ОБЩАЯ ФИЗИКА
GENERAL PHYSICS

УДК 538.945
EDN: AIQXFO
PACS: 74.25.Ha

Интегро-дифференциальное уравнение и модифицированное уравнение Лондонов для расчета проникновения нестационарного магнитного поля в сверхпроводник в мейснеровском состоянии

К. А. Осипов, А. Н. Варюхин, А. В. Гелиев

Впервые получено интегро-дифференциальное уравнение для расчета проникновения магнитного поля в сверхпроводник в мейснеровском состоянии для нестационарного случая с учетом возбуждения как сверхпроводящих, так и нормальных электронов согласно двухжидкостной модели сверхпроводников. При синусоидальном изменении магнитного поля данное интегро-дифференциальное уравнение сводится к модифицированному уравнению Лондонов, в котором получено комплексное выражение для глубины проникновения переменного магнитного поля в зависимости от частоты изменения магнитного поля и долей концентраций нормальных и сверхпроводящих электронов. С помощью модифицированного уравнения Лондонов рассмотрено проникновение переменного магнитного поля в плоскопараллельную сверхпроводящую пластину конечной толщины в зависимости от частоты поля.

Ключевые слова: сверхпроводимость, интегро-дифференциальное уравнение для напряженности магнитного поля, глубина проникновения переменного магнитного поля, двухжидкостная модель, нормальные электроны, сверхпроводящие электроны, уравнение Лондонов, модифицированное уравнение Лондонов.

DOI: 10.51368/2307-4469-2024-12-5-397-407

Введение

В 1911 г. Камерлинг-Оннесом обнаружено, что при охлаждении материала до температуры ниже критической $T < T_c$, где T_c – критическая температура, его сопротивление резко обращается в нуль [1–3]. Другим фундаментальным свойством сверхпроводников является эффект Мейснера, открытый значительно позже (в 1933 г.) [4]. В мейснеровском состоянии сверхпроводники как I-го, так и II-го родов стремятся вытеснить магнитное поле из объема сверхпроводящего материала [4]. Для объемного сверхпроводника внешнее магнитное поле проникает в сверхпроводник на некоторое расстояние – глубину проникновения магнитного поля. В этом случае распределение магнитного поля можно определить из так называемого стационарного уравнения Лондонов [5–8]:

$$\Delta \boldsymbol{H} - \left(1/\lambda_s^2\right)\boldsymbol{H} = 0, \qquad (1)$$

где $\lambda_s^2(T) \equiv m_s^* c^2 / 4\pi n_s(T) e^2$ – глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник, m_s^* – эффективная масса сверхпроводя-

Осипов Константин Анатольевич, в.н.с., к.т.н.
E-mail: kaosipov@ciam.ru
Варюхин Антон Николаевич, зам. ген. директора – директор исследовательского центра, к.т.н.
Гелиев Александр Валикоевич, нач. отдела, к.ф.-м.н.
ГНЦ, федеральное автономное учреждение «Центральный институт авиационного моторостроения имени П. И. Баранова».
Россия, 111116, Москва, ул. Авиамоторная, 2.

Статья поступила в редакцию 27.03.2024
После доработки 15.05.2024
Принята к публикации 10.09.2024
Шифр научной специальности: 1.3.13

щих электронов, $n_s(T)$ – концентрация сверхпроводящих электронов как функция температуры, c – скорость света, e – заряд электрона. Существует несколько различных способов вывода уравнения Лондонов для проникновения магнитного поля.

В первом способе используются классические уравнения Максвелла, дополненные уравнением движения для сверхпроводящих электронов. Электрическое поле в сверхпроводнике приводит к ускорению сверхпроводящих электронов $m\,\partial \boldsymbol{V}_s/\partial t = -e\boldsymbol{E}$. Откуда можно легко получить выражение для электрического поля через плотность сверхпроводящего тока $\boldsymbol{E} = \left(m/e^2 n_s\right)\partial \boldsymbol{j}_s/\partial t$, где $\boldsymbol{j}_s = -en_s\boldsymbol{V}_s$. Подставив выражение для электрического поля $\boldsymbol{E}$ в уравнение Максвелла, описывающее закон электромагнитной индукции $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -(1/c)\,\partial \boldsymbol{H}/\partial t$, и используя другое уравнение Максвелла $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = (4\pi/c)\,\boldsymbol{j}_s$, связывающее плотность сверхпроводящего тока $\boldsymbol{j}_s$ с напряженностью магнитного поля $\boldsymbol{H}$, получим уравнение Лондонов (1). При выводе уравнения (1) также был привлечен экспериментальный факт о вытеснении магнитного поля из объема сверхпроводника в мейснеровском состоянии за счет приравнивания произвольной функции координат $f(\boldsymbol{r})$, появляющейся при интегрировании по времени полученного уравнения с частной производной, к нулю.

