

УДК 537.2, 536.2
EDN: DJCBOJ

PACS: 41.20.Cv, 44.10.+i



Метод отражений в задачах электростатики и теплопроводности плоскостойких сред, состоящих из двух пленок

А. Б. Петрин

Формулируется и доказывается метод отражений электростатики для точечного заряда, расположенного рядом с плоскостойкой средой, состоящей из двух пленок на диэлектрическом полупространстве. Метод обобщается на случай произвольной системы зарядов и применяется к решению математически аналогичных задач электростатики и стационарной теплопроводности плоскостойких сред. Рассмотрена задача нахождения распределений электростатического потенциала вокруг проводящей сферы, расположенной вблизи плоскостойкой структуры, состоящей из двух диэлектрических пленок на диэлектрическом полупространстве. Обсуждаются решения аналогичных задач нахождения распределения температур равномерно нагретых тел, расположенных вблизи теплопроводящей плоскостойкой структуры из двух теплопроводящих пленок на теплопроводящем полупространстве.

Ключевые слова: плоскостойкая среда, метод отражений, электростатика, теплопроводность.

DOI: 10.51368/2307-4469-2024-12-1-18-37

Введение

Анализ электромагнитных полей и теплообмена в плоскостойких структурах является важной частью проектирования устройств микроэлектроники. Для решения таких задач, как правило, используют Фурье-преобразования по двум координатам в плоскости структуры и, учитывая граничные условия, приходят к различным матричным методам, которые успешно применяются к решению задач излучения и распространения электромагнитных волн [1–4], акустики [5], теплопроводности [6–9] плоскостойких сред. В работе

[10] был предложен оригинальный вариант строгой электромагнитной теории излучения элементарного диполя, расположенного на границе или внутри плоскостойкой структуры, который является развитием работ [11, 12]. В частности, в [10] был предложен метод аналитического упрощения решения, имеющий потенциально важное значение. Обобщение данного метода для случая произвольного количества пленок в плоскостойкой структуре позволило привести формулы для излучаемых полей к одномерным интегралам, что существенно упростило анализ задачи и ускорило численные расчеты. Так, в [13] развитые математические подходы были применены к нахождению трехмерного фундаментального решения электростатики (квазиэлектростатики) в плоскостойких средах, то есть к нахождению поля точечного заряда в плоскостойких средах. На основе полученных результатов, была предложена формулировка обобщенного метода зеркальных отражений для точечного заряда, расположенного рядом с плоскостой-

Петрин Андрей Борисович, доцент, к.ф.-м.н.
E-mail: petrin@ihed.ras.ru, a_petrin@mail.ru
Объединенный институт высоких температур РАН,
Россия, 125412, Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2.

Статья поступила в редакцию 13.11.2023
После доработки 30.11.2023
Принята к публикации 12.12.2023
Шифр научной специальности: 1.3.13, 1.3.14.

© Петрин А. Б., 2024

той структурой. Этот результат в работе [13] был обобщен на случай произвольного распределения зарядов вблизи плоскостойкой структуры и произвольного количества пленок. Однако, в развитом в [13] обобщенном методе зеркальном отражений приходится проводить двойное интегрирование, что ограничивает скорость вычислений, проводимых с использованием этого метода. В [14] обобщенный метод зеркальных отражений был модифицирован применительно к важной частной задаче – точечного заряда, расположенного рядом с плоскостойкой структурой, состоящей из одной пленки на диэлектрическом полупространстве. Модифицированная формулировка метода отражений позволила исключить интегрирования, упростить и ускорить расчеты.

Данная работа является продолжением и обобщением работы [14, 15]. Ниже, метод зеркальных отражений работы [14] для одной пленки обобщен на случай плоскостойкой структуры, состоящей из двух пленок. При этом, также как в [14], двойное интегрирование удалось заменить суммированием по виртуальным зарядам. На основе предложенного метода, в качестве примера, решена задача нахождения распределения электростатического потенциала вблизи проводящей сферы, расположенные рядом с плоскостойкой структурой, состоящей из двух диэлектрических пленок, лежащей на диэлектрическом полупространстве. На основе аналогии электростатики и стационарной теплопроводности обсуждаются аналогичные задачи нахождения распределения температурных полей.

Постановка задачи.

Электрическое поле точечного заряда, расположенного в плоскостойкой структуре

Рассмотрим задачу нахождения электростатического поля от точечного заряда q , расположенного внутри плоскостойкой структуры. Пусть, для общности, этот заряд расположен внутри одной из пленок плоскостойкой структуры, состоящей из нескольких пленок и из двух окружающих полупространств. Будем сначала считать, что заряд расположен в одной из пленок, а затем обобщим эту задачу на случай, когда заряд распо-

ложен на их границе или в одном из полупространств.

Пусть общее число пленок равно N_f , толщина m -й пленки равна d_m и полная толщина слоистой структуры равна $d_{tot} = \sum_{m=1}^{N_f} d_m$. Общее число границ пленок обозначим как $N = N_f + 1$. Пронумеруем области пространства $j = 1, \dots, (N + 1)$ (на рис. 1 показана для примера задача с $N = 4$ и $N_f = 3$). Предположим, что пленки имеют абсолютные диэлектрические проницаемости равные ϵ_j , а перед и за слоистой структурой находятся однородные полупространства с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_{N+1} . Обозначим также через z_j – координаты N границ пленок по оси Z следующим образом: $z_1 = 0$, $z_j = \sum_{m=1}^{j-1} d_m$ при $j = 2, \dots, N$.

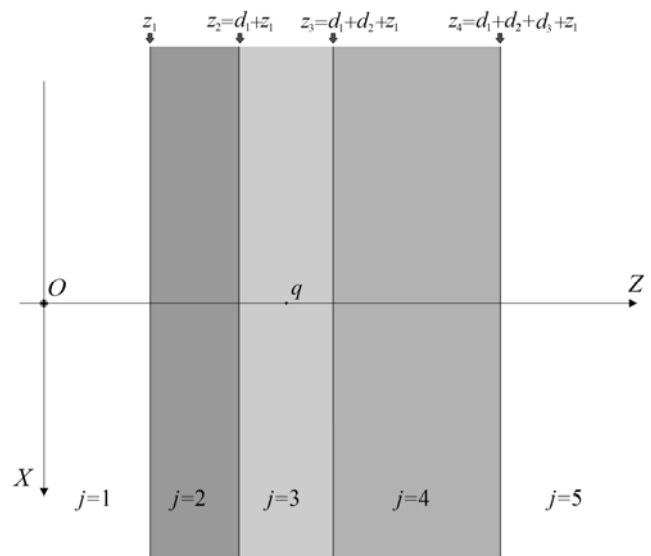


Рис. 1. Геометрия плоскостойкой структуры, состоящей из трех пленок

Уравнения электростатики (или квазиэлектростатики) в области с номером j можно записать через электрический потенциал ϕ_j в виде: $\Delta \phi_j = -\rho/\epsilon_j$, где Δ – оператор Лапласа, ρ – объемная плотность заряда, ϵ_j – абсолютная диэлектрическая проницаемость j -й области.

Пусть в области с номером j нет сторонних зарядов между границами z_{j-1} и z_j . И пусть диэлектрическая проницаемость сре-

ды в этой пленке равна ε_j . Представим электрический потенциал в области в виде Фурье разложения:

$$\varphi_j(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_j(\xi, \eta, z) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Подставим в уравнение $\Delta\varphi_j = 0$ потенциал в виде Фурье-разложения, тогда в рассматриваемой области можно записать получим $d^2\tilde{\varphi}_j/dz^2 - \gamma^2\tilde{\varphi}_j = 0$, где $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$. Общее решение полученного уравнения в области $[z_{j-1}, z_j]$ запишем в виде [13]:

$$\begin{aligned} \varphi_j(x, y, z) = & \\ = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_j^+ e^{-\gamma(z-z_{j-1})} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_j^- e^{\gamma(z-z_j)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\hat{\varphi}_j^+$ и $\hat{\varphi}_j^-$ являются функциями только ξ и η . Вводя вектор-столбец $\hat{\mathcal{F}}_j = \hat{\mathcal{F}}_j(\xi, \eta) = (\hat{\varphi}_j^+; \hat{\varphi}_j^-)^T$ и матрицы \mathbf{L}_j и \mathbf{R}_j , а также $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$, найдем фурье-образ электрического потенциала и нормальную компоненту индукции электрического поля двух границах области j :

$$\begin{aligned} \left. \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_j \\ \tilde{D}_{j,z} \end{pmatrix} \right|_{z=z_{j-1}} &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_{j-1}} \\ \varepsilon_j \gamma & -\varepsilon_j \gamma e^{-\gamma d_{j-1}} \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{F}}_j = \mathbf{L}_j \times \hat{\mathcal{F}}_j, \\ \left. \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_j \\ \tilde{D}_{j,z} \end{pmatrix} \right|_{z=z_j} &= \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_{j-1}} & 1 \\ \varepsilon_j \gamma e^{-\gamma d_{j-1}} & -\varepsilon_j \gamma \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{F}}_j = \mathbf{R}_j \times \hat{\mathcal{F}}_j. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим теперь многослойную структуру, внутри которой нет сторонних зарядов. Рассмотрим границу $z = z_j$ между областями с номерами j и $j+1$. Непрерывность тангенциальных компонент напряженностей электрического поля $E_{j,x}$, $E_{j+1,x}$, $E_{j,y}$, $E_{j+1,y}$ и нормальных компонент электрической индукции $D_{j,z} = -\varepsilon_j (\partial\varphi_j/\partial z)$ и $D_{j+1,z} =$

