:

$$n_s(T) = n \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right), \quad n_n = n \left(\frac{T}{T_c} \right)^4. \quad (21)$$

На рис. 2 представлены температурные зависимости долей концентраций нормальных и сверхпроводящих электронов. В силу степенной зависимости долей концентраций (21) при низких температурах почти все электроны в сверхпроводнике являются сверхпроводящими, увеличение количества нормальных электронов наблюдается только при температурах близких к критической. Легко вычислить температуру T^* , при которой концентрации нормальных и сверхпроводящих электронов будут равны друг другу $\alpha_n = \alpha_s = 1/2$: $T^* = T_c / \sqrt[4]{2} \approx 0,84T_c$.

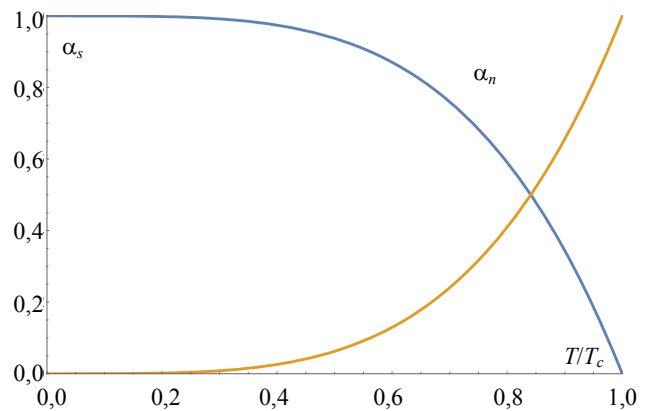


Рис. 2. Распределение долей концентраций нормальных и сверхпроводящих ($\alpha_n = n_n / n$ и $\alpha_s = n_s / n$) электронов в зависимости от относительной температуры T / T_c в соответствии с двухжидкостной моделью сверхпроводников

Вычислив все макроскопические параметры в эквивалентной электрической схеме, можно определять все переходные процессы при замыкании и размыкании ключей, зависимости нормальных и сверхпроводящих токов от времени, тепловыделение в единице объема сверхпроводника за счет возбуждения нормальных электронов при синусоидальном изменении тока, затрачиваемую мощность источника питания на возбуждение тока.

Определив макроскопические параметры L_s , L_n и R_n , можно вычислить электрические поля для колебательного (22) и аperiодического (23) переходных процессов соответственно:

$$E(t) = \frac{\varepsilon}{r} \frac{1}{(n_s e^2 / m_s^*) \Delta S^*} e^{-\gamma t} \times \left(\frac{(\gamma(\gamma - rc^2 / L_s) + \Omega^2)}{\Omega} \sin \Omega t + \frac{rc^2}{L_s} \cos \Omega t \right), \quad (22)$$

где $\Omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 > 0$.

$$E(t) = \frac{\varepsilon}{r} \frac{1}{(n_s e^2 / m_s^*) \Delta S^*} \times \left(\frac{\alpha_2 (\alpha_1 - rc^2 / L_s)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{-\alpha_2 t} - \frac{\alpha_1 (\alpha_2 - rc^2 / L_s)}{\alpha_1 - \alpha_2} e^{-\alpha_1 t} \right), \quad (23)$$

где $\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, $\alpha_2 \equiv \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Из (22) и (23) видно, что при постоянном токе после переходных процессов электрическое поле в сверхпроводнике исчезает, как и должно быть в сверхпроводниках, в противном случае любое конечное значение электрического поля при постоянном ЭДС источника тока будет приводить к бесконечным сверхпроводящим токам. Таким образом, сверхпроводящие электроны движутся по инерции, а потому для поддержания сверхпроводящего тока не требуется никакого электрического поля.

Получим температурные зависимости ранее введенных макроскопических параметров, появляющихся при решении исходной системы уравнений (1), а именно квадрата собственной частоты ω_0^2 и коэффициента затухания γ :

$$\omega_0^2 = \Omega_0^2 \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right), \quad (24)$$

$$2\gamma = \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{r}{R(T)} + \alpha_s \left(\frac{m_n^*}{m_s^*} - 1 \right) \frac{r}{R(T)} \right),$$

где для уменьшения громоздкости введены следующие обозначения $\Omega_0(T) =$

$$= \frac{1}{\tau(T)} \sqrt{\frac{m_n^*}{m_s^*} \frac{r}{R(T)}}, \quad R(T) = \frac{1}{\sigma_0(T)} \frac{\Delta l}{\Delta S^*(T)}.$$

Следует иметь ввиду, что время релаксации τ , удельная проводимость σ_0 , а также эффективная площадь ΔS^* , по которой распределяется транспортный ток в сверхпроводнике, являются функциями температуры. Поскольку в эквивалентной электрической схеме, представленной на рис. 1, имеется параллельный контур, связывающий нормальный и сверхпроводящий токи, в этом случае можно формально ввести добротность Q следующим образом:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\sqrt{\frac{m_n^*}{m_s^*} \frac{r}{R(T)}}}{1 + \frac{r}{R(T)}} \sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4}. \quad (25)$$

Если предположить, что эффективные массы нормальных и сверхпроводящих электронов примерно равны друг другу и сопоставимы с массой электрона ($m_n^* \approx m_s^* \approx m_e$), то ранее полученные зависимости (24) и (25), можно упростить:

$$\Omega_0(T) \approx \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{r}{R}}, \quad 2\gamma \approx \frac{1}{\tau} \left(1 + \frac{r}{R} \right), \quad (26)$$

$$Q \approx \frac{\sqrt{r/R(T)}}{1 + r/R(T)} \sqrt{1 - (T/T_c)^4}.$$

Из (26) видно, что $Q \leq 1/2$. Используя выражения (24) и (26), можно определить тип переходного процесса, который реализуется при замыкании ключа на постоянном токе:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \gamma^2 &= \frac{1}{\tau^2} \frac{r}{R} \left(1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right) - \frac{1}{4\tau^2} \left(1 + \frac{r}{R} \right)^2 = \\ &= -\frac{1}{\tau^2} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} - 1 \right)^2 + \frac{r}{R} \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right\} < 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, в цепи реализуется аperiодический переходной процесс. Можно рассмотреть различные предельные случаи по температуре:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \gamma^2 &= -\frac{1}{(2\tau)^2} \left(1 - \frac{r}{R(0)} \right)^2 < 0 \text{ при } T = 0 \\ \omega_0^2 - \gamma^2 &= -\frac{1}{(2\tau)^2} \left(1 + \frac{r}{R(T_c)} \right)^2 < 0 \text{ при } T = T_c. \end{aligned}$$