Также уравнение Лондонов (1) можно получить через решение вариационной задачи, варьируя функционал свободной энергии в магнитном поле F_{sH} (или в более общем случае потенциал свободной энергии Гиббса G_{sH}) [9]. Кинетическую энергию сверхпроводящих электронов можно записать следующим образом $W_{\text{кин}} = n_s m V_s^2/2 = m j_s^2/2n_s e^2$. Снова используя уравнение Максвелла (без учета слагаемого с током смещения) $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = (4\pi/c)\,\boldsymbol{j}_s$, получим выражение для кинетической энергии сверхтока через напряженность магнитного поля $W_{\text{кин}} = \left(\lambda_s^2/8\pi\right)\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\right)^2$. Запишем свободную энергию сверхпроводника в магнитном поле:

$$F_{sH} = F_{s0} + \int\left[\boldsymbol{H}^2 + \lambda_s^2\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\right)^2\right]dV/8\pi, \qquad (2)$$

где F_{s0} – свободная энергия сверхпроводника при отсутствии магнитного поля в объеме. Первое слагаемое под интегралом в (2) описывает плотность энергии магнитного поля, а второе – плотность кинетической энергии. Варьируя функционал свободной энергии, получают:

$$\delta F_{sH} = \int\left[2\boldsymbol{H}\delta\boldsymbol{H} + 2\lambda_s^2 \operatorname{rot}\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\delta\boldsymbol{H}\right]dV/8\pi = 0.$$

Опуская математические преобразования, можно прийти к следующему уравнению:

$$\boldsymbol{H} + \lambda_s^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0. \qquad (3)$$

С помощью тождеств векторного анализа $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{H} - \Delta\boldsymbol{H} = -\Delta\boldsymbol{H}$ и соленоидальности магнитного поля $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$, уравнение (3) легко сводится к уравнению Лондонов (1).

Все вышеприведенные соотношения получаются для стационарного режима. В стационарном случае электрическое поле в сверхпроводнике равно нулю, в противном случае его конечное значение приводило бы к бесконечному росту сверхпроводящего тока. Таким образом, сверхток в сверхпроводнике движется по инерции, а нормальный ток за счет слагаемого $(-m/\tau)\boldsymbol{V}_n(t)$, описывающего диссипацию энергии, в уравнениях движения для нормальных электронов в конечном итоге после выхода на стационарный режим затухнет. По этой причине в этом случае нет необходимости рассматривать уравнение движения для нормальных электронов.

Интегро-дифференциальное уравнение для напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$ в сверхпроводнике в мейснеровском состоянии при произвольном изменении магнитного поля

В данной работе при нестационарных условиях будет использоваться двухжидкостная модель, согласно которой все электроны проводимости в сверхпроводнике разделаются на две группы – сверхпроводящие и нормальные [10–13]. Сверхпроводящие электроны за счет объединения в куперовские пары не испытывают никакого сопротивления [14–18], а при движении нормальных электронов происходит диссипация энергии при их взаимодействии с кристаллической решеткой.

Концентрация сверхпроводящих и нормальных электронов зависит от температуры. Глубина проникновения магнитного поля в зависимости от температуры аппроксимируется следующей эмпирической зависимостью во всем диапазоне температур $\lambda_s^2(T) = \lambda_L^2 / \left(1-\left(T/T_c\right)^4\right)$ [19], где $\lambda_L^2 = m_s^* c^2 / 4\pi n e^2$ – лондоновская глубина проникновения, n – концентрация всех электронов проводимости. Отсюда легко получить зависимости долей концентраций сверхпроводящих и нормальных электронов $\alpha_s = n_s / n$ и $\alpha_n = n_n / n$ от температуры, где n_s и n_n – концентрации сверхпроводящих и нормальных электронов:

$$\alpha_s(T) = 1-\left(T/T_c\right)^4, \quad \alpha_n(T) = \left(T/T_c\right)^4. \tag{4}$$

Согласно (4) при нулевой температуре все электроны являются сверхпроводящими $\alpha_s = 1$, а при критической температуре все электроны становятся нормальными $\alpha_n = 1$. В силу того, что в выражениях (4) температура возводится в четвертую степень, поэтому концентрация нормальных электронов начинает нарастать только при температурах близких к критической. Таким образом, в данной работе будем придерживаться двухжидкостной модели сверхпроводников, причем концентрации различных типов электронов будут определяться из вышеприведенной температурной зависимости (4). На данном этапе не будем учитывать распаривание куперовских пар при увеличении их скорости.