$= -\varepsilon_{j+1} (\partial\varphi_{j+1}/\partial z)$. Граничные условия для тангенциальных компонент электрического поля можно записать через соответствующие электрические потенциалы φ_j и φ_{j+1} , в результате получим: $\varphi_j|_{(x,y,z_j)} = \varphi_{j+1}|_{(x,y,z_j)}$, $-\varepsilon_j (\partial\varphi_j/\partial z)|_{(x,y,z_j)} = -\varepsilon_{j+1} (\partial\varphi_{j+1}/\partial z)|_{(x,y,z_j)}$, где электрический потенциал φ_{j+1} в области $j+1$ выражается формулой (3), в которой произведена замена индексов $j \rightarrow j+1$. Так как уравнения электростатики (квазистатики) – линейные уравнения, то граничные условия должны выполняться для каждого члена фурье-разложения, то есть граничные условия выполняются для фурье-образов соответствующих величин: $\tilde{\varphi}_j|_{(\xi,\eta,z_j)} - \tilde{\varphi}_{j+1}|_{(\xi,\eta,z_j)} = 0$ и $\tilde{D}_{j,z}|_{(\xi,\eta,z_j)} - \tilde{D}_{j+1,z}|_{(\xi,\eta,z_j)} = 0$. Эти условия на границе $z = z_j$ можно записать в виде

$$\mathbf{R}_j \times \hat{\mathcal{F}}_j = \mathbf{L}_{j+1} \times \hat{\mathcal{F}}_{j+1}. \quad (3)$$

Уравнение (8) можно записать для $j = 2, \dots, (N-1)$, где $(N+1)$ – общее число областей, N – число границ, то есть для всех границ, исключая первую ($j=1$) и последнюю ($j=N$) границы. То есть, исключая границы z_1 и $z_N = d_{tot} = \sum_{m=1}^{N-1} d_m$, где d_{tot} – общая толщина слоистой структуры (сумма толщин пленок, составляющих рассматриваемую структуру).

Общее решение для электрического потенциала в области $j=1$, то есть в интервале $(-\infty, z_1]$, запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) = & (2\pi)^{-2} \times \\ \times & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\varphi}_1^+ e^{-\gamma(z-z_1)} + \hat{\varphi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)}) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначая $\hat{\mathcal{F}}_1 = (\hat{\varphi}_1^+; \hat{\varphi}_1^-)^T$, граничные условия при $z = z_1$ можно записать

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{F}}_1 = \mathbf{L}_2 \times \hat{\mathcal{F}}_2. \quad (5)$$

Аналогично, общее решение для потенциала в области $j = N + 1$, то есть в интервале $[z_N, +\infty)$, запишем в виде

$$\varphi_{N+1}(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\varphi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} + \hat{\varphi}_{N+1}^- e^{\gamma(z-z_N)}) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (6)$$

и граничные условия при $z = z_N$ можно записать в виде

$$\mathbf{R}_N \times \hat{\mathcal{F}}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1}\gamma & -\varepsilon_{N+1}\gamma \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1}, \quad (7)$$

где $\hat{\mathcal{F}}_{N+1} = (\hat{\varphi}_{N+1}^+, \hat{\varphi}_{N+1}^-)^T$. Уравнения (3), (5) и (7) позволяют связать вектор-столбцы $\hat{\mathcal{F}}_1$ и $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$ в первой и последней областях задачи (то есть в полупространствах, вне плоскостистой структуры) следующим матричным уравнением $\hat{\mathcal{F}}_1 = \left(\mathbf{T}_1 \times \prod_{m=2}^N \mathbf{T}_m \times \mathbf{T}_{N+1} \right) \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1}$, где

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1\gamma & -\varepsilon_1\gamma \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_{m-1}} \\ \varepsilon_m\gamma & -\varepsilon_m\gamma e^{-\gamma d_{m-1}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_{m-1}} & 1 \\ \varepsilon_m\gamma e^{-\gamma d_{m-1}} & -\varepsilon_m\gamma \end{pmatrix}^{-1}, \quad (8)$$

$$\mathbf{T}_{N+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1}\gamma & -\varepsilon_{N+1}\gamma \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что вектор-столбцы в областях с произвольными номерами S и P , где $1 \leq S < P \leq (N + 1)$, будут связаны формулой $\hat{\mathcal{F}}_S = \left(\prod_{m=S}^P \mathbf{T}_m \right) \times \hat{\mathcal{F}}_P$.

Рассмотри точечный заряд q , расположенный в области с номером s , в точке $(0, 0, z_q)$. Пусть этот заряд определяется распределением плотности $\rho(x, y, z) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - z_q)$, где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Тогда фурье-образ этого распределения определяется следующим выражением

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(\xi, \eta, z) &= \\ &= q \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z - z_q) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy = \\ &= q\delta(z - z_q). \end{aligned}$$

Пусть этот точечный заряд находится в бесконечно тонком слое $(z_q - \Delta z/2, z_q + \Delta z/2)$. Тогда из уравнений электростатики $\text{rot}\mathbf{E} = 0$ и $\text{div}\mathbf{D} = \rho$ для фурье-образов полей, в пределе при $\Delta z \rightarrow 0$, можно записать [14, 15]

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_q+0} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_q-0} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Тогда, используя (2) и (3), получим, после несложных преобразований [14, 15], уравнение

$$\mathbf{H}_R \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1} = \mathbf{H}_L \times \hat{\mathcal{F}}_1 + \mathbf{V}, \quad (9)$$

где $\mathbf{V} = (0, q)^T$ – вектор-столбец, характеризующий возбуждающее воздействие на плоскостистую систему точечного заряда, а матрицы \mathbf{H}_R и \mathbf{H}_L – выражаются через матрицы областей задачи \mathbf{T}_j , справа и слева от заряда, следующим образом: $\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_R \times \left(\prod_{m=s+1}^{N+1} \mathbf{T}_m \right)$, $\mathbf{H}_L = \left(\left(\prod_{m=1}^{s-1} \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{T}_L \right)^{-1}$, где матрицы \mathbf{T}_m определяются (8).

Так как точечный заряд (источник полей) находится исключительно внутри плоскостистой структуры, в столбцах $\hat{\mathcal{F}}_1$ и $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$ есть только компоненты, определяющие поля, убывающие при удалении от плоскостистой структуры. Чтобы получить эти оставшиеся, компоненты $\hat{\mathcal{F}}_1$ и $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$ разобьем каждую матрицу \mathbf{H}_R и \mathbf{H}_L на 4 элемента, тогда (9) примет вид

$$\begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{N+1}^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\varphi}_1^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Это уравнение можно снова объединить в одно матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -H_{LB} & H_{RA} \\ -H_{LD} & H_{RC} \end{pmatrix} \hat{\mathcal{F}}_{out} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где введен вектор-столбец $\hat{\mathcal{F}}_{out} = (\hat{\phi}_1^-; \hat{\phi}_{N+1}^+)^T$. Откуда найдем $\hat{\phi}_1^-$ и $\hat{\phi}_{N+1}^+$:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^- &= qH_{RA} / (H_{RC}H_{LB} - H_{RA}H_{LD}) \text{ и} \\ \hat{\phi}_{N+1}^+ &= H_{LB}q / (H_{RC}H_{LB} - H_{RA}H_{LD}). \end{aligned} \quad (11)$$

Убывающие поля в полупространстве $j=1$ и $j=N+1$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \\ \phi_{N+1}(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (12)$$

Зная $\hat{\mathcal{F}}_1$ и $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$, можно, используя граничные условия, найти вектор-столбцы потенциалов $\hat{\mathcal{F}}_j$ в любой области j . После этого, потенциал в любой из этих областей может быть найден по формуле (3). Таким образом, поля будут определены во всем пространстве.

Потенциал точечного заряда, расположенного на некотором расстоянии от плоскостной структуры из двух пленок

Рассмотрим задачу нахождения потенциала от точечного заряда q , расположенного в полупространстве с диэлектрической проницаемостью ϵ_f (см. рис. 2). Заряд находится на некотором расстоянии от двух пленок с проницаемостями ϵ_{p1} и ϵ_{p2} и толщинами h_1 и h_2 , нанесенных на полупространство с проницаемостью ϵ_d (см. рис. 2).

В системе координат (см. рис. 2) заряд находится в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}_q = (0; 0; z_q)$, на расстоянии $d = (z_b - z_q)$ вдоль оси Z от первой пленки. Эту задачу можно рассмотреть как задачу нахождения потенциала от точечного заряда, расположенного на поверхности вспомогательной пленки

толщины $d = (z_b - z_q)$, причем диэлектрические постоянные этой вспомогательной пленки и полупространства слева равны ϵ_f .