Безусловно, в более общем случае необходимо учитывать различие эффективных масс сверхпроводящих и нормальных электронов. Основной физический смысл добротности Q в данной конкретной задаче можно понять из следующего. Из системы уравнений (1) можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с нулевой правой частью для нормального тока:

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} + 2\gamma \frac{dI_n}{dt} + \omega_0^2 I_n = 0. \quad (28)$$

Умножив (28) на \dot{I}_n , после математических преобразований получим:

$$\frac{d}{d\varphi} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dI_n}{d\varphi} \right)^2 + \frac{I_n^2}{2} \right\} = -\frac{1}{Q} \left(\frac{dI_n}{d\varphi} \right)^2, \quad (29)$$

где введена фаза $\varphi = \omega_0 t$. Левая часть в (29) описывает изменение энергии в системе при изменении фазы, а добротность Q определяет влияние диссипативного слагаемого $2\gamma \dot{I}_n$ в (28) на скорость изменения энергии. Поскольку в рассматриваемом случае в силу (27) реализуется аperiодический переходной процесс, то, как оказывается, влияние диссипативного слагаемого в контуре в электрической схеме на рис. 1 существенно.

Инерционные индуктивности (14) и (15) можно представить в следующем виде:

$$L_s = \frac{L_{s\min}}{\alpha_s}, \quad L_n = \frac{L_{n\min}}{\alpha_n}, \quad (30)$$

где минимальные значения инерционных индуктивностей определяются как

$$L_{s\min} = \frac{4\pi\lambda_L^2 \Delta l}{\Delta S^*(T)}, \quad L_{n\min} = \frac{m_n^* 4\pi\lambda_L^2 \Delta l}{m_s^* \Delta S^*(T)}. \quad \text{Напом-}$$

ним, что эффективная площадь сечения ΔS^* является функцией температуры.

Минимальное значение инерционной индуктивности сверхпроводящих электронов $L_{s\min}$ можно оценить следующим образом:

$$L_{s\min} \approx \frac{4\pi\lambda_L^2 \Delta l}{2\lambda_L \Delta a} = \frac{2\pi\lambda_L \Delta l}{\Delta a} \equiv L'_{s\min}, \quad \text{где } \Delta a - \text{ши-}$$

рина сверхпроводящей ленты, а эффективная площадь сечения примерно равна $\Delta S^* \approx 2\lambda_L \Delta a$. Коэффициент «2» связан с тем, что ток будет протекать как в нижнем, так и верхнем поверхностных слоях ленты за счет вытеснения тока к границам. Данная оценка справедлива в области низких температур. При температурах близких к критической T_c индуктивность L_s главным образом будет определяться температурной зависимостью $\alpha_s(T)$ согласно (21).

В области температур $T \sim T_c$ транспортный ток будет распределяться по сечению сверхпроводника более равномерно, поэтому можно считать, что $\Delta S^* \approx \Delta l_z \Delta a$, где Δl_z – толщина сверхпроводящего слоя, тогда

$$L_{n\min} \approx \frac{m_n^* 4\pi\lambda_L^2 \Delta l}{m_s^* \Delta a \Delta l_z} = \frac{m_n^* 2\lambda_L}{m_s^* \Delta l_z} L'_{s\min} \equiv L'_{n\min}. \quad \text{При}$$

низких температурах индуктивность L_n главным образом будет определяться зависимостью концентрации нормальных электронов от температуры (21). Согласно вышеприведенным оценкам соотношения (30) можно аппроксимировать следующим образом:

$$L_s \approx \frac{L'_{s\min}}{\alpha_s}, \quad L_n \approx \frac{L'_{n\min}}{\alpha_n}, \quad (31)$$

где $L'_{s\min} = \frac{2\pi\lambda_L \Delta l}{\Delta a}$ и $L'_{n\min} = \frac{m_n^* 4\pi\lambda_L^2 \Delta l}{m_s^* \Delta a \Delta l_z}$. Аналогичным образом можно получить прибли-

женное выражение для эффективного сопротивления $R_n \approx \frac{R'_{n\min}}{\alpha_n}$, где $R'_{n\min} = L'_{n\min} / c^2 \tau$. На рис. 3–4 представлены графики зависимостей инерционных индуктивностей (L_n и L_s) и эффективного сопротивления R_n от относительной температуры $\bar{T} = T / T_c$.

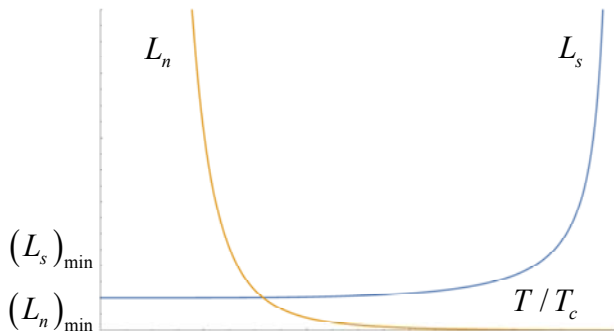


Рис. 3. Графики зависимостей инерционных индуктивностей L_n , L_s от относительной температуры T / T_c

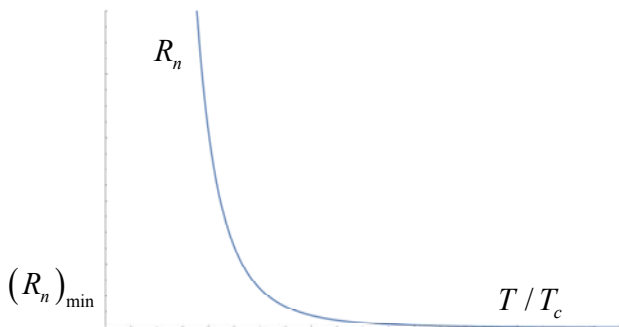


Рис. 4. Влияние относительной температуры на эффективное сопротивление R_n

Из рис. 3 и 4 можно отметить, что инерционные индуктивности и эффективное сопротивление изменяются в широком диапазоне при изменении температуры, и этими параметрами пренебречь нельзя. Для более точной оценки зависимостей вышеуказанных параметров необходимо учитывать распределение тока по сечению сверхпроводящего слоя в зависимости от температуры, т. е. $\Delta S^*(T)$.