При переменном магнитном поле, изменяющемся произвольным образом, необходимо учитывать формирование индуцированного электрического поля вследствие изменения магнитного потока согласно закону Фарадея об электромагнитной индукции. Индуцированное электрическое поле приводит в движение не только сверхпроводящие электроны, но и нормальные при ненулевой температуре. Поэтому необходимо учитывать возбуждение всех электронов (как нормальных, так и сверхпроводящих). Уравнения движения для двух типов электронов представлены ниже:

$$m_n^* \frac{\partial \boldsymbol{V}_n}{\partial t} = -\frac{m_n^*}{\tau}\boldsymbol{V}_n - e\boldsymbol{E}, \qquad m_s^* \frac{\partial \boldsymbol{V}_s}{\partial t} = -e\boldsymbol{E} \tag{5}$$

где отдельно введены эффективные массы нормальных и сверхпроводящих электронов (m_n^* и m_s^* соответственно). Умножив первое уравнение в системе (5) на $(-en_n)$, а второе – на $(-en_s)$ и используя определение плотности нормального и сверхпроводящего токов $\boldsymbol{j}_n = -en_n\boldsymbol{V}_n$, $\boldsymbol{j}_s = -en_s\boldsymbol{V}_s$, в результате получим:

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}_n}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}_n}{\tau} = \alpha_n \frac{\sigma_0}{\tau}\boldsymbol{E}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{j}_s}{\partial t} = \varepsilon_m^2 \alpha_s \frac{\sigma_0}{\tau}\boldsymbol{E}, \tag{6}$$

где $\sigma_0 = ne^2\tau / m_n^*$ – удельная проводимость сверхпроводящего материала в нормальном состоянии, $\varepsilon_m^2 = m_n^* / m_s^*$ – коэффициент асимметрии эффективных масс электронов. Возьмем ротор от обеих частей первого уравнения системы (6) и вместо ротора электрического поля подставим $-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$, согласно одному из уравнений Максвелла:

$$\tau \frac{\partial \operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n}{\partial t} + \operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n = -\frac{\alpha_n \sigma_0}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{7}$$

Из (7) выразим ротор от плотности нормального тока $\operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n &= -\tau \frac{\partial \operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n}{\partial t} - \frac{\alpha_n \sigma_0}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-\tau \operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n - \frac{\alpha_n \sigma_0}{c}\boldsymbol{H}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Сложив два уравнения системы (6), получим:

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}_n}{\tau} = \left(\alpha_n + \varepsilon_m^2 \alpha_s\right)\frac{\sigma_0}{\tau}\boldsymbol{E}, \tag{9}$$

где введена плотность тока $\boldsymbol{j}$ как сумма нормальной и сверхпроводящей компонент: $\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}_n+\boldsymbol{j}_s$. Возьмем ротор от обеих частей вышеприведенного уравнения (9) и снова воспользуемся соотношением $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -(1/c)\partial\boldsymbol{H}/\partial t$:

$$\frac{\partial \operatorname{rot}\boldsymbol{j}}{\partial t}+\frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n}{\tau}=\left(\alpha_n+\varepsilon_m^2\alpha_s\right)\frac{\sigma_0}{\tau}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}= =-\left(\alpha_n+\varepsilon_m^2\alpha_s\right)\frac{\sigma_0}{\tau}\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}. \quad (10)$$

Группируя слагаемые с частной производной по времени в (10), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{rot}\boldsymbol{j}+\left(\alpha_n+\varepsilon_m^2\alpha_s\right)\frac{\sigma_0}{\tau}\frac{\boldsymbol{H}}{c}\right\}+\frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n}{\tau}=0. \quad (11)$$

Выразим плотность суммарного тока $\boldsymbol{j}$ через напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$, используя $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=(4\pi/c)\boldsymbol{j}$, а вместо $\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n$ подставим полученное ранее соотношение из (8):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{c\tau}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}+\varepsilon_m^2\alpha_s\sigma_0\frac{\boldsymbol{H}}{c}-\tau\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n\right\}=0. \quad (12)$$

В самом общем случае выражение в фигурных скобках должно равняться произвольной функции координат $f(\boldsymbol{r})$, поэтому:

$$\frac{c\tau}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}+\varepsilon_m^2\alpha_s\sigma_0\frac{\boldsymbol{H}}{c}-\tau\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n=f(\boldsymbol{r}).$$

Снова воспользовавшись тождествами из векторного анализа $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{H}-\Delta\boldsymbol{H}=-\Delta\boldsymbol{H}$ и соленоидальностью поля $\boldsymbol{H}$ ($\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$), получим:

$$\Delta\boldsymbol{H}-\varepsilon_m^2\frac{4\pi\alpha_s\sigma_0}{c^2\tau}\boldsymbol{H}+\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n=-\frac{4\pi}{c\tau}f(\boldsymbol{r}). \quad (13)$$