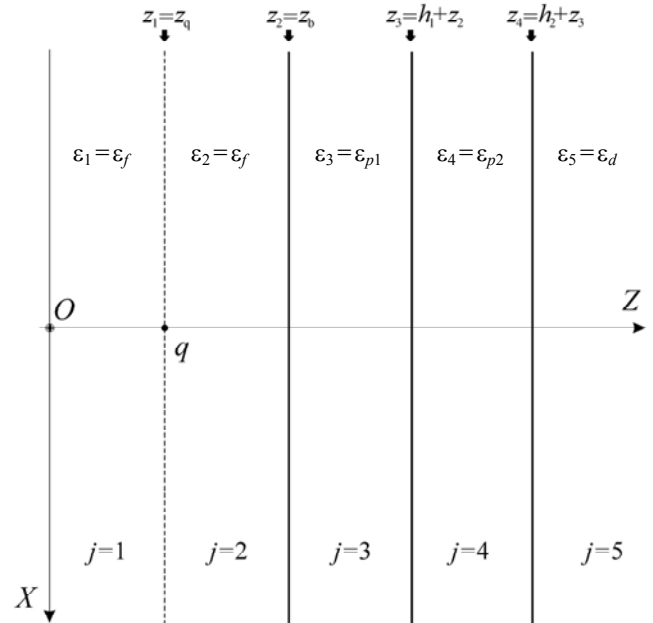


Рис. 2. Точечный заряд q , расположен в свободном пространстве с диэлектрической проницаемостью ϵ_f в точке с координатой z_q на расстоянии $(z_b - z_q)$ от двух пленок с толщинами h_1 , h_2 и диэлектрическими проницаемостями ϵ_{p1} , ϵ_{p2} . Диэлектрическая проницаемость полупространства ϵ_d

В такой постановке имеется пять областей. Введем следующую нумерацию областей: индекс $j=1$ соответствует полупространству с ϵ_f , $j=2$ – вспомогательной пленке с $\epsilon_2 = \epsilon_f$ и толщиной d , $j=3$ – реальной пленке с $\epsilon_3 = \epsilon_{p1}$ толщиной h_1 , $j=4$ – реальной пленке с $\epsilon_4 = \epsilon_{p2}$ толщиной h_2 , а индекс $j=5$ соответствует полупространству с $\epsilon_5 = \epsilon_d$ (см. рис. 2).

Тогда, $N=4$, $z_1 = z_q$, $z_2 = z_b$, $z_3 = h_1 + z_2$, $z_4 = h_2 + z_3$, $\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_4 \times \mathbf{T}_5$, $\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1)^{-1}$ и уравнение (9) примет вид

$$(\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_4 \times \mathbf{T}_5) \times \hat{\mathcal{F}}_5 = (\mathbf{T}_1)^{-1} \times \hat{\mathcal{F}}_1 + \mathbf{V}, \quad (13)$$

где матрицы выражаются следующими формулами

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \quad \mathbf{T}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_d \gamma & -\varepsilon_d \gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d} \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma e^{-\gamma d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma d} & 1 \\ \varepsilon_f \gamma e^{-\gamma d} & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_1} \\ \varepsilon_{p1} \gamma & -\varepsilon_{p1} \gamma e^{-\gamma h_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_1} & 1 \\ \varepsilon_{p1} \gamma e^{-\gamma h_1} & -\varepsilon_{p1} \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \quad \mathbf{T}_4 = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_2} \\ \varepsilon_{p2} \gamma & -\varepsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_2} & 1 \\ \varepsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} & -\varepsilon_{p2} \gamma \end{pmatrix}^{-1},$$

а вектор столбец точечного заряда равен $\mathbf{V} = (0; \quad q)^T$. Тогда

$$\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_R = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d} \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma e^{-\gamma d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma d} & 1 \\ \varepsilon_f \gamma e^{-\gamma d} & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_1} \\ \varepsilon_{p1} \gamma & -\varepsilon_{p1} \gamma e^{-\gamma h_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_1} & 1 \\ \varepsilon_{p1} \gamma e^{-\gamma h_1} & -\varepsilon_{p1} \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_2} \\ \varepsilon_{p2} \gamma & -\varepsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h_2} & 1 \\ \varepsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} & -\varepsilon_{p2} \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_d \gamma & -\varepsilon_d \gamma \end{pmatrix}.$$

Вводя вектор-столбец $\hat{\mathcal{F}}_{out} = (\hat{\phi}_1^-; \quad \hat{\phi}_5^+)^T$, получим

$$\begin{pmatrix} -1 & H_{RA} \\ \varepsilon_f \gamma & H_{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1^- \\ \hat{\phi}_5^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Из (14) получим

$$\hat{\phi}_1^- = q H_{RA} / (H_{RC} + \varepsilon_f \gamma H_{RA}) \quad \text{и} \quad \hat{\phi}_5^+ = q / (H_{RC} + \varepsilon_f \gamma H_{RA}). \quad (15)$$

В явном виде, H_{RA} и H_{RC} можно представить через гиперболические синусы и косинусы

$$H_{RA} = \left[\left(\text{ch}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_f} \text{sh}(\gamma d) \right) \text{ch}(\gamma h_1) + \left(\frac{\varepsilon_{p1}}{\varepsilon_f} \text{sh}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_{p1}} \text{ch}(\gamma d) \right) \text{sh}(\gamma h_1) \right] \text{ch}(\gamma h_2) +$$

$$+ \left[\left(\frac{\varepsilon_{p2}}{\varepsilon_f} \text{sh}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_{p2}} \text{ch}(\gamma d) \right) \text{ch}(\gamma h_1) + \left(\frac{\varepsilon_{p2}}{\varepsilon_{p1}} \text{ch}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_{p1} \varepsilon_d}{\varepsilon_{p2} \varepsilon_f} \text{sh}(\gamma d) \right) \text{sh}(\gamma h_1) \right] \text{sh}(\gamma h_2), \quad (16)$$

$$H_{RC} = \gamma \left[\left(\varepsilon_f \text{sh}(\gamma d) + \varepsilon_d \text{ch}(\gamma d) \right) \text{ch}(\gamma h_1) + \left(\varepsilon_{p1} \text{ch}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_f \varepsilon_d}{\varepsilon_{p1}} \text{sh}(\gamma d) \right) \text{sh}(\gamma h_1) \right] \text{ch}(\gamma h_2) +$$

$$+ \gamma \left[\left(\varepsilon_{p2} \text{ch}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_f \varepsilon_d}{\varepsilon_{p2}} \text{sh}(\gamma d) \right) \text{ch}(\gamma h_1) + \left(\frac{\varepsilon_f \varepsilon_{p2}}{\varepsilon_{p1}} \text{sh}(\gamma d) + \frac{\varepsilon_{p1} \varepsilon_d}{\varepsilon_{p2}} \text{ch}(\gamma d) \right) \text{sh}(\gamma h_1) \right] \text{sh}(\gamma h_2). \quad (17)$$

Найдем потенциал ϕ_1 в полупространстве ($j=1$) при $z \leq z_q$. Подставляя выражения (16) и (17) в (15) для $\hat{\phi}_1^-$, после весьма громоздких аналитических вычислений, получаем решение в аналитическом виде

$$\hat{\phi}_1^- = \frac{q}{2\gamma \varepsilon_f} + \frac{q}{2\gamma \varepsilon_f} e^{-2\gamma(z_b - z_q)} \mathfrak{X}(\gamma, h), \quad (18)$$

где $\mathfrak{X}(\gamma) = \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_{p1}}{\varepsilon_f + \varepsilon_{p1}} + \chi(\gamma),$

$$\chi(\gamma) = \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_{p1} e^{-2\gamma h}}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})^2} \times \frac{(a_1 + a_2 e^{-2\gamma h_2})}{(1 + b_1 e^{-2\gamma h_1} + b_2 e^{-2\gamma h_2} + b_3 e^{-2\gamma(h_1+h_2)})}, \quad (19)$$

$$a_1 = \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})}{(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_{p1})}, \quad a_2 = \frac{(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)},$$

$$b_1 = \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_{p1})(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})},$$

$$b_2 = \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)},$$

$$b_3 = \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_{p1})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}.$$

Аналогично, для $\hat{\phi}_5^+$, получим аналитическое выражение

$$\hat{\phi}_5^+ = \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)} \mathfrak{G}(\gamma), \quad (20)$$

$$\mathfrak{G}(\gamma) = \frac{8\varepsilon_f \varepsilon_{p1} \varepsilon_{p2}}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)} \times \frac{e^{-\gamma(h_1+h_2)}}{(1 + b_1 e^{-2\gamma h_1} + b_2 e^{-2\gamma h_2} + b_3 e^{-2\gamma(h_1+h_2)})}. \quad (21)$$

где

Из (12) получим

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{\gamma(z-z_q)} + \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))} \right) \mathfrak{R}(\gamma, h) \times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (22)$$

Далее, воспользуемся математическим тождеством

$$\frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{\xi^2 + \eta^2} |z-z_q|}}{2\varepsilon_f \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} e^{i(\xi(x-x_q) + \eta(y-y_q))} d\xi d\eta = \frac{q}{4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x-x_q)^2 + (y-y_q)^2 + (z-z_q)^2}}. \quad (23)$$

Тогда, (22) можно переписать в виде

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z_q)^2}} + \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_{p1}}{\varepsilon_f + \varepsilon_{p1}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z-(2z_b-z_q))^2}} + \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\gamma) e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))}}{2\gamma\varepsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (24)$$

Аналогично, получим потенциал φ_5 в полупространстве ($j = 5$) при $z \geq h_1 + h_2 + z_b$:

$$\varphi_5(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \mathfrak{G}(\gamma) e^{-\gamma(z-(z_q+h_1+h_2))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (25)$$