В вышеприведенных формулах вводилось различие эффективных масс нормальных и сверхпроводящих электронов, поскольку в общем случае они могут различаться. Основной физический смысл эффективной массы

связан с взаимодействием электронов с периодической структурой кристалла. Эффективную массу нормальных электронов m_n^* в сверхпроводнике, находящегося в нормальном состоянии, следует определять через дисперсионное соотношение $E(k)$ следующим образом: $m_{ij}^{-1} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial k_i \partial k_j}$.

В основном для различных типов материалов эффективная масса электронов находится в диапазоне $m_n^* / m_e \sim 0,01 - 2$, где m_e – масса электрона. Эффективную массу сверхпроводящих электронов m_s^* можно оценить из выражения для глубины проникновения магнитного поля $m_s^* = \frac{4\pi n_s e^2 \lambda^2}{c^2}$, предварительно измерив ее для различных сверхпроводящих материалов. Следует отметить, что, как правило, высокотемпературные сверхпроводники имеют анизотропную структуру, поэтому эффективные массы в различных плоскостях для одного и того же материала различаются друг от друга достаточно сильно, $m_{\perp} \gg m_{\parallel} \sim m_e$.

Возбуждение нормальных и сверхпроводящих токов при гармоническом изменении ЭДС источника тока

В предыдущих разделах были введены и определены путем сопоставления с микроскопическими уравнениями инерционные индуктивности L_s , L_n и эффективное сопротивление R_n . Однако возникает вопрос действительно ли эти параметры настолько нужны, что без них не удастся описать переходные процессы на постоянном токе и колебательные процессы в электрической цепи при синусоидальном изменении ЭДС источника питания, в то время как для обычных проводников всегда удавалось описывать нестационарные и переходные процессы без добавления вышеупомянутых макроскопических параметров, введя обычную индуктивность провода L (или так называемую магнитную индуктивность).

Ниже будут рассмотрены различные случаи, где будет показано, что введение инерционных индуктивностей L_n и L_s в

сверхпроводниках обоснованно и оправданно, и пренебрежение данными макроскопическими параметрами будет приводить к различным противоречиям с имеющимися экспериментальными данными при переменных токах. Также ниже будет показана причина того, почему в случае обычных проводников нет необходимости во введении инерционной индуктивности L_n для нормальных электронов.

Для начала рассмотрим гармоническое изменение ЭДС источника тока по периодическому закону $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ (рис. 1б). При изменении ЭДС источника питания в сверхпроводнике будет индуцироваться переменное

$$\begin{cases} I_s(t) = \frac{(R_n + i\omega L_n / c^2)}{\{(r + i\omega L_s / c^2)(R_n + i\omega L_n / c^2) + i\omega L_s r / c^2\}} \varepsilon_0 e^{i\omega t}, \\ I_n(t) = \frac{i\omega L_s}{c^2 \{(r + i\omega L_s / c^2)(R_n + i\omega L_n / c^2) + i\omega L_s r / c^2\}} \varepsilon_0 e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (33)$$

При переменном ЭДС источника тока при ненулевой температуре $T \neq 0$ [K] возбуждаются как сверхпроводящие, так и нормальные электроны. Теперь если предположить, что инерционная индуктивность для сверхпроводящих электронов равна нулю $L_s = 0$, причем пусть $L_n \neq 0$, то нормальный ток на переменном токе будет всегда тождественно равен нулю $I_n \equiv 0$ в любой момент времени (даже при ненулевой частоте ЭДС источника тока $\omega \neq 0$), как следует из второго выражения в (33), т. е. нормальные электроны не будут возбуждаться в процессе индуцирования переменного электрического поля в сверхпроводнике, что будет противоречить различным экспериментальным данным на переменном токе [8, 9]. Известно, что на переменном токе сопротивление сверхпроводника всегда отлично от нуля, даже при нулевом внешнем магнитном поле, что связано с возбуждением нормальных электронов за счет формирования переменного электрического поля в сверхпроводнике. Таким образом, инерционная индуктивность для сверхпроводящих электронов не может равняться нулю $L_s \neq 0$.

Инерционная индуктивность L_n для нормальных электронов связана с инерционной

электрическое поле, которое будет возбуждать нормальный и сверхпроводящий токи: $I(t) = I_s(t) + I_n(t)$. В силу линейности системы уравнений (1) будем искать периодическое решение для токов в следующем виде: $I_n(t) = I_{n0} e^{i\omega t}$, $I_s(t) = I_{s0} e^{i\omega t}$. Подставив в систему уравнений (1), получим:

$$\begin{cases} I_{s0}(r + i\omega L_s / c^2) + I_{n0}r = \varepsilon_0, \\ I_{s0}r + I_{n0}(r + R_n + i\omega L_n / c^2) = \varepsilon_0. \end{cases} \quad (32)$$

В результате получим выражения для сверхпроводящего и нормального токов:

индуктивностью для сверхпроводящих электронов L_s строго определенным образом через отношения долей концентраций и эффективных масс электронов, согласно уравнению (16). Если инерционная индуктивность $L_s \neq 0$, то не может равняться нулю и индуктивность $L_n \neq 0$. Кроме того, согласно (11) справедливо соотношение $L_n = c^2 \tau R_n$, если положить $L_n = 0$, то и сопротивление R_n должно равняться нулю. Отсюда следует, что при переменном токе не будет диссипации энергии при возбуждении нормальных электронов при изменяющемся электрическом поле, что также будет противоречить эксперименту.

Справедливости ради следует отметить, что в предыдущих разделах в рассматриваемой эквивалентной схеме сверхпроводников не учитывалась обычная индуктивность ленты или катушки.

Эквивалентная электрическая схема сверхпроводников с учетом магнитной индуктивности

Для того, чтобы показать, как будет выглядеть эквивалентная схема сверхпроводников с учетом магнитной индуктивности, про-

делаем некоторые стандартные выкладки. Запишем одно из уравнений Максвелла, описывающее закон об электромагнитной индукции, $\text{rot } \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{B} / \partial t$. Возьмем интеграл от обеих частей уравнения Максвелла по площади, которая будет опираться на замкнутый контур, охватывающий подключенные провода и ВТСП-ленту: $\int \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S} = -(1/c) \int \partial \mathbf{B} / \partial t d\mathbf{S}$. Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса: $\int \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$, где Φ – суммарный магнитный поток через поверхность как от сверхпроводящих, так и нормальных токов. По определению индуктивность L связывает магнитный поток и суммарный транспортный ток, который заводится в электрическую цепь: $\Phi = (1/c) LI_{tr}$. Вследствие закона об электромагнитной индукции индуцированное вихревое электрическое поле будет препятствовать увеличению транспортного тока в цепи $\varepsilon_{ind} = -\frac{1}{c^2} L \frac{dI_{tr}}{dt}$. Таким образом, обычную индуктивность L в эквивалентной электрической цепи необходимо ставить вне контуров, где протекают отдельно друг от друга сверхпроводящий и нормальный токи, т. е. в контуре, где протекает суммарный транспортный ток. В противном случае если вводить индуктивность в ветвях для сверхпроводящего и нормального токов, необходимо будет разделить суммарный магнитный поток Φ на две составляющие: Φ_s – магнитный поток от возбуждения сверхпроводящего тока и Φ_n – поток вследствие движения нормальных электронов. Также нужно будет разделять и индуктивности. Однако стоит заметить, что в величину магнитной индуктивности L будет вносить вклад не только сама сверхпроводящая лента, но и вся остальная часть электрической цепи с подсоединенными проводами к сверхпроводящему материалу.