Преобразуем выражение $\varepsilon_m^2\dfrac{4\pi\alpha_s\sigma_0}{c^2\tau}= =\dfrac{4\pi n_s e^2}{m_s^* c^2}=\dfrac{1}{\lambda_s^2}$, где видно, что коэффициент асимметрии эффективных масс ε_m^2 сокращается:

$$\Delta\boldsymbol{H}-\frac{1}{\lambda_s^2}\boldsymbol{H}=-\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n-\frac{4\pi}{c\tau}f(\boldsymbol{r}). \quad (14)$$

Вернемся к соотношению (7), где введем формальные обозначения $\boldsymbol{J}\equiv\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n$ и $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},t)\equiv-\dfrac{\alpha_n\sigma_0}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$, тогда уравнение (7) будет эквивалентно следующему:

$$\tau\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}+\boldsymbol{J}=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},t). \quad (15)$$

Для начала решим уравнение с нулевой правой частью, т. е. обыкновенное однородное дифференциальное уравнение первого порядка $\tau\dfrac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t}+\boldsymbol{J}=0$. Очевидно, что его решением будет функция вида $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{J}_0(\boldsymbol{r})e^{-t/\tau}$ или $\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n=\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n\right)_0 e^{-t/\tau}$. Для нахождения решения неоднородного уравнения воспользуемся методом вариаций произвольной постоянной, т. е. $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_0(\boldsymbol{r},t)e^{-t/\tau}$, подставив в (15), получим:

$$\tau e^{-t/\tau}\frac{\partial\boldsymbol{J}_0}{\partial t}+\tau\boldsymbol{J}_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-t/\tau}+\boldsymbol{J}_0e^{-t/\tau}= =\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},t)\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\partial\boldsymbol{J}_0}{\partial t}=\frac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},t)}{\tau}e^{t/\tau}.$$

Отсюда $\boldsymbol{J}_0(\boldsymbol{r},t)=\displaystyle\int_0^t\frac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r},t')}{\tau}e^{t'/\tau}dt'= =-\frac{\alpha_n\sigma_0}{c\tau}\int_0^t\frac{\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t')}{\partial t'}e^{t'/\tau}dt'$. Заметим, что с учетом экспериментального факта о вытеснении внешнего магнитного поля в сверхпроводниках в мейснеровском состоянии далее будем считать, что произвольные функции координат, появляющиеся при интегрировании выражений с частными производными по времени, тождественно равными нулю. Тогда ротор плотности нормального тока будет выражаться через напряженность магнитного поля следующим образом:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n=-\frac{\alpha_n\sigma_0}{c\tau}e^{-t/\tau}\int_0^t\frac{\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t')}{\partial t'}e^{t'/\tau}dt'. \quad (16)$$

Преобразуем коэффициент в (16) $\frac{\alpha_n\sigma_0}{c\tau}=\frac{m_s^*}{m_n^*}\alpha_n\frac{4\pi ne^2}{m_s^*c^2}\frac{c}{4\pi}=\frac{c}{4\pi}\frac{1}{\varepsilon_m^2}\frac{\alpha_n}{\lambda_L^2}$ и, подставив (16) в (14), получим:

$$\Delta\boldsymbol{H}-\frac{1}{\lambda_s^2}\boldsymbol{H}=\frac{1}{\varepsilon_m^2}\frac{1}{\lambda_n^2}e^{-t/\tau}\int_0^t\frac{\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t')}{\partial t'}e^{t'/\tau}dt',\quad(17)$$

где используются следующие обозначения $\lambda_s^2=\lambda_L^2/\alpha_s$, $\lambda_n^2=\lambda_L^2/\alpha_n$. Выражая (17) через лондоновскую глубину проникновения магнитного поля λ_L и доли концентраций нормальных и сверхпроводящих электронов (α_n и α_s), получим следующее интегро-дифференциальное уравнение для напряженности магнитного поля, описывающее нестационарное поведение магнитного поля в сверхпроводнике в мейснеровском состоянии вследствие возбуждения нормальных электронов:

$$\Delta\boldsymbol{H}-\frac{\alpha_s}{\lambda_L^2}\boldsymbol{H}=\frac{1}{\varepsilon_m^2}\frac{\alpha_n}{\lambda_L^2}\int_0^t\frac{\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t')}{\partial t'}e^{-\frac{(t-t')}{\tau}}dt'.\quad(18)$$

Заметим, что при нулевой температуре $T=0$ K, когда все электроны являются сверхпроводящими, правая часть в (18) тождественно равна нулю в силу того, что $\alpha_n=0$, и получим классическое уравнение Лондонов (1) для проникновения магнитного поля.

Интегральное выражение в уравнении (18) появляется вследствие того, что изменение напряженности магнитного поля порождает вихревое электрическое поле, которое приводит в движение не только сверхпроводящие, но и нормальные электроны. В свою очередь нормальные токи порождают свои собственные магнитные поля, которые вносят вклад в распределение суммарного магнитного поля в сверхпроводнике.