Найдем потенциал φ_4 при $(h_1 + z_b) \leq z \leq (h_1 + h_2 + z_b)$, то есть в слое $j = 4$ (в пленке). Для этого запишем граничные условия на плоскости $z = z_4 = h_1 + h_2 + z_b$:

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma h_2} & 1 \\ \varepsilon_{p2} \gamma e^{-\gamma h_2} & -\varepsilon_{p2} \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\phi}_4^+ \\ \hat{\phi}_4^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_d \gamma & -\varepsilon_d \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\phi}_5^+ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая это уравнение, учитывая (20), получаем

$$\hat{\phi}_4^+ = \frac{\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q - h_2)} \mathfrak{G}(\gamma),$$

$$\hat{\phi}_4^- = \frac{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b - z_q)} \mathfrak{G}(\gamma).$$

Тогда, полный потенциал поля внутри слоя $j = 4$ выражается формулой

$$\varphi_4(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{\phi}_4^+ e^{-\gamma(z-(z_b+h_1))} + \hat{\phi}_4^- e^{\gamma(z-(z_b+h_1+h_2))} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Подставляя сюда полученные выражения для $\hat{\phi}_4^+$ и $\hat{\phi}_4^-$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_4(x, y, z) = & \frac{\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(z-(z_q+h_1+h_2))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + \frac{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{\gamma(z-(2z_b-z_q+h_1+h_2))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (26)$$

Найдем теперь потенциал при $z_b \leq z \leq z_b + h_1$, то есть в слое $j = 3$. Граничные условия на плоскости $z = z_3 = z_b + h_1$ можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma h_1} & 1 \\ \varepsilon_{p1}\gamma e^{-\gamma h_1} & -\varepsilon_{p1}\gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\phi}_3^+ \\ \hat{\phi}_3^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h_2} \\ \varepsilon_{p2}\gamma & -\varepsilon_{p2}\gamma e^{-\gamma h_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\phi}_4^+ \\ \hat{\phi}_4^- \end{pmatrix}.$$

Тогда, после несложных вычислений получаем

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_3^+ = & \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b-z_q-h_1-h_2)} \vartheta(\gamma) + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b-z_q-h_1+h_2)} \vartheta(\gamma), \\ \hat{\phi}_3^- = & \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b-z_q-h_2)} \vartheta(\gamma) + \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b-z_q+h_2)} \vartheta(\gamma). \end{aligned}$$

Полный потенциал поля внутри слоя $j = 3$ выражается формулой

$$\Phi_3(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{\phi}_3^+ e^{-\gamma(z-z_b)} + \hat{\phi}_3^- e^{\gamma(z-(z_b+h_1))} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Подставляя сюда полученные выражения для $\hat{\phi}_3^+$ и $\hat{\phi}_3^-$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, y, z) = & \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(z-z_q-h_1-h_2)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{-\gamma(z-z_q-h_1+h_2)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{\gamma(z-(2z_b-z_q+h_1-h_2))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} \vartheta(\gamma) e^{\gamma(z-(2z_b-z_q+h_1+h_2))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (27)$$

Выражения для $\hat{\phi}_2^+$ и $\hat{\phi}_2^-$, можно также получить из $\hat{\phi}_1^-$ и граничного условия на плоскости $z = z_1 = z_q$, при учете наличия на границе заряда

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma(z_b-z_q)} \\ \varepsilon_f\gamma & -\varepsilon_f\gamma e^{-\gamma(z_b-z_q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_2^+ \\ \hat{\phi}_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_f\gamma & -\varepsilon_f\gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\phi}_1^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\hat{\phi}_2^+ = \frac{q}{2\gamma\epsilon_f}, \quad \hat{\phi}_2^- = \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b-z_q)} \mathfrak{R}(\gamma) = \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b-z_q)} + \chi(\gamma) \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-\gamma(z_b-z_q)}.$$

Полный потенциал поля внутри слоя $j = 2$ выражается формулой

$$\varphi_2(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{\phi}_2^+ e^{-\gamma(z-z_q)} + \hat{\phi}_2^- e^{\gamma(z-z_b)} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Подставляя сюда выражения для $\hat{\phi}_2^+$ и $\hat{\phi}_2^-$, получим,

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q e^{-\gamma(z-z_q)}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\gamma) \frac{q e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Откуда, используя тождество (23), получим

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) &= q/4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z_q)^2} + \frac{\epsilon_f - \epsilon_{p1}}{\epsilon_f + \epsilon_{p1}} q/4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z-(2z_b-z_q))^2} + \\ &+ \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\gamma) \frac{e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))}}{2\gamma\epsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (28)$$

Заметим, что правая часть (28) полностью совпадает с (24), поэтому $\varphi_1(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z)$.

Отметим, что из (19) сразу следует, что $\chi(\gamma)$ стремится к нулю при $h_1 \rightarrow \infty$, при этом интеграл в (24) и (28) исчезает, остается только первый член, который представляет потенциал индуцированных зарядов в методе зеркальных отражений для точечного заряда у границы двух диэлектрических полупространств с проницаемостями ϵ_f и ϵ_{p1} [16].

Обобщение метода отражений на случай точечного заряда, расположенного вблизи плоскостной структуры из двух пленок

Впервые метод отражений на случай точечного заряда, расположенного вблизи плос-

костистой среды применительно к частному случаю одной пленки был предложен в [17]. Дальнейшее обобщение метода для плоскостной структуры, состоящей из одной пленки было дано в [14]. Ниже рассмотрено развитие метода [14] на случай плоскостной структуры, состоящей из двух пленок.

Введем функцию $U(x, y, z) = q/4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, определяющую потенциал точечного заряда q , расположенного в начале координат в пространстве с проницаемостью ϵ_f .

Для дальнейших обобщений нетрудно получить формулы вида (24), (25), (26) и (27) для потенциала поля от точечного заряда q , расположенного в произвольной точке полупространства $\mathbf{r}_q = (x_q, y_q, z_q)$. Так (24) перейдет в

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z) = & \frac{q}{4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x-x_q)^2 + (y-y_q)^2 + (z-z_q)^2}} + \\ & + \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_{p1}}{\varepsilon_f + \varepsilon_{p1}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x-x_q)^2 + (y-y_q)^2 + (z-z_{ref})^2}} + \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\gamma) e^{\gamma(z-z_{ref})}}{2\gamma\varepsilon_f} e^{i(\xi(x-x_q) + \eta(y-y_q))} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (29)$$

где $z_{ref} = 2z_b - z_q$, а $\chi(\gamma)$ выражается формулой (19).

Представим выражение (19) для $\chi(\gamma)$ сходящимся рядом по степеням экспонент. Сначала запишем в виде

$$\begin{aligned} \chi(\gamma) = & \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_{p1} e^{-2\gamma h_1} (a_1 + a_2 e^{-2\gamma h_2})}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})^2 (1 + b_1 e^{-2\gamma h_1} + b_2 e^{-2\gamma h_2} + b_3 e^{-2\gamma(h_1+h_2)})} = \\ = & w_1 e^{-2\gamma h_1} \wp(b_1 e^{-2\gamma h_1}, b_2 e^{-2\gamma h_2}, b_3 e^{-2\gamma(h_1+h_2)}) + w_2 e^{-2\gamma(h_1+h_2)} \wp(b_1 e^{-2\gamma h_1}, b_2 e^{-2\gamma h_2}, b_3 e^{-2\gamma(h_1+h_2)}), \end{aligned} \quad (30)$$

где $w_1 = \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_{p1} a_1}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})^2}$, $w_2 = \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_{p1} a_2}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})^2}$, а $\wp(\alpha, \beta, \zeta) = (1 + \alpha + \beta + \zeta)^{-1}$.

Разложим функцию $\wp(\alpha, \beta, \zeta) = (1 + \alpha + \beta + \zeta)^{-1}$ трех переменных α, β, ζ по степеням этих переменных

$$\wp(\alpha, \beta, \zeta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k C_n^k C_k^p \alpha^{n-k} \beta^{k-p} \zeta^p = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k C_n^k C_k^p \alpha^{n-k} \beta^{k-p} \zeta^p, \quad (31)$$

где $C_n^k = n!/k!(n-k)!$ – число сочетаний из n по k .