С этой точки зрения более удобно вставить магнитную индуктивность в ветви, где протекает суммарный транспортный ток. На рис. 5 представлена эквивалентная электрическая схема сверхпроводников (в безвихревом состоянии) на основе двухжидкостной

модели с учетом магнитной и инерционных индуктивностей ленты при переменных токах.

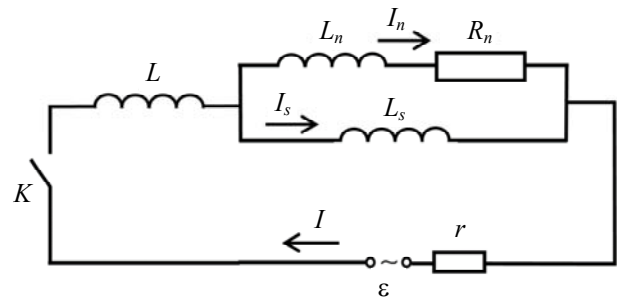


Рис. 5. Эквивалентная электрическая схема сверхпроводников с учетом магнитной и инерционных индуктивностей на основе двухжидкостной модели при переменных токах

Данная эквивалентная электрическая схема сверхпроводников с учетом магнитной индуктивности, а также ранее введенных инерционных индуктивностей для нормальных и сверхпроводящих электронов согласно двухжидкостной модели сверхпроводников описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon - (1/c^2) LI - (1/c^2) L_n \dot{I}_n = I_n(t) R_n + I(t) r, \\ \varepsilon - (1/c^2) LI - (1/c^2) L_s \dot{I}_s = I(t) r. \end{cases} \quad (34)$$

Рассмотрим синусоидальное изменение ЭДС источника тока $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$. Тогда в силу линейности системы обыкновенных дифференциальных уравнений (34) токи также будем искать в виде гармонического изменения с некоторым сдвигом фаз $I_n(t) = I_{n0} e^{i\omega t}$, $I_s(t) = I_{s0} e^{i\omega t}$. Сдвиг фаз относительно изменения ЭДС источника питания будет определяться амплитудными значениями токов, поскольку они представляют собой комплексные величины. Подставив выражения для токов в (34), получим систему уравнений для определения амплитуд соответствующих токов I_{n0} и I_{s0} :

$$\begin{cases} (R_n + r + i\omega(L + L_n)/c^2) I_{n0} + \\ + (r + i\omega L/c^2) I_{s0} = \varepsilon_0, \\ (r + i\omega L/c^2) I_{n0} + \\ + (r + i\omega(L + L_s)/c^2) I_{s0} = \varepsilon_0. \end{cases} \quad (35)$$

Тогда амплитуды токов будут определяться следующими выражениями:

$$\begin{cases} I_{n0} = \frac{i\omega L_s \varepsilon_0 / (rc^2)}{(R_n - \omega^2 (LL_s + LL_n + L_s L_n) / rc^4) + i\omega (LR_n + L_s R_n + L_s r + L_n r) / rc^2}, \\ I_{s0} = \frac{\varepsilon_0 / r (R_n + i\omega L_n / c^2)}{(R_n - \omega^2 (LL_s + LL_n + L_s L_n) / rc^4) + i\omega (LR_n + L_s R_n + L_s r + L_n r) / rc^2}. \end{cases} \quad (36)$$

Если приравнять L_s к нулю, то из (36) видно, что даже при конечном значении магнитной индуктивности L нормальный ток будет тождественно равен нулю $I_{n0} \equiv 0$ при ненулевых значениях частоты изменения ЭДС источника тока, что будет противоречить экспериментальным фактам, согласно которым при переменных токах сопротивление в сверхпроводниках всегда отлично от нуля (даже при нулевом внешнем магнитном поле). Также можно отметить, что при нулевой частоте $\omega = 0$ (случай постоянного ЭДС источника тока) нормальный ток будет равен нулю $I_{n0} = 0$, как и должно быть, весь ток пойдет через сверхпроводящую фазу и будет равен $I_{s0} = \varepsilon_0 / r$. Таким образом, токи будут определяться следующими выражениями:

$$\begin{cases} I_s(t) = \frac{\varepsilon_0}{r} \frac{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} e^{i(\omega t + \varphi - \delta)}}{\sqrt{(1 - \omega^2 (LL_s + LL_n + L_s L_n) / rR_n c^4)^2 + (\omega / rc^2)^2 (L + L_s + (L_s + L_n)r / R_n)^2}}, \\ I_n(t) = \frac{\varepsilon_0}{r} \frac{(\omega L_s / R_n c^2) e^{i(\omega t + \pi/2 - \delta)}}{\sqrt{(1 - \omega^2 (LL_s + LL_n + L_s L_n) / rR_n c^4)^2 + (\omega / rc^2)^2 (L + L_s + (L_s + L_n)r / R_n)^2}}, \end{cases} \quad (37)$$

где сдвиги фаз равны $\varphi = \arctg \omega\tau$, $\delta = \arctg \left(\frac{\omega((L + L_s) + (L_n + L_s)r / R_n) / rc^2}{1 - \omega^2 (LL_s + LL_n + L_s L_n) / rR_n c^4} \right)$. Если ввести сле-

дующие обозначения $\omega_0'^2 = \frac{rR_n c^4}{LL_s + LL_n + L_s L_n}$, $2\gamma' = \frac{c^2 [r(L_n + L_s) + R_n(L_s + L)]}{LL_s + LL_n + L_s L_n}$, смысл которых