Модифицированное уравнение Лондонов для напряженности магнитного поля в сверхпроводнике в мейснеровском состоянии для гармонического изменения магнитного поля

Полученное ранее интегро-дифференциальное уравнение (17) или (18) можно свести к так называемому модифицированному уравнению Лондонов в случае периодического изменения магнитного поля с частотой ω. Рассмотрим частный случай переменного магнитного поля вида $\sim\boldsymbol{H}_0e^{i\omega t}$. В силу линейности уравнения (17) представим напряженность магнитного поля в виде $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})e^{i\omega t}$, подставим в (17) и проведем некоторые математические преобразования:

$$\Delta\boldsymbol{H}-\frac{1}{\lambda_s^2}\boldsymbol{H}=\frac{1}{\varepsilon_m^2}\frac{1}{\lambda_n^2}e^{-t/\tau}\int_0^t\frac{\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t')}{\partial t'}e^{t'/\tau}dt'=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon_m^2}\frac{1}{\lambda_n^2}e^{-t/\tau}\int_0^t i\omega\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})e^{i\omega t'}e^{t'/\tau}dt'=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon_m^2}\frac{1}{\lambda_n^2}e^{-t/\tau}i\omega\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\int_0^t e^{(1+i\omega\tau)\frac{t'}{\tau}}dt'=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon_m^2}\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{i\omega\tau}{1+i\omega\tau}\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\left(e^{i\omega t}-e^{-t/\tau}\right).$$

Будем рассматривать только установившиеся процессы, тогда на временах $t\gg\tau$ экспоненциальный член будет стремиться к нулю $e^{-t/\tau}\to 0$:

$$\Delta\boldsymbol{H}-\left(\alpha_s+\alpha_n\frac{1}{\varepsilon_m^2}\frac{i\omega\tau}{(1+i\omega\tau)}\right)\frac{1}{\lambda_L^2}\boldsymbol{H}=0.\quad(19)$$

Таким образом, полученное интегро-дифференциальное уравнение (17) или (18) для переменного магнитного поля сводится к следующему комплексному уравнению:

$$\Delta\boldsymbol{H}-\frac{1}{\lambda_\omega^2}\boldsymbol{H}=0\quad(20)$$

где введена глубина проникновения переменного магнитного поля λ_ω^2 в зависимости от частоты изменения магнитного поля ω, долей концентраций сверхпроводящих и нормальных электронов (α_s и α_n), т. е. фактически температуры по отношению к критической и коэффициента асимметрии эффективных масс ε_m^2:

$$\lambda_\omega^2=\lambda_L^2\frac{\varepsilon_m^2(1+i\omega\tau)}{\alpha_s\varepsilon_m^2(1+i\omega\tau)+\alpha_n i\omega\tau}.\quad(21)$$

Назовем уравнение (20) как модифицированное уравнение Лондонов для переменного магнитного поля в сверхпроводнике, находящегося в мейснеровском состоянии. На данный момент проникновение квантов магнитного потока в виде так называемых вихрей Абрикосова [20–26] не рассматривается. Если рассмотреть более простой случай, когда коэффициент асимметрии эффективных масс ε_m^2 равен единице ($\varepsilon_m^2=1$), то получим более простое выражение для глубины проникновения $\lambda_\omega^2=\lambda_L^2\dfrac{1+i\omega\tau}{\alpha_s+i\omega\tau}$. Для дальнейших аналитических расчетов квадрат глубины проникновения переменного магнитного поля λ_ω^2 приведем к следующему виду, введя сдвиг фаз ξ:

$$\lambda_\omega^2=\lambda_L^2\frac{\sqrt{\left(\alpha_s+(\omega\tau)^2\right)^2+(\alpha_n\omega\tau)^2}}{\alpha_s^2+(\omega\tau)^2}e^{-i\xi}=$$
$$=\lambda_L^2\sqrt{1+\left(\frac{\alpha_n\omega\tau}{\alpha_s^2+(\omega\tau)^2}\right)^2}e^{-i\xi}, \qquad (22)$$
$$\operatorname{tg}\xi=\frac{\alpha_n\omega\tau}{\alpha_s+(\omega\tau)^2}.$$

Отсюда сама глубина проникновения λ_ω будет определяться как:

$$\lambda_\omega=|\lambda_\omega|e^{-i\xi/2},\quad |\lambda_\omega|=\lambda_L\sqrt[4]{1+\left(\frac{\alpha_n\omega\tau}{\alpha_s^2+(\omega\tau)^2}\right)^2} \qquad (23)$$

Ниже на рисунке представлен график зависимости модуля относительной глубины проникновения переменного магнитного поля $|\lambda_\omega|/\lambda_L=\sqrt[4]{1+\left(\dfrac{\alpha_n\nu}{\alpha_s^2+\nu^2}\right)^2}=f\left(\nu,\overline{T}\right)$ от относительной температуры $\overline{T}=T/T_c$ при различных значениях параметра $\nu=\omega\tau$.