Откуда, подставляя разложение (31) в (30), получим

$$\chi(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \varsigma_{n,k,p} e^{-2\gamma((1+p+n-k)h_1 + kh_2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \pi_{n,k,p} e^{-2\gamma((1+p+n-k)h_1 + (1+k)h_2)},$$

где введены обозначения

$$\varsigma_{n,k,p} = (-1)^n w_1 b_1^{n-k} b_2^{k-p} b_3^p C_n^k C_k^p \text{ и } \pi_{n,k,p} = (-1)^n w_2 b_1^{n-k} b_2^{k-p} b_3^p C_n^k C_k^p.$$

Тогда, выражение (29) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) = & U(x-x_q, y-y_q, z-z_q) + \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_{p1}}{\varepsilon_f + \varepsilon_{p1}} U(x-x_q, y-y_q, z-z_{ref}) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \frac{q\varsigma_{n,k,p}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma(z-z_{ref}-2((1+p+n-k)h_1 + kh_2))} e^{i(\xi(x-x_q) + \eta(y-y_q))}}{2\varepsilon_f \gamma} d\xi d\eta + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \frac{q\pi_{n,k,p}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma(z-z_{ref}-2((1+p+n-k)h_1 + (1+k)h_2))} e^{i(\xi(x-x_q) + \eta(y-y_q))}}{2\varepsilon_f \gamma} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Учитывая математическое тождество (23) и учитывая, что $z_{ref} = 2z_b - z_q$, получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) = & U(x - x_q, y - y_q, z - z_q) + \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_{p1}}{\varepsilon_f + \varepsilon_{p1}} U(x - x_q, y - y_q, z - (2z_b - z_q)) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \zeta_{n,k,p} U(x - x_q, y - y_q, z - (2z_b - z_q) - 2((1+p+n-k)h_1 + kh_2)) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \pi_{n,k,p} U(x - x_q, y - y_q, z - (2z_b - z_q) - 2((1+p+n-k)h_1 + (1+k)h_2)). \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, *обобщенный метод отражений* может быть сформулирован следующим образом:

если точечный заряд q расположен в полупространстве рядом с плоскострой структурой из двух пленок, с толщинами h_1 и h_2 , расположенной на границе другого полупространства, то потенциал в полупространстве, в котором расположен заряд, есть сумма потенциалов, которые можно разбить на четыре группы:

1) потенциал исходного точечного заряда q (источника поля), расположенного в точке z_q ,

2) потенциал виртуального точечного заряда величины $q(\varepsilon_f - \varepsilon_{p1})/(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})$, расположенного в зеркальной точке z_{ref} , зеркально относительно ближайшей границы первой пленки $z = z_b$,

3) потенциал бесконечной суммы по индексам n , k и p потенциалов виртуальных точечных зарядов величины $q\zeta_{n,k,p}$, расположенных в точках $z = z_{ref} + 2((1+p+n-k)h_1 + kh_2)$, где $n = 0, 2, 3, \dots, \infty$, $k = 0, \dots, n$, $p = 0, \dots, k$, а $\zeta_{n,k,p}$ выражаются через диэлектрические проницаемости сред и равны $\zeta_{n,k,p} = (-1)^n w_1 b_1^{n-k} b_2^{k-p} b_3^p C_n^k C_k^p$,

4) потенциал бесконечной суммы по индексам n , k и p потенциалов виртуальных точечных зарядов, расположенных в точках $z = z_{ref} + 2((1+p+n-k)h_1 + (1+k)h_2)$ и вели-

чиной $q\pi_{n,k,p}$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$, $k = 0, \dots, n$, $p = 0, \dots, k$, а $\pi_{n,k,p}$ выражаются через диэлектрические проницаемости сред $\pi_{n,k,p} = (-1)^n w_2 b_1^{n-k} b_2^{k-p} b_3^p C_n^k C_k^p = (w_2/w_1) \zeta_{n,k,p}$.

Таким образом, в выражениях для потенциала $\varphi_1(x, y, z)$ можно избавиться от двойного интегрирования и заменить его суммированием достаточно быстро сходящегося ряда по виртуальным точечным зарядам.

Аналогично, представим $\vartheta(\gamma)$ (см. (21)) в виде

$$\vartheta(\gamma) = g e^{-\gamma(h_1+h_2)} \wp(b_1 e^{-2\gamma h_1}, b_2 e^{-2\gamma h_2}, b_3 e^{-2\gamma(h_1+h_2)}),$$

$$\text{где } g = \frac{8\varepsilon_f \varepsilon_{p1} \varepsilon_{p2}}{(\varepsilon_f + \varepsilon_{p1})(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}.$$

Тогда, используя разложение (31), можно представить функцию $\vartheta(\gamma)$ в виде ряда

$$\vartheta(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k v_{n,k,p} e^{-\gamma((2n-2k+2p+1)h_1 + (2k+1)h_2)}, \quad (33)$$

где введено обозначение $v_{n,k,p} = g(-1)^n b_1^{n-k} b_2^{k-p} b_3^p C_n^k C_k^p$.

Тогда, по аналогии, можно найти потенциалы в пленках и в свободном полупространстве. Так, записывая (27) для заряда в произвольной точке $\mathbf{r}_q = (x_q, y_q, z_q)$, в первой пленке, подставляя (33), получим

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) = & \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qV_{n,k,p}}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z-z_q+(2n-2k+2p)h_1+(2k)h_2)} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))} d\xi d\eta + \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qV_{n,k,p}}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z-z_q+(2n-2k+2p)h_1+(2k+2)h_2)} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))} d\xi d\eta + \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qV_{n,k,p}}{2\gamma\varepsilon_f} e^{\gamma[z-(2z_b-z_q)-((2n-2k+2p+2)h_1+2kh_2)]} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))} d\xi d\eta + \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qV_{n,k,p}}{2\gamma\varepsilon_f} e^{\gamma[z-(2z_b-z_q)-(2n-2k+2p+2)h_1-(2k+2)h_2]} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Учитывая тождество (23), получим

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) = & \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k v_{n,k,p} U(x-x_q, y-y_q, z-(z_q-(n-k+p)2h_1-2kh_2)) + \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k v_{n,k,p} U(x-x_q, y-y_q, z-(z_q-(n-k+p)2h_1-(k+1)2h_2)) + \quad (34) \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k v_{n,k,p} U(x-x_q, y-y_q, z-(2z_b-z_q+(n-k+p+1)2h_1+2kh_2)) + \\ & + \frac{(\varepsilon_{p1} + \varepsilon_{p2})(\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d)}{4\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k v_{n,k,p} U(x-x_q, y-y_q, z-(2z_b-z_q+(n-k+p+1)2h_1+(k+1)2h_2)). \end{aligned}$$

Аналогично, из (26) для $\varphi_4(x, y, z)$ во второй пленке, подставляя (33), получим

$$\begin{aligned} \varphi_4(x, y, z) = & \frac{\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qV_{n,k,p}}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z-z_q+(n-k+p)2h_1+2kh_2)} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))} d\xi d\eta + \\ & + \frac{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qV_{n,k,p}}{2\gamma\varepsilon_f} e^{\gamma[z-(2z_b-z_q)-(n-k+p+1)2h_1-(k+1)2h_2]} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Откуда, учитывая тождество (23), получим

$$\begin{aligned} \varphi_4(x, y, z) = & \frac{\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k v_{n,k,p} U(x-x_q, y-y_q, z-(z_q-(n-k+p)2h_1-2kh_2)) + \\ & + \frac{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k v_{n,k,p} U(x-x_q, y-y_q, z-((2z_b-z_q)+(n-k+p+1)2h_1+(k+1)2h_2)). \quad (35) \end{aligned}$$

Наконец, для заряда в произвольной точке $\mathbf{r}_q = (x_q, y_q, z_q)$, из (25) для $\varphi_5(x, y, z)$, после подстановки разложения (33), найдем

$$\varphi_5(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qV_{n,k,p}}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z-z_q+(n-k+p)2h_1+2kh_2)} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))} d\xi d\eta.$$

Учитывая тождество (23), получим

$$\varphi_5(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k v_{n,k,p} U\left(x - x_q, y - y_q, z - (z_q - (n - k + p)2h_1 - 2kh_2)\right). \quad (36)$$

Обобщение метода отражений на случай системы зарядов

Обобщим теперь полученный метод зеркальных отражений на потенциал полного поля $\Phi_{tot}(x, y, z)$ в области $z < z_b$ перед плос-

костистой структурой, состоящей из двух пленок (см. рис. 3), произвольной компактной системы N_q зарядов-источников q_k , расположенных в точках с радиус-векторами $\mathbf{r}_{q,k} = (x_{q,k}; y_{q,k}; z_{q,k})$, где $k = 1, 2, \dots, N_q$.

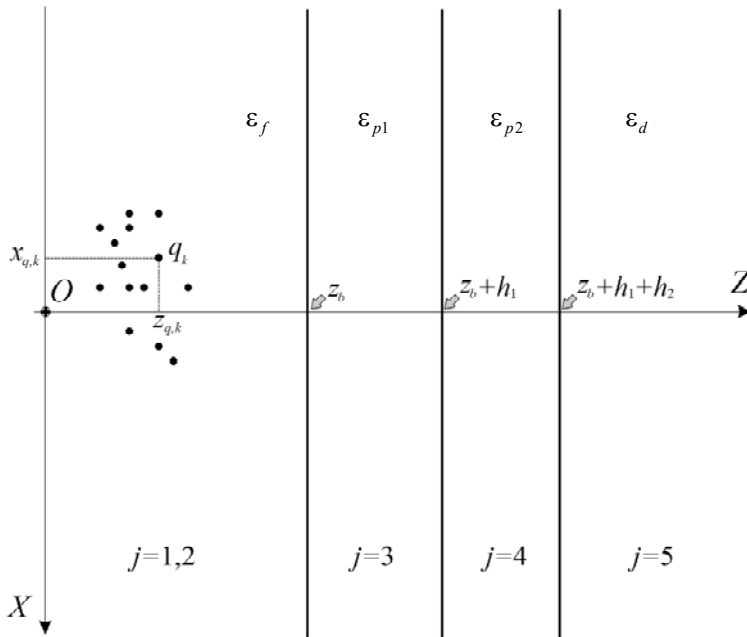


Рис. 3. Система точечных зарядов q_k у плоскостистой структуры из двух пленок, расположенной на границе полупространства

Если бы не было плоскостистой структуры, то потенциал этой системы зарядов-источников представлялся бы формулой

$$\Phi_s(x, y, z) = \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + (z - z_{q,k})^2}.$$

Заметим, что для произвольной константы Ω имеют место следующие очевидные тождества