будет прояснен ниже, то выражения для токов (37) можно представить в более компактном виде:

$$\begin{cases} I_s(t) = \frac{\varepsilon_0}{r} \frac{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}{\sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_0'^2)^2 + (2\omega\gamma' / \omega_0'^2)^2}} e^{i(\omega t + \varphi - \delta)}, \\ I_n(t) = \frac{\varepsilon_0 L_s}{r L_n} \frac{\omega\tau}{\sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_0'^2)^2 + (2\omega\gamma' / \omega_0'^2)^2}} e^{i(\omega t + \pi/2 - \delta)}, \end{cases} \quad (38)$$

где $\varphi = \arctg \omega\tau$, $\delta = \arctg \left(\frac{2\omega\gamma'}{\omega_0'^2 - \omega^2} \right)$. Зная зависимость сверхпроводящего тока (38), можно найти изменение электрического поля, используя соотношение (12):

$$E(\omega, t) = \frac{\omega}{rc^2 / L_s} \frac{\varepsilon_0}{\Delta l} \frac{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} e^{i(\omega t + \varphi + \pi/2 - \delta)}}{\sqrt{[1 - \omega^2 / \omega_0'^2]^2 + (2\omega\gamma' / \omega_0'^2)^2}}. \quad (39)$$

Зная зависимости токов (38) и электрического поля (39), легко вычислить среднюю за период объемную мощность тепловыделения в сверхпроводнике q_v за счет возбуждения нормальных электронов $q_{vn} = \langle j_n(t) E(t) \rangle = \frac{1}{2} j_{n0} E_0 \cos \varphi = \frac{1}{2} \frac{I_{n0}}{\Delta S^*} E_0 \cos \varphi$:

$$q_{vn} = \frac{1}{2} \alpha_n \sigma_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\Delta l} \right)^2 \left(\frac{\omega}{rc^2 / L_s} \right)^2 \times \frac{\omega_0'^4}{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma'\omega)^2}. \quad (40)$$

Можно обратить внимание на то, что при нулевом значении магнитной индуктивности $L = 0$, будет справедливо $\omega_0'^2 = \omega_0^2 = \frac{rR_n c^4}{L_s L_n}$,

$$2\gamma' = 2\gamma = \frac{c^2 r}{L_s L_n} \left(L_n + L_s \frac{r + R_n}{r} \right).$$

Максимальное значение объемной мощности тепловыделения будет достигаться при частоте $\omega = \omega_0'$ и

$$\text{будет равно } (q_{vn})_{\max} = \frac{1}{2} \alpha_n \sigma_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\Delta l} \right)^2 \left(\frac{1}{rc^2 / L_s} \right)^2 \times \frac{\omega_0'^4}{(2\gamma')^2},$$

тогда (40) можно преобразовать к следующему виду:

$$q_{vn} = (q_{vn})_{\max} \frac{(2\omega\gamma')^2}{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + (2\omega\gamma')^2}. \quad (41)$$

Очевидно, что объемная мощность тепловыделения в сверхпроводнике за счет сверхпроводящих электронов равна нулю $q_{vs} = \langle j_s(t) E(t) \rangle = 0$.

Получим некоторые оценки физических величин для высокотемпературного сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_7$. Возьмем сверхпроводящую ленту со следующими параметрами: $\Delta l = 15$ см, $\Delta a = 1$ см, $\Delta l_z = 10^{-3}$ см, где Δl , Δa и Δl_z – длина, ширина и толщина сверхпроводящего материала. Лондоновская глубина проникновения магнитного поля λ_L для данного материала равна $\lambda_L = 2,7 \times 10^{-6}$ см.

В системе СГС получим минимальные значения инерционных индуктивностей $L_{s\min} \approx 2,5 \times 10^{-4}$ см, $L_{n\min} \approx 1,37 \times 10^{-6}$ см и эффективного сопротивления $R_{n\min} \approx 3,05 \times 10^{-14}$ с/см, что соответствует $(R_n)_{\min} \approx 2,7 \times 10^{-2}$ Ом в системе СИ. Оценим максимальную объемную мощность в сверхпроводнике $(q_{vn})_{\max}$ при критической температуре, в этом случае $\alpha_n = 1$. Предположим, что амплитуда напряжения источника тока равна $\varepsilon_0 \sim 5$ В, а его внутреннее сопротивление $r \sim 0,02$ Ом. Тогда максимальная объемная мощность тепловыделения в сверхпроводнике будет примерно равна $(q_{vn})_{\max} \approx 4 \times 10^8$ Вт/м³. Объем сверхпроводящей ленты равен $\Delta V = 1,5 \times 10^{-8}$ м³, тогда максимальная мощность тепловыделения в сверхпроводнике за счет возбуждения нормальных электронов равна $P_{n\max} = (q_{vn})_{\max} \Delta V = 6$ Вт.

Стоит отметить, что введение магнитной индуктивности L в эквивалентную электрическую цепь на переменном токе, представленную на рис. 5, не повлияет на определение инерционных индуктивностей для сверхпроводящих и нормальных электронов L_s и L_n в силу того, что, если вычесть из первого уравнения системы (34) второе, слагаемое с магнитной индуктивностью $(1/c^2)L\dot{I}$ сокращается.

С помощью эквивалентной электрической схемы, представленной на рис. 5, можно также описать все переходные процессы, протекающие при замыкании ключа на постоянном токе. Из системы уравнений (34) можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для нормального тока с нулевой правой частью:

$$\frac{d^2 I_n}{dt^2} + 2\gamma' \frac{dI_n}{dt} + \omega_0'^2 I_n = 0, \quad (42)$$

где введены квадрат собственной частоты $\omega_0'^2$ и коэффициент затухания γ' , которые ранее появлялись в уравнениях (38)–(41):

$$\omega_0'^2 = \frac{rR_n c^4}{LL_s + LL_n + L_s L_n}, \quad (43)$$

$$2\gamma' = \frac{c^2 (r(L_s + L_n) + R_n(L + L_s))}{LL_s + LL_n + L_s L_n}.$$

При замыкании ключа в цепи в начальный момент времени обе составляющие суммарного тока равны нулю, т. е. $I_n(0) = I_s(0) = 0$. Условия для первых производных от токов можно получить из исходной системы уравнений (34), подставив начальные условия для нормального и сверхпроводящего токов $\left. \frac{dI_n}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\varepsilon c^2 L_s}{LL_s + LL_n + L_n L_s}$, $\left. \frac{dI_s}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\varepsilon c^2 L_n}{LL_s + LL_n + L_n L_s}$. Опуская математические выкладки, представим зависимости нормального и сверхпроводящего токов как для колебательного, так и апериодического переходных процессов:

$$\omega_0'^2 - \gamma'^2 > 0: \begin{cases} I_n(t) = \frac{\varepsilon c^2 L_s}{\sqrt{\omega_0'^2 - \gamma'^2} (LL_s + LL_n + L_n L_s)} e^{-\gamma' t} \sin \sqrt{\omega_0'^2 - \gamma'^2} t, \\ I_s(t) = \frac{\varepsilon}{r} \left\{ 1 - e^{-\gamma' t} \left(\cos \sqrt{\omega_0'^2 - \gamma'^2} t + \frac{\gamma' - \omega_0'^2 L_n / c^2 R_n}{\sqrt{\omega_0'^2 - \gamma'^2}} \sin \sqrt{\omega_0'^2 - \gamma'^2} t \right) \right\}. \end{cases} \quad (44)$$

$$\omega_0'^2 - \gamma'^2 < 0: \begin{cases} I_n(t) = \frac{\varepsilon c^2 L_s}{\sqrt{\gamma'^2 - \omega_0'^2} (LL_s + LL_n + L_n L_s)} e^{-\gamma' t} \operatorname{sh} \sqrt{\gamma'^2 - \omega_0'^2} t, \\ I_s(t) = \frac{\varepsilon}{r} \left\{ 1 - e^{-\gamma' t} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\gamma'^2 - \omega_0'^2} t + \frac{\gamma' - \omega_0'^2 L_n / c^2 R_n}{\sqrt{\gamma'^2 - \omega_0'^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\gamma'^2 - \omega_0'^2} t \right) \right\}. \end{cases} \quad (45)$$

Из (44) и (45) следует, что после выхода на стационарный режим весь ток пойдет через сверхпроводящую фазу и будет равен $I_s(t) = \varepsilon / r$. В колебательном переходном процессе $\omega_0'^2 - \gamma'^2 > 0$ характерное время затухания нормального тока определяется величиной $1/\gamma'$, а в апериодическом есть два характерных времени – $1/\alpha_1$ и $1/\alpha_2$, где $\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma'^2 - \omega_0'^2}$, $\alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma'^2 - \omega_0'^2}$. При нулевой магнитной индуктивности решения для токов (44) и (45) плавно переходят в ранее полученные выражения (4)–(6), как и должно быть.

Инерционная индуктивность

для нормальных электронов в обычных (несверхпроводящих) проводниках с током

В предыдущих разделах было показано, что в сверхпроводниках при переменных токах возбуждаются как нормальные, так и сверхпроводящие электроны, и для описания процессов при переменном ЭДС источника тока согласно двухжидкостной модели необходимо было введение инерционных индук-

тивностей и эффективного сопротивления, в то время как при рассмотрении обычных проводников с током учитывается только обычная индуктивность провода. Ниже будет показано, что более точная электрическая схема проводника с током эквивалентна последовательному подключению обычной индуктивности провода и инерционной индуктивности для нормальных электронов.

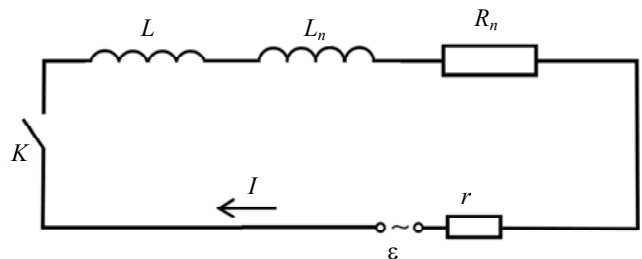


Рис. 6. Эквивалентная электрическая схема обычного проводника с током с учетом магнитной L и инерционной L_n индуктивностей

Рассмотрим обычный проводник с током, где носителями тока будут только нормальные электроны, при возбуждении которых будет происходить диссипация энергии. Эквивалентная схема представлена на рис. 6, в которой будут учитываться эффекты, связанные с

электромагнитной индукцией через введение магнитной индуктивности провода L , а также инерционные характеристики нормальных электронов посредством введения инерционной индуктивности L_n . Запишем уравнение для падения напряжения в замкнутом контуре:

$$\frac{1}{c^2}(L + L_n) \frac{dI_n}{dt} + I_n R = \varepsilon. \quad (46)$$

Движение нормальных электронов будет подчиняться нижеприведенному уравнению, в котором разделим суммарное электрическое поле на две составляющие – электрическое поле $\mathbf{E}_{\text{ист}}$ от подключенного источника питания и вихревое поле $\mathbf{E}_{\text{инд}}$ вследствие закона Фарадея об электромагнитной индукции:

$$\begin{aligned} m_n^* \frac{d\mathbf{V}_n}{dt} &= -\frac{m_n^*}{\tau} \mathbf{V}_n - e\mathbf{E} = \\ &= -\frac{m_n^*}{\tau} \mathbf{V}_n - e(\mathbf{E}_{\text{ист}} + \mathbf{E}_{\text{инд}}). \end{aligned} \quad (47)$$

Под m_n^* будем понимать эффективную массу нормальных электронов в проводнике. Суммарный ток \mathbf{I}_n выразим через скорость движения электронов проводимости и их концентрацию: $\mathbf{I}_n = \mathbf{j}_n \Delta S^* = -ne\mathbf{V}_n \Delta S^*$, где ΔS^* – эффективная площадь поперечного сечения, где протекает ток. Из уравнения Максвелла, описывающего закон об электромагнитной индукции, $\text{rot} \mathbf{E}_{\text{инд}} = -(1/c) \partial \mathbf{B} / \partial t$ и связи суммарного магнитного потока с током через индуктивность $\Phi = (1/c) LI_n$, получим выражение

$$\begin{aligned} \text{для ЭДС индукции } \varepsilon_{\text{инд}} &= E_{\text{инд}} \Delta l = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{d(LI_n)}{dt} = -\frac{1}{c^2} L \frac{dI_n}{dt} = \frac{1}{c^2} Lne\Delta S^* \frac{dV_n}{dt}. \end{aligned}$$

Тогда вихревое электрическое поле будет равно:

$$\mathbf{E}_{\text{инд}} = \frac{1}{c^2} Lne \frac{\Delta S^*}{\Delta l} \frac{d\mathbf{V}_n}{dt} = -\frac{1}{c^2} L \frac{\Delta S^*}{\Delta l} \frac{d\mathbf{j}_n}{dt}. \quad (48)$$

Знак минус означает то, что индуцированное электрическое поле противодействует увеличению тока в электрической цепи. Подставив выражение для вихревого электрического поля (48) в (47), получим:

$$\frac{1}{c^2} Lne^2 \frac{\Delta S^*}{\Delta l} \frac{d\mathbf{V}_n}{dt} + m_n^* \frac{d\mathbf{V}_n}{dt} + \frac{m_n^*}{\tau} \mathbf{V}_n = -e\mathbf{E}_{\text{ист}}. \quad (49)$$