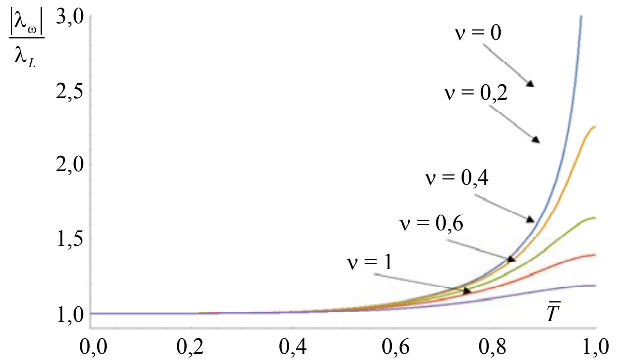

Рисунок. Зависимость модуля относительной глубины проникновения переменного магнитного поля $|\lambda_\omega|/\lambda_L$ от относительной температуры $\overline{T}$ при различных параметрах ν

Проникновение переменного магнитного поля в плоскопараллельную сверхпроводящую пластину

Рассмотрим проникновение магнитного поля при его синусоидальном изменении в плоскопараллельную сверхпроводящую пластину толщиной *a*. Необходимо обратить внимание на то, что уравнение (20) комплексно вследствие возбуждения нормальных электронов и появления соответствующего сдвига фаз ξ, определенного ранее, что приведет к некоторым особенностям, о которых будет сказано ниже. В силу того, что уравнение (20) линейно, поэтому будем искать его решение в следующем виде $\hat{H}(x,t)=\hat{H}(x)e^{i\omega t}$, в результате получим следующее уравнение для амплитуды напряженности магнитного поля:

$$\frac{d^2\hat{H}(x)}{dx^2}-\frac{1}{\lambda_\omega^2}\hat{H}(x)=0. \qquad (24)$$

Очевидно, что решение уравнения (24) описывается следующей функцией $\hat{H}(x)=\hat{C}_1e^{x/\lambda_\omega}+\hat{C}_2e^{-x/\lambda_\omega}$. Следует иметь ввиду, что произвольные константы $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$ являются комплексными величинами. Тогда $\hat{H}(x,t)=\left(\hat{C}_1e^{x/\lambda_\omega}+\hat{C}_2e^{-x/\lambda_\omega}\right)e^{i\omega t}$. Для нахождения констант $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$ воспользуемся граничными условиями:

$$\begin{cases}\hat{H}\left(x=-a/2,t\right)=H_0e^{i\omega t}=\left(\hat{C}_1e^{-a/2\lambda_\omega}+\hat{C}_2e^{a/2\lambda_\omega}\right)e^{i\omega t}\\ \hat{H}\left(x=a/2,t\right)=H_0e^{i\omega t}=\left(\hat{C}_1e^{a/2\lambda_\omega}+\hat{C}_2e^{-a/2\lambda_\omega}\right)e^{i\omega t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\hat{C}_1e^{-a/2\lambda_\omega}+\hat{C}_2e^{a/2\lambda_\omega}=H_0,\\ \hat{C}_1e^{a/2\lambda_\omega}+\hat{C}_2e^{-a/2\lambda_\omega}=H_0\end{cases}\qquad(25)$$

Как легко видеть из (25), константы $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$ равны: $\hat{C}_1=\hat{C}_2=\dfrac{H_0}{2\mathrm{ch}\left(a/\lambda_\omega\right)}$. Тогда напряженность магнитного поля $\hat{H}\left(x,t\right)$ в сверхпроводящей пластине, выраженная в комплексном виде, в зависимости от частоты и времени определяется как:

$$\hat{H}\left(x,t\right)=H_0\frac{\mathrm{ch}\left(x/\lambda_\omega\right)}{\mathrm{ch}\left(a/2\lambda_\omega\right)}e^{i\omega t}.\qquad(26)$$

Введем безразмерную координату $\bar{x}=x/\left|\lambda_\omega\right|$. Воспользуемся выражениями (22) и (23) для глубины проникновения λ_ω и преобразуем (26):

$$\mathrm{ch}\left(x/\lambda_\omega\right)=A_1\left(\bar{x}\right)+iA_2\left(\bar{x}\right),$$
$$\mathrm{ch}\left(a/2\lambda_\omega\right)=B_1+iB_2$$

где для уменьшения громоздкости введены следующие обозначения:

$$\begin{cases}A_1\left(\bar{x}\right)=\cos\left(\bar{x}\sin\dfrac{\xi}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\bar{x}\cos\dfrac{\xi}{2}\right),\\ B_1=\cos\left(\dfrac{a}{2\left|\lambda_\omega\right|}\sin\dfrac{\xi}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\dfrac{a}{2\left|\lambda_\omega\right|}\cos\dfrac{\xi}{2}\right),\\ A_2\left(\bar{x}\right)=\sin\left(\bar{x}\sin\dfrac{\xi}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\bar{x}\cos\dfrac{\xi}{2}\right),\\ B_2=\sin\left(\dfrac{a}{2\left|\lambda_\omega\right|}\sin\dfrac{\xi}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\dfrac{a}{2\left|\lambda_\omega\right|}\cos\dfrac{\xi}{2}\right)\end{cases}\qquad(27)$$

$$\hat{H}\left(x,t\right)=H_0\frac{A_1+iA_2}{B_1+iB_2}e^{i\omega t}=$$
$$=H_0\frac{\left(A_1B_1+A_2B_2+i\left(A_2B_1-A_1B_2\right)\right)}{B_1^2+B_2^2}\times\qquad(28)$$
$$\times\left(\cos\omega t+i\sin\omega t\right)$$

Физический смысл имеет только реальная часть, в результате получим, что напряженность магнитного поля в зависимости от безразмерной координаты $\bar{x}$ и времени t описывается следующим выражением:

$$H\left(\bar{x},t\right)=\mathrm{Re}\left\{\hat{H}\left(\bar{x},t\right)\right\}=$$
$$=H_0\frac{A_1\left(\bar{x}\right)B_1+A_2\left(\bar{x}\right)B_2}{B_1^2+B_2^2}\cos\omega t+\qquad(29)$$
$$+H_0\frac{A_1\left(\bar{x}\right)B_2-A_2\left(\bar{x}\right)B_1}{B_1^2+B_2^2}\sin\omega t,$$

где $A_1\left(\bar{x}\right)$, $A_2\left(\bar{x}\right)$, B_1 и B_2 определены в (27).

Рассмотрим различные асимптотические случаи. При нулевой температуре $T\to 0$ К доля концентрации нормальных электронов α_n и сдвиг фаз в соответствии с вышеприведенными выражениями стремятся к нулю, глубина проникновения переменного магнитного поля λ_ω стремится к лондоновской глубине проникновения λ_L, а коэффициенты $A_1\left(\bar{x}\right)$, $A_2\left(\bar{x}\right)$, B_1 и B_2 равны $A_1\left(x\right)=\mathrm{ch}\left(x/\lambda_L\right)$, $A_2\left(x\right)=0$, $B_1=\mathrm{ch}\left(a/2\lambda_L\right)$, $B_2=0$. Тогда справедлива следующая зависимость $H\left(x,t\right)=H_0\dfrac{\mathrm{ch}\left(x/\lambda_L\right)}{\mathrm{ch}\left(a/2\lambda_L\right)}\cos\omega t$, т. е. при нулевой температуре при отсутствии нормальных электронов в каждый момент времени распределение напряженности магнитного поля H в сверхпроводящей плоскопараллельной пластине соответствует стационарному решению. Таким образом, видим, что уравнение (24) не описывает каких-либо нестационарных эффектов, связанных с движением сверхпроводящих электронов (или так называемых куперовских пар согласно одному из механизмов возникновения сверхпроводящего состояния [14–18]). В этом смысле данное уравнение (20) не является полным в том смысле, что в нем не отражены нестационарные эффекты, связанные с движением сверхпроводящих электронов.

По этой причине для описания нестационарных процессов, эффектов распаривания куперовских пар, нестационарного поведения волновой функции $\psi(\boldsymbol{r})$, являющейся параметром порядка в теории Гинзбурга-Ландау, где $|\psi(\boldsymbol{r})|^2 = n_s/2$, необходимо обращаться к нестационарному уравнению Гинзбурга-Ландау. Однако при конечной температуре $T \neq 0$ $[K]$ сверхпроводников нестационарную теорию Гинзбурга-Ландау необходимо дополнять также эффектами от возбуждения нормальных электронов, которые приводятся в движение от индуцированных электрических полей при изменяющихся условиях. Индуцированный нормальный ток будет создавать магнитные поля, которые будут влиять на поведение куперовских пар, и по этой причине должны учитываться при выводе нестационарного уравнения Гинзбурга-Ландау. Но с другой стороны, ситуация усложняется тем, что феноменологическая теория Гинзбурга-Ландау является приближенной и справедлива только при температурах близких к критической $T \sim T_c$.

Рассмотрим температуры вблизи критической $T \sim T_c$, при которых доли концентраций двух типов электронов примерно равны $\alpha_n \approx 1$, $\alpha_s \approx 0$, тогда

$$\lambda_\omega \approx \lambda_L \left(1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}\right)^{1/4} e^{-i\xi/2}, \quad \operatorname{tg}\xi = \frac{1}{\omega\tau}. \quad (30)$$

Если рассмотреть предел больших частот таких, что $\omega\tau \gg 1$, тогда глубина проникновения переменного магнитного поля примерно соответствует лондоновской глубине $\lambda_\omega \approx \lambda_L$, а сдвиг фаз соответственно равен нулю $\xi \to 0$. Тогда в этом случае снова получаем следующую зависимость для напряженности магнитного поля $H(x,t) = H_0 \dfrac{\operatorname{ch}(x/\lambda_L)}{\operatorname{ch}(a/2\lambda_L)} \cos\omega t$. Для случая малых частот таких, что $\omega\tau \ll 1$, получаем следующие выражения $\lambda_\omega \approx \dfrac{\lambda_L}{\sqrt{\omega\tau}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $|\lambda_\omega| \approx \dfrac{\lambda_L}{\sqrt{\omega\tau}}$ и $\xi \to \dfrac{\pi}{2}$. Коэффициенты $A_1(\bar{x})$, $A_2(\bar{x})$, B_1 и B_2, введенные ранее (27), будут определяться как

$$\begin{cases} A_1(x) = \cos\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}|\lambda_\omega|}\right)\operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}|\lambda_\omega|}\right), \\ B_1 = \cos\left(\dfrac{a}{2\sqrt{2}|\lambda_\omega|}\right)\operatorname{ch}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{2}|\lambda_\omega|}\right), \\ A_2(\bar{x}) = \sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}|\lambda_\omega|}\right)\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}|\lambda_\omega|}\right), \\ B_2 = \sin\left(\dfrac{a}{2\sqrt{2}|\lambda_\omega|}\right)\operatorname{sh}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{2}|\lambda_\omega|}\right). \end{cases} \quad (31)$$

В этом диапазоне частот, при которых $\omega\tau \ll 1$, и области температур $T \sim T_c$, когда доля концентраций нормальных электронов примерно равна $\alpha_n \approx 1$, напряженность магнитного поля H может претерпевать существенные изменения в характере распределения поля по сечению сверхпроводящей пластины относительно распределения поля в стационарном случае вследствие возбуждения нормальных токов и определенного сдвига фаз при отклике при индуцированном вихревом электрическом поле и соответствующего вклада в суммарное магнитное поле.

Переменное магнитное поле индуцирует вихревое электрическое поле, которое приводит в движение ток. Вследствие возбуждения нормальных электронов или так называемых токов Фуко происходит диссипация энергии поля, выделяющейся в виде джоулева тепла, которую можно вычислить через интеграл вида $Q = \int \overline{(\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E})} dV$, где Q – средняя по времени энергия, диссипируемая в одну секунду. Зависимости электрического поля и плотности токов можно восстановить из уравнений Максвелла, зная распределение магнитного поля от времени и координаты согласно (29). Исходя из симметрии рассматриваемой задачи, выражения для электрического поля и плотности тока найдем из следующих уравнений $\dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial H_z}{\partial t}$, $-\dfrac{\partial H_z}{\partial x} = \dfrac{4\pi}{c} j_y$. Тогда распределение электрического поля и плотности токов будут определяться следующим образом:

$$E_y\left(x,t\right)=-\frac{\left|\lambda_\omega\right|}{c}\frac{\omega H_0}{\left(B_1^2+B_2^2\right)}\left(B_2\cos\omega t-B_1\sin\omega t\right)\int A_1\left(\overline{x}\right)d\overline{x}+\frac{\left|\lambda_\omega\right|}{c}\frac{\omega H_0}{\left(B_1^2+B_2^2\right)}\left(B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t\right)\int A_2\left(\overline{x}\right)d\overline{x}$$

$$j_y\left(\overline{x},t\right)=-\frac{c}{4\pi\left|\lambda_\omega\right|}\frac{\partial H_z}{\partial\overline{x}}=-\frac{c}{4\pi\left|\lambda_\omega\right|}\left\{\frac{dA_1}{d\overline{x}}\left(B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t\right)+\frac{dA_2}{d\overline{x}}\left(B_2\cos\omega t-B_1\sin\omega t\right)\right\}.$$

Таким образом, перемножив слагаемые для электрического поля $E_y\left(x,t\right)$ и плотности тока $j_y\left(\overline{x},t\right)$ и взяв среднее за период, можно при необходимости вычислить среднюю мощность на единицу площади, которая диссипируется в сверхпроводнике за счет возбуждения нормальных электронов $Q/\Delta S=$ $=\int\limits_{-a/2}^{a/2}\left\langle j_y\left(x,t\right)E_y\left(x,t\right)\right\rangle dx$. Можно обратить внимание на то, что средняя выделяемая мощность будет пропорциональна квадрату частоты $Q/\Delta S\sim\omega^2$ в силу того, что электрическое поле и плотность токов пропорциональны первой степени частоты ($E_y, j_y\sim\omega$).

Заключение

Для произвольного изменения магнитного поля получено интегро-дифференциальное уравнение для проникновения