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + (z - z_{q,k} + \Omega)^2} = \\ = \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + ((z + \Omega) - z_{q,k})^2} = \Phi_s(x, y, z + \Omega), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + (z - (\Omega - z_{q,k}))^2} = \\ = \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \sqrt{(x - x_{q,k})^2 + (y - y_{q,k})^2 + ((\Omega - z) - z_{q,k})^2} = \Phi_s(x, y, \Omega - z). \end{aligned} \quad (38)$$

Суммируя выражения (32) по всем N_q зарядам системы q_k , получим *обобщение метода отражений в электростатике для произвольных распределений зарядов* для полного потенциала в полупространстве перед плоскостной структурой, состоящей из двух пленок, в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{tot}(x, y, z) = & \Phi_s(x, y, z) + \frac{(\epsilon_f - \epsilon_{p1})}{(\epsilon_{p1} + \epsilon_f)} \Phi_s(x, y, 2z_b - z) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \varsigma_{n,k,p} \Phi_s(x, y, 2z_b + 2((1+p+n-k)h_1 + kh_2) - z) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \pi_{n,k,p} \Phi_s(x, y, 2z_b + 2((1+p+n-k)h_1 + (1+k)h_2) - z). \end{aligned} \quad (39)$$

Аналогично, из (34) получим выражение для потенциала Φ_3 системы зарядов в первой пленке при $z_b \leq z \leq z_b + h_1$

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, y, z) = & \frac{(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} + \epsilon_d)}{4\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \upsilon_{n,k,p} \Phi_s(x, y, z + (n-k+p)2h_1 + 2kh_2) + \\ & + \frac{(\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} - \epsilon_d)}{4\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \upsilon_{n,k,p} \Phi_s(x, y, z + (n-k+p)2h_1 + 2(k+1)h_2) + \\ & + \frac{(\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} + \epsilon_d)}{4\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \upsilon_{n,k,p} \Phi_s(x, y, (2z_b + (n-k+p+1)2h_1 + 2kh_2) - z) + \\ & + \frac{(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} - \epsilon_d)}{4\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \upsilon_{n,k,p} \Phi_s(x, y, (2z_b + (n-k+p+1)2h_1 + (k+1)2h_2) - z). \end{aligned} \quad (40)$$

А из (35), потенциал Φ_4 полного поля системы зарядов во второй пленке, при $z_b + h_1 \leq z \leq z_b + h_1 + h_2$ ($j = 4$), получится в виде

$$\begin{aligned} \Phi_4(x, y, z) = & \frac{\epsilon_{p2} + \epsilon_d}{2\epsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \upsilon_{n,k,p} \Phi_s(x, y, z + (n-k+p)2h_1 + 2kh_2) + \\ & + \frac{\epsilon_{p2} - \epsilon_d}{2\epsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \upsilon_{n,k,p} \Phi_s(x, y, (2z_b + (n-k+p+1)2h_1 + (k+1)2h_2) - z). \end{aligned} \quad (41)$$

Наконец, в полупространстве при $z \geq z_b + h_1 + h_2$ ($j = 5$), с учетом (36), потенциал Φ_5 системы зарядов можно записать в виде

$$\Phi_5(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \upsilon_{n,k,p} \Phi_s(x, y, z + (n-k+p)2h_1 + 2kh_2). \quad (42)$$

Потенциал заряженного металлического тела, расположенного вблизи от границы плоскостной структуры из двух пленок

Рассмотрим металлическое тело, для определенности пусть это будет сфера с радиусом R . Поверхность сферы представим формулой $x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = R^2$, где R – радиус

сферы, а координаты центра $x_c = 0$, $y_c = 0$ и $z_c = z_0$ (см. рис. 4). Пусть вблизи сферы находится две пленки с толщинами h_1 и h_2 , причем их границы $z = z_b$, $z = z_b + h_1$ и $z = z_b + h_1 + h_2$. Диэлектрические проницаемости внешней однородной среды, первой и второй пленок, и полубесконечной среды за

пленкой обозначим ε_f , ε_{p1} , ε_{p2} и ε_d , соответственно.

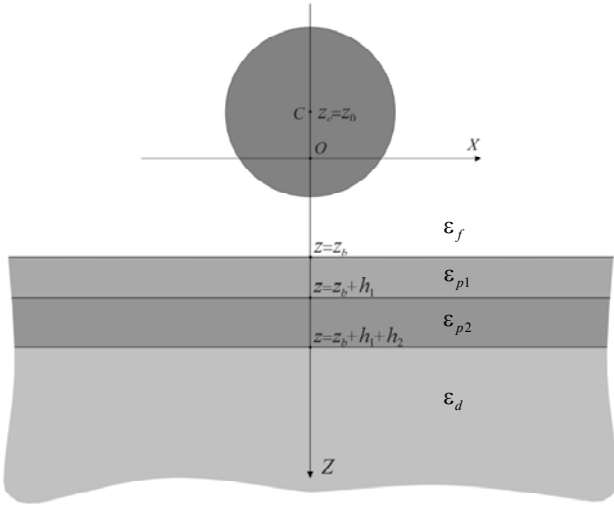


Рис. 4. Металлическая сфера у плоскоструистой структуры из двух пленок. Геометрия задачи

Рассмотрим распределение электрического потенциала, которое установится в пространстве вокруг металлического тела. Как известно, потенциал электростатического поля Φ удовлетворяет в однородном веществе, без сторонних зарядов, уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$. На границе металлического тела (в рассматриваемом конкретном случае – сферы) потенциал будет постоянный (обозначим его U_s). Кроме того, на плоских границах пленок непрерывны тангенциальные составляющие электрического поля и нормальные составляющие электрической индукции. Тогда граничные условия можно записать следующим образом

$$\text{на поверхности тела: } \Phi = U_s,$$

$$\text{на границе пленки } z = z_b: \varepsilon_{p1} E_{3,n} = \varepsilon_f E_{f,n}$$

$$\text{и } E_{3,\tau} = E_{f,\tau},$$

$$\text{на границе пленки } z = z_b + h_1: \varepsilon_{p2} E_{4,n} = \varepsilon_{p1} E_{3,n} \text{ и } E_{4,\tau} = E_{3,\tau},$$

$$\text{на границе пленки } z = z_b + h_1 + h_2: \varepsilon_d E_{5,n} = \varepsilon_{p2} E_{4,n} \text{ и } E_{5,\tau} = E_{4,\tau}.$$

Рассматриваемая задача имеет осевую симметрию относительно оси Z . Поэтому и решение уравнения Лапласа будет иметь такую же симметрию. Пусть потенциал зарядов, находящихся на эквипотенциальной металлической сфере в пространстве с проницаемостью ε_f описывается функцией $\Phi_s(x, y, z)$.

Тогда, полный потенциал $\Phi_{tot}(x, y, z)$ в области, заполненной диэлектриком с ε_f , можно выразить через $\Phi_s(x, y, z)$ по формуле (39), а полный потенциал в пленках и в диэлектрическом пространстве за ней – по формулам (40)–(42). При этом граничные условия на границах пленок, а также условие стремления решения к нулю на бесконечности будут выполнены автоматически.

Таким образом, задача определения потенциала во всем пространстве состоит в том, чтобы найти такой потенциал $\Phi_s(x, y, z)$, чтобы полный потенциал $\Phi_{tot}(x, y, z)$ удовлетворял на поверхности тела граничному условию $\Phi_{tot} = U_s$.

Это можно сделать, разложив потенциал $\Phi_s(x, y, z)$ по подходящим гармоническим функциям, а коэффициенты разложения определить из условия $\Phi_{tot} = U_s$ на эквипотенциальной границе металла.

Имея в виду общность изложения, рассматривая сферическое тело, перейдем к безразмерным координатам: $\tilde{x} = x/R$, $\tilde{y} = y/R$, $\tilde{z} = z/R$, где R – радиус сферы. Уравнение Лапласа в безразмерных координатах не изменится. Кроме того, нормируем потенциал на его значение U_s на поверхности сферы, то есть, перейдем от размерного к безразмерному потенциалу $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \Phi/U_s$ в безразмерных координатах. Тогда, граничное условие $\Phi_{tot} = U_s$ на сфере запишется в виде $\tilde{\Phi}_{tot} = 1$.

В рассматриваемом осесимметричном случае, для выполнения граничного условия на поверхности сферы, достаточно удовлетворить его на линии пересечения ее поверхности с любой плоскостью симметрии, проходящей через ось Z . В качестве такой плоскости мы выберем плоскость (\tilde{x}, \tilde{z}) при $\tilde{y} = 0$. Более конкретно, достаточно удовлетворить условию $\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) = 1$ только на границе пересечения полуплоскости $\tilde{y} = 0$ при $\tilde{x} \geq 0$ и поверхности сферы. В безразмерных координатах это будет кривая $\tilde{x}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2 = 1$, при $\tilde{y} = 0$ и $\tilde{x} \geq 0$.