Воспользовавшись определением силы тока и умножив обе части уравнения (49) на выражение $\Delta l / (ne^2 \Delta S^*)$, в результате получим:

$$\frac{1}{c^2} L \frac{d\mathbf{I}_n}{dt} + \frac{\tau}{ne^2 \Delta S^*} \frac{d\mathbf{I}_n}{dt} + \mathbf{I}_n \frac{1}{ne^2 \Delta S^*} \frac{\Delta l}{m_n^*} = \mathbf{E}_{\text{ист}} \Delta l. \quad (50)$$

Выразим сопротивление провода длиной Δl и площадью поперечного сечения ΔS^* через микроскопические параметры: $R_n = \rho \frac{\Delta l}{\Delta S^*} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\Delta l}{\Delta S^*} = \frac{1}{ne^2 \tau / m_n^*} \frac{\Delta l}{\Delta S^*}$. Используя выражение для сопротивления, запишем уравнение (50) в более простом виде:

$$\frac{1}{c^2} L \frac{dI_n}{dt} + \tau R_n \frac{dI_n}{dt} + I_n R_n = E_{\text{ист}} \Delta l = \varepsilon_{\text{ист}}. \quad (51)$$

Сопоставив (46) с уравнением (51), получим $(1/c^2)L_n = \tau R_n$. Инерционную индуктивность для нормальных электронов L_n можно привести к следующему виду:

$$L_n = c^2 \tau R_n = \left(\frac{m_n^*}{m_s^*} \right) \frac{4\pi \lambda_L^2 \Delta l}{\Delta S^*}, \quad (52)$$

что сопоставимо с выражением (15) при $\alpha_n = 1$. Таким образом, когда транспортный ток переносится только нормальными электронами, суммарная индуктивность равна алгебраической сумме обычной индуктивности проводника с током и инерционной индуктивности для нормальных электронов. В случае обычного (несверхпроводящего) проводника индуктивность провода намного превосходит инерционную индуктивность, поэтому вторым слагаемым в сумме пренебрегают. Поэтому для обычных проводников при исследовании переходных или периодических нестационарных процессов нет необходимости во введении инерционной индуктивности для нормальных электронов L_n , что нельзя сказать при построении эквивалентной

электрической схемы сверхпроводников, когда ток протекает как через сверхпроводящую, так и нормальную фазы.

Следует отметить, что при достаточно больших частотах, когда начинают проявляться эффекты, связанные с вытеснением тока к границам проводника (явление скин-эффекта), эффективная площадь ΔS^* в (52), по которой протекает ток будет уменьшаться, и соответственно инерционная индуктивность L_n будет увеличиваться. При частотах тока, при которых поверхностный слой окажется порядка глубины проникновения $\sim \lambda_L$, то, например, для провода круглого сечения радиуса r будем иметь $L_n \sim \frac{4\pi\lambda_L^2 \Delta l}{2\pi r \lambda_L} = 2\lambda_L \frac{\Delta l}{r}$. Однако при больших частотах проявляется частотная зависимость и магнитной индуктивности L , а не только инерционной L_n .

Заключение

Для описания переходных процессов в сверхпроводниках при постоянном и переменном токах в эквивалентной электрической схеме впервые введены инерционные индуктивности для нормальных и сверхпроводящих электронов L_n и L_s в соответствии с двухжидкостной моделью сверхпроводников, согласно которой все электроны в объеме сверхпроводящего материала условно разделяются на два типа: сверхпроводящие и нормальные. Сверхпроводящие электроны за счет объединения в так называемые куперовские пары (согласно одному из механизмов возникновения сверхпроводящего состояния) не испытывают рассеяния, а при возбуждении нормальных электронов происходит диссипация энергии в виде джоулевых потерь при взаимодействии с кристаллической решеткой. Инерционные индуктивности характеризуют динамику ускорения двух типов электронов под действием переменных электрических полей в сверхпроводнике. Введенные индуктивности получены путем сопоставления макроскопических уравнений для всей электрической цепи с микроскопическими уравнениями движения нормальных и сверхпроводящих электронов.

В работе также представлена эквивалентная электрическая схема сверхпроводников с учетом магнитной и инерционных индуктивностей для двух типов электронов. Показано, что пренебрежение какими-либо из инерционных индуктивностей приводит к физическим противоречиям с имеющимися экспериментальными данными на переменном токе. Например, при пренебрежении инерционной индуктивностью для сверхпроводящих электронов ($L_s = 0$) получено, что на переменном токе при гармоническом изменении ЭДС источника тока ($\omega \neq 0$) нормальный ток в сверхпроводнике при индуцированном электрическом поле будет тождественно равен нулю в любой момент времени $I_n(t) \equiv 0$, т. е. нормальные электроны не будут возбуждаться. Таким образом, при переменном токе при ненулевой температуре $T \neq 0$ [K] в сверхпроводнике не будет никаких джоулевых потерь (при нулевом внешнем магнитном поле), что противоречит известным экспериментальным фактам.

Также получено, что для обычных (несверхпроводящих) проводников в общем случае суммарная индуктивность представляется как последовательное соединение магнитной индуктивности, связанной с изменением магнитной индукции в соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея, и инерционной индуктивности для нормальных электронов L_n . Показано, что в случае обычных проводников инерционной индуктивностью для нормальных электронов можно пренебречь по сравнению с магнитной индуктивностью, что нельзя сделать при описании переходных процессов в сверхпроводниках, поскольку ток переносится как нормальными, так и сверхпроводящими электронами.