Будем искать решение, предполагая, что потенциал снаружи сферы $\tilde{\Phi}_s$ представляется

в виде следующего разложения по гармоническим функциям

$$\tilde{\Phi}_s = \sum_{j=1}^N A_j P_{j-1}(\cos \theta) / \tilde{r}^j, \quad (43)$$

где A_j – постоянные коэффициенты разложения, $P_j(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра степеней j ,

$$\text{где } \tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = P_{j-1} \left(\frac{(\tilde{z} - \tilde{z}_0) / \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2}}{\left(\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2} \right)^j} \right).$$

Отметим, что выбор функциональных зависимостей (43) из общего решения уравнения Лапласа обусловлен тем, что снаружи сферы потенциал поля должен стремиться к нулю при удалении от ее поверхности, а на поверх-

ности сферы полиномы Лежандра образуют полную систему функций. Тогда потенциал в среде с ϵ_f (между сферой и первой пленкой) представляется в виде

$$\tilde{\Phi}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad (44)$$

ности сферы полиномы Лежандра образуют полную систему функций.

Тогда потенциал в среде с ϵ_f (между сферой и первой пленкой) представляется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = & \sum_{j=1}^N A_j \left(\tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \frac{(\epsilon_f - \epsilon_{p1})}{(\epsilon_{p1} + \epsilon_f)} \tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}) + \right. \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \varsigma_{n,k,p} \tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2\tilde{z}_b + 2((1+p+n-k)\tilde{h}_1 + k\tilde{h}_2) - \tilde{z}) + \\ & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \pi_{n,k,p} \tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2\tilde{z}_b + 2((1+p+n-k)\tilde{h}_1 + (1+k)\tilde{h}_2) - \tilde{z}) \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Граничное условие на сфере $\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 1$ в данной работе удовлетворялось приближенно, методом коллокаций [18]. Указанные уравнения записывались в равномерно распределенных N точках полукруга $\tilde{x}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2 = 1$ при $\tilde{y} = 0$ и $\tilde{x} > 0$ на поверхности сферы. Решая полученные N линейных

алгебраических уравнений с N неизвестными, находились A_j и, по формулам (45), распределения полного потенциала в области между сферой и передней поверхностью первой пленки.

С учетом (44) распределение потенциала в пленках и в полупространстве за ними, с учетом (40), (41) и (42), определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_3(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = & \sum_{j=1}^N A_j \left(\frac{(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} + \epsilon_d)}{4\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \upsilon_{n,k,p} \tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} + (n-k+p)2\tilde{h}_1 + 2k\tilde{h}_2) + \right. \\ & + \frac{(\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} - \epsilon_d)}{4\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \upsilon_{n,k,p} \tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} + (n-k+p)2\tilde{h}_1 + 2(k+1)\tilde{h}_2) + \\ & + \frac{(\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} + \epsilon_d)}{4\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \upsilon_{n,k,p} \tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, (2\tilde{z}_b + (n-k+p+1)2\tilde{h}_1 + 2k\tilde{h}_2) - \tilde{z}) + \\ & \left. + \frac{(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} - \epsilon_d)}{4\epsilon_{p1}\epsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \upsilon_{n,k,p} \tilde{\mathfrak{F}}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, (2\tilde{z}_b + (n-k+p+1)2\tilde{h}_1 + (k+1)2\tilde{h}_2) - \tilde{z}) \right), \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_4(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \left(\frac{\varepsilon_{p2} + \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k v_{n,k,p} \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} + (n-k+p)2\tilde{h}_1 + 2k\tilde{h}_2) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_{p2} - \varepsilon_d}{2\varepsilon_{p2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k v_{n,k,p} \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, (2\tilde{z}_b + (n-k+p+1)2\tilde{h}_1 + (k+1)2\tilde{h}_2) - \tilde{z}) \right), \end{aligned} \quad (47)$$

$$\tilde{\Phi}_5(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k v_{n,k,p} \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} + (n-k+p)2\tilde{h}_1 + 2k\tilde{h}_2) \right). \quad (48)$$

Формулы (45)–(48) решают задачу нахождения, по известным значениям A_j , нормированного потенциала в нормированных координатах снаружи сферы, в слоистой структуре и в полупространстве за ней.

Важное свойство полученных решений – они зависят от отношений диэлектрических проницаемостей. То есть, если увеличить все диэлектрические проницаемости в k раз, то распределение нормированного потенциала не изменится.

Потенциал вокруг заряженной металлической сферы, расположенной рядом с плоскостойкой структурой из двух пленок

В качестве примера применения изложенной выше теории, были проведены численные расчеты распределения нормированного потенциала металлической заряженной сферы, находящейся вблизи плоскостойкой структуры состоящей из двух пленок. Имея в виду использование полученного решения в перспективе для задач с несколькими сферами, или телами сложной формы, система координат фиксировалась относительно плоскостойкой структуры (см. рис. 4), а положение сферы определялось относительно этой системы. Конкретно, сфера с центром в точке $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) = (0, 0, -0.5)$ находилась в вакууме с $\varepsilon_f = 1$, рядом с пленками с толщинами $\tilde{h}_1 = 0,5$ и $\tilde{h}_2 = 0,5$ (в нормированных на радиус кривизны сферы единицах). Диэлектрические проницаемости пленок были выбраны $\varepsilon_{p1} = 4$ и $\varepsilon_{p2} = 2$. Полупространство за пленкой имело диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_d = 5$. Границы пленки определялись уравнениями $\tilde{z} = \tilde{z}_b = 1$, $\tilde{z} = \tilde{z}_b + \tilde{h}_1 = 1,5$ и

$\tilde{z} = \tilde{z}_b + \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 = 2$ (см. рис. 4). Кратчайшее расстояние от сферы до первой пленки было равно $\Delta\tilde{z} = 0,5$.

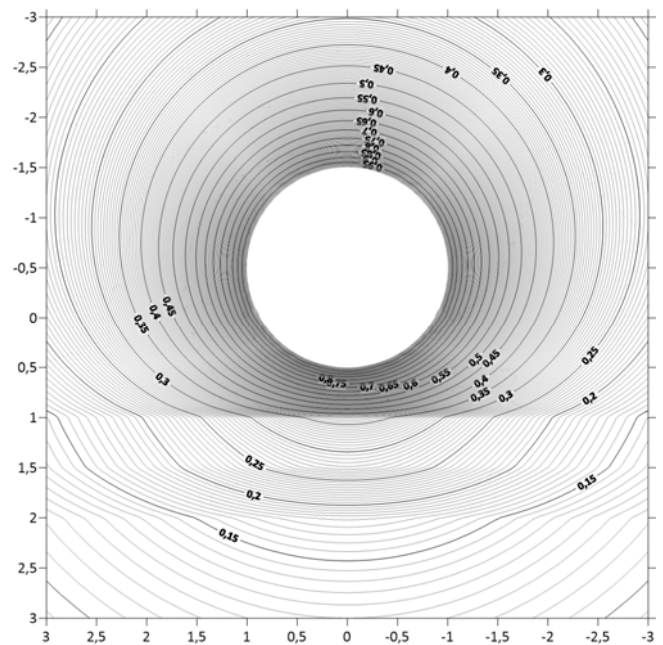


Рис. 5. Распределение в нормированных координатах (\tilde{x}, \tilde{z}) нормированного потенциала вокруг металлической заряженной сферы. Диэлектрические проницаемости: $\varepsilon_f = 1$, $\varepsilon_{p1} = 4$, $\varepsilon_{p2} = 2$, $\varepsilon_d = 5$. Толщина пленок: $\tilde{h}_1 = 0,5$, $\tilde{h}_2 = 0,5$. Границы пленок $\tilde{z} = 1$, $\tilde{z} = 1,5$ и $\tilde{z} = 2$. Между сферой и пленкой расстояние $\Delta\tilde{z} = 0,5$

На рис. 5 показано распределение нормированного потенциала в плоскости (\tilde{x}, \tilde{z}) при указанных параметрах. Видна естественная экранировка электрического поля в диэлектрике. Чем больше диэлектрическая проницаемость, тем сильнее экранировка. Важное свойство полученного распределения – оно одинаково для всех подобных геометрий и одинаковых соотношений диэлектрических проницаемостей.

Аналогичные задачи можно решить и для металлических заряженных тел более сложной формы. Отлично зарекомендовал себя метод представления $\tilde{\Phi}_s$ для тел сложной формы, который подробно изложен в работе [15].

Наконец, остановимся на сходимости разложения (31) к функции $\wp(\alpha, \beta, \zeta) = (1 + \alpha + \beta + \zeta)^{-1}$ при $n \rightarrow \infty$. Разложение заведомо сходится, когда $|\alpha + \beta + \zeta| < 1$. В нашем случае это приводит к неравенству

$$\left| b_1 e^{-2\gamma h_1} + b_2 e^{-2\gamma h_2} + b_3 e^{-2\gamma(h_1+h_2)} \right| < 1$$

или, подставляя выражения для b_1, b_2, b_3 , получим

$$\left| \frac{(\epsilon_f - \epsilon_{p1})(\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2})}{(\epsilon_f + \epsilon_{p1})(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})} e^{-2\gamma h_1} + \frac{(\epsilon_{p1} - \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} - \epsilon_d)}{(\epsilon_{p1} + \epsilon_{p2})(\epsilon_{p2} + \epsilon_d)} e^{-2\gamma h_2} + \frac{(\epsilon_f - \epsilon_{p1})(\epsilon_{p2} - \epsilon_d)}{(\epsilon_f + \epsilon_{p1})(\epsilon_{p2} + \epsilon_d)} e^{-2\gamma(h_1+h_2)} \right| < 1. \quad (49)$$

Численное исследование это неравенства показывает, что, по крайней мере, если диэлектрические проницаемости находятся в интервалах $1 \leq \epsilon_f \leq 50, 1 \leq \epsilon_{p1} \leq 50, 1 \leq \epsilon_{p2} \leq 50$ и $1 \leq \epsilon_d \leq 50$, неравенство (49) выполняется и ряд (31) сходится при всех γ . Если окажется, например в квазистатике, что существует интегрируемая особенность $\chi(\gamma)$, то для решения задачи можно применить метод с двойным интегрированием [15]. А если особенность будет неинтегрируемая, то возможно, что квазистатика не подходит для описания таких резонансных явлений и требуется электродинамическое рассмотрение задачи (возможно, что при условии возбуждения поверхностной волны в плоскостной структуре представление индуцированных зарядов рядом точечных зарядов не является адекватным). Этот вопрос требует дополнительного исследования.

Применение полученных результатов к задачам теплопроводности плоскостных сред

Как известно, существует аналогия между задачами электростатики и стационарными задачами теплопроводности [19, глава 12]. Аналогичны не только соответствующие уравнения, но и граничные условия [20, 21, 13]. Если в задачах, рассмотренных в предыдущих разделах, заменить одновременно: 1) потенциал ϕ – на температуру $(T - T_0)$, где T_0 – температура на бесконечности; 2) диэлектрическую проницаемость ϵ – на коэффициент теплопроводности K ; 3) вектор электрической индукции $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = -\epsilon \nabla \phi$ – на плотность потока тепла $\mathbf{h} = -K \nabla T$; 4) точечный заряд q – на мощность тепловыделения точечного источника Q_h , то, можно решить аналогичные задачи тем же методом.

Например, чтобы решить задачу нахождения распределения температуры вокруг тела, нагретого до постоянной температуры T_m , можно сначала решить соответствующую электростатическую задачу распределения потенциала в окрестности тела с постоянным потенциалом поверхности. Нормированное решение электростатической задачи будет также решением аналогичной нормированной задачи теплопроводности в нормированных координатах (при указанной замене величин и обозначений). Распределение температуры (точнее превышения температуры над внешней температурой T_0 , выраженное в единицах $(T_m - T_0)$) в задаче о нагретой сфере будет идентично распределению рис. 5.

Нормированные температурные распределения так же, как и в случае распределений нормированных электростатических потенциалов, обладают следующим свойством. Распределения зависят от отношений коэффициентов теплопроводности областей. То есть, если увеличить все коэффициенты в k раз, то нормированное распределение температуры не изменится в нормированных координатах. Таким образом, на рис. 5 показаны нормированные температурные распределения при значениях коэффициентов теплопроводности $K_f = k, K_{p1} = 4k, K_{p2} = 2k, K_d = 5k$, где k – произвольное число.

Особо отметим, что аналогия между электростатической и теплопроводной задачами не означает, что распределение электрического потенциала в вакууме аналогично распределению температуры в вакууме. В рассмотренном случае аналог вакуума – среда с некоторым конечным коэффициентом теплопроводности K_f , а коэффициенты K_{p1} , K_{p2} и K_d соотносятся с K_f так же, как диэлектрические проницаемости аналогичной электростатической задачи.

Заключение

В статье предложена новая формулировка обобщенного метода зеркальных отражений для двух пленок, расположенных на полупространстве, которая исключает двойное интегрирование, заменяет его суммированием.

Продемонстрировано применение метода для нахождения электростатических полей от сферы, расположенного рядом с плоскостистой структурой, состоящей из двух пленок. Показана применимость предложенного теоретического метода к аналогичным задачам стационарной теплопроводности.

*Автор благодарит за поддержку работы
Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации (государственное задание
№ 075-00270-24-00).*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. – М.: Изд-во ин. лит., 1958.

2. *Sommerfeld A.* / Ann. Phys. (Leipzig). 1926. Vol. 81. P. 1135.
3. *Wait J. R.* / IEEE Antenn. Propag. Mag. 1998. Vol. 40. № 5. P. 7.
4. *Chew W. C.* Waves and Fields in Inhomogeneous Media. – New York: IEEE Press, 1995.
5. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. Изд. 2, доп. и испр. – М.: Наука, 1973.
6. *Pollack H. N.* / Journal of Geophysical Research. 1965. Vol. 70. № 22. P. 5645.
7. *Negi J. G., Singh R. N.* / Pure and Applied Geophysics. 1969. Vol. 73. № 1. P. 143.
8. *Negi J. G., Singh R. N.* / Pure and Applied Geophysics. 1968. Vol. 69. № 1. P. 110.
9. *Matysiak S. J., Perkowski D. M.* / Heat and Mass Transfer. 2014. Vol. 50. № 1. P. 75.
10. *Петрин А. Б.* / ЖЭТФ. 2021. Т. 159. № 1. С. 35.
11. *Кинг Р., Смит Г.* Антенны в материальных средах: В 2-х книгах / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984.
12. *King R. W. P.* / IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1988. Vol. 36. № 6. P. 1080.
13. *Петрин А. Б.* / Оптика и спектроскопия. 2022. Т. 130. № 9. С. 1436.
14. *Петрин А. Б.* / Журнал технической физики. 2023. Т. 93. № 3. С. 318.
15. *Петрин А. Б.* / Успехи прикладной физики. 2023. Т. 11. № 1. С. 3.
16. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики: учеб. пособие для вузов. В 5 т. Т. III. Электричество. Изд. 4, стереот. – М.: Физматлит; Изд-во МФТИ, 2004.
17. *Петрин А. Б.* / Успехи прикладной физики. 2016. Т. 4. № 4. С. 326.
18. Численные методы теории дифракции (Математика. Новое в зарубежной науке. Вып. 29): Сб. статей. / пер. с англ. – М.: Мир, 1982.
19. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. Электричество и магнетизм. – М.: Мир, 1965.
20. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
21. *Карташов Э. М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001.

Reflection method in problems of electrostatics and thermal conductivity of plane-layered media consisting of two films

A. B. Petrin

Joint Institute for High Temperatures of Russian Academy of Sciences
Bd. 2, 13 Izhorskaya st., Moscow, 125412, Russia
E-mail: petrin@ihed.ras.ru, a_petrin@mail.ru

Received 13.11.2023; revised 30.11.2023; accepted 12.12.2023

The electrostatic reflection method is formulated and proven for a point charge located next to a plane-layered medium consisting of two films on a dielectric half-space. The method is generalized to the case of an arbitrary system of charges and is applied to the solution of mathematically similar problems of electrostatics and stationary thermal conductivity of plane-layered media. In particular, as an example of the application of the method, the problem of finding the distributions of electrostatic potential around a conducting sphere located near a plane-layered structure consisting of two dielectric films on a dielectric half-space is considered. Solutions to similar problems of finding the temperature distribution of uniformly heated bodies located near a heat-conducting flat-layer structure of two heat-conducting films on a heat-conducting half-space are discussed.

Keywords: plane-layered medium, reflection method, electrostatics, thermal conductivity.

REFERENCES

1. Sommerfeld A., *Electrodynamics*, Moscow, Publishing House of foreign literature, 1958 [in Russian].
2. Sommerfeld A., *Ann. Phys. (Leipzig)* **81**, 1135 (1926).
3. Wait J. R., *IEEE Antenn. Propag. Mag.* **40** (5), 7 (1998).
4. Chew W. C., *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*, New York, IEEE Press, 1995.
5. Brekhovskikh L. M., *Waves in layered media* – 2nd ed., add. and corr. Moscow, Nauka, 1973 [in Russian].
6. Pollack H. N., *Journal of Geophysical Research*, **70** (22), 5645 (1965).
7. Negi J. G. and Singh R. N., *Pure and Applied Geophysics* **73** (1), 143 (1969).
8. Negi J. G. and Singh R. N., *Pure and Applied Geophysics* **69** (1), 110 (1968).
9. Matysiak S. J. and Perkowski D. M., *Heat and Mass Transfer* **50** (1), 75 (2014).
10. Petrin A. B., *JETP* **132**(1), 27 (2021).
11. King R. W. P. and Smith G. S., *Antennas in Matters*, Cambridge : MA : M.I.T. Press, 1981.
12. King R. W. P., *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **36**(6), 1080 (1988).
13. Petrin A. B., *Optics and Spectroscopy* **130** (9), 1158 (2022).
14. Petrin A. B., *Technical Physics* **68** (3), 295 (2023).
15. Petrin A. B., *Usp. Prikl. Fiz. (Advances in Applied Physics)* **11** (1), 3 (2023) [in Russian].
16. Sivukhin D. V. *General course in physics. Vol. III. Electricity*, Moscow, Fizmatlit, MIPT, 2004 [in Russian].
17. Petrin A. B., *Usp. Prikl. Fiz. (Advances in Applied Physics)* **4** (4), 326 (2016) [in Russian].
18. Miller E., Poggio A. et al., *Numerical methods of the theory of diffraction: Collection of articles. Mathematics. Issue 29: Translation from English*, Moscow, Mir, 1982 [in Russian].
19. Feynman R., Leighton R. and Sands M., *Feynman Lectures on Physics, Volume 2: Mainly Electromagnetism and Matter*, Massachusetts, Addison-Wesley, 1964.
20. Landau L. D. and Lifshits E. M., *Theoretical physics. Vol. VI. Hydrodynamics*, Moscow, Nauka, 1986 [in Russian].
21. Kartashov E. M., *Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids*, Moscow, Higher school, 2001 [in Russian].