Полученные результаты позволяют построить эквивалентную электрическую схему сверхпроводников для высокотемпературных сверхпроводящих лент и катушек с учетом слоистости их структуры и исследовать процессы возбуждения токов в различных слоях ленты при различных температурах при переменном токе. Предложенный подход для анализа нестационарных процессов в сверхпроводниках является существенным заданием для построения математических моделей по пред-

сказанию вольт-амперных характеристик и тепловыделения в единице объема при соответствующих доработках математических моделей и рассмотрении различных протекающих процессов в сверхпроводниках II-го рода, в том числе проникание квантов магнитного потока (вихрей Абрикосова), дрейф вихревой решетки при наличии транспортного тока в сверхпроводящем слое, пиннинг вихрей и другие эффекты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрикосов А. А. / ДАН СССР. 1952. Т. 86. С. 489.
2. Абрикосов А. А. / ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 1442.
3. Абрикосов А. А. Основы теории металлов. – М.: Наука, 1987.
4. Abrikosov A. A. / Journal of Physics and Chemistry of Solids. 1957. Vol. 2. Is. 3. P. 199–208.
5. Cribier D., Jacrot B., Rao L. M., Farnoux B. / Phys. Lett. 1964. Vol. 9. P. 106.
6. Stephen M. J., Bardeen J. / Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 14. № 4. P. 112–113.
7. Bardeen J., Stephen M. J. / Phys. Rev. 1965. Vol. 140. № 4A. P. A1197–A1207.
8. Ципенюк Ю. М. Физические основы сверхпроводимости: учебное пособие для вузов. – М.: Изд-во МФТИ, 2002.
9. Шмидт В. В. Введение в физику сверхпроводников. – М.: МЦНМО, 2000.
10. Bardeen J. / Phys. Rev. Lett. 1958. Vol. 1. № 11. P. 399–400.
11. London F. Superfluids. Vol. 1 and 2. – New York: John Wiley and Sons, 1954.
12. Gorter C. J. Progress in Low-Temperature Physics. Chap. 1. – North Holland Publishing Company, 1955.
13. Landau L. D. / J. Phys. U.S.S.R. 1941. Vol. 5. P. 71.
14. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R. / Phys. Rev. 1957. Vol. 106. P. 162.
15. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R. / Phys. Rev. 1957. Vol. 108. P. 1175.
16. Bardeen J., Stephen M. J. / Phys. Rev. 1965. Vol. 140. P. 1197.
17. Боголюбов Н. Н. / ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58.
18. Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В. Новый метод в теории сверхпроводимости. – М.: Наука, 1958.
19. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R. / Phys. Rev. 1957. Vol. 106. P. 162–164.
20. Бардин Дж., Купер Л., Шриффер Дж. Теория сверхпроводимости / под ред. Боголюбова Н. Н. – М.: ИЛ, 1960. С. 103.
21. Meissner W., Ochsenfeld R. / Naturwiss. 1933. Vol. 21. P. 787.
22. London F., London H. / Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. A149. P. 71.
23. London F. / Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. A512. P. 24.
24. London F. / Phys. Rev. 1948. Vol. 74. P. 562.
25. London F. / Physica. 1936. Vol. 3. P. 450.
26. London F. Une conception nouvelle de la supraconductibilité. – Paris, 1937.

PACS: 74.20De

Equivalent electrical circuit of superconductors taking into account magnetic and inertial inductances for superconducting and normal electrons

K. A. Osipov, A. N. Varyukhin, V. S. Zakharchenko and A. V. Geliev

Central Institute of Aviation Motors named after P. I. Baranov
2 Aviamotornaya st., Moscow, 111116, Russia
E-mail: kaosipov@ciam.ru

Received 20.07.2023; revised 6.10.2023; accepted 23.10.2023

To describe transients during excitation of currents in superconductors with both constant and variable electromotive force of the current source, inertial inductances for superconducting and normal electrons (L_s and L_n) in an equivalent electrical circuit in accordance with the two-fluid model of superconductors are introduced. The paper also presents an equivalent electrical circuit of superconductors taking into account magnetic and inertial inductances, which allows us to estimate heat generation in high-temperature superconductors at alternating currents due to the excitation of normal electrons. It is shown that the neglect of certain inertial inductors (L_s or L_n) leads to physical contradictions with the

available experimental data on superconductors at alternating currents. In addition, it was found that the total inductance for ordinary (non-superconducting) conductors with current should be represented as a series connection of magnetic inductance associated with a change in magnetic flux and inertial inductance for normal electrons.

Keywords: inertial inductances, equivalent electrical circuit, superconductivity, high-temperature superconductivity, two-fluid model, normal electrons, superconducting electrons.

DOI: 10.51368/2307-4469-2023-11-6-473-490

REFERENCES

1. Abrikosov A. A., Reports of the Academy of Sciences USSR **86**, 489 (1952).
2. Abrikosov A. A., ZhETF **32**, 1442 (1957).
3. Abrikosov A. A., Fundamentals of metals, Moscow, Nauka, 1987.
4. Abrikosov A. A., Journal of Physics and Chemistry of Solids **2** (3), 199–208 (1957).
5. Cribier D., Jacrot B., Rao L. M. and Farnoux B., Phys. Lett. **9**, 106 (1964).
6. Stephen M. J. and Bardeen J., Phys. Rev. Lett. **14** (4), 112–113 (1965).
7. Bardeen J. and Stephen M. J., Phys. Rev. **140** (4A), A1197–A1207 (1965).
8. Tsipenyuk Yu. M., Physical foundations of superconductivity: textbook for universities, Moscow, MIPT Publishing House, 2002.
9. Schmidt V. V., Introduction to the physics of superconductors, Moscow, ICNMO, 2000.
10. Bardeen J., Phys. Rev. Lett. **1** (11), 399–400 (1958).
11. London F., Superfluids. Vol. 1 and 2, New York, John Wiley and Sons, 1954.
12. Gorter C. J. Progress in Low-Temperature Physics. Chap. 1, North Holland Publishing Company, 1955.
13. Landau L. D., J. Phys. U.S.S.R. **5**, 71 (1941).
14. Bardeen J., Cooper L. N. and Schrieffer J. R., Phys. Rev. **106**, 162 (1957).
15. Bardeen J., Cooper L. N. and Schrieffer J. R., Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
16. Bardeen J. and Stephen M. J., Phys. Rev. **140**, 1197 (1965).
17. Bogolyubov N. N., Nuovo cim. **7**, 794 (1958).
18. Bogolyubov N. N., Tolmachev V. V. and Shirkov D. V., A new method in the theory of superconductivity, Moscow, Nauka, 1958.
19. Bardeen J., Cooper L. N. and Schrieffer J. R., Phys. Rev. **106**, 162–164 (1957).
20. Bardeen J., Cooper L. and Schrieffer J., In the collection: Theory of superconductivity, ed. by Bogolyubov N. N., Moscow, IL, 1960, pp. 103.
21. Meissner W. and Ochsenfeld R., Naturwiss **21**, 787 (1933).
22. London F. and London H., Proc. Roy. Soc. **A149**, 71 (1935).
23. London F., Proc. Roy. Soc. **A512**, 24 (1935).
24. London F., Phys. Rev. **74**, 562 (1948).
25. London F., Physica **3**, 450 (1936).
26. London F., Une conception nouvelle de la supraconductibilit e, Paris, 1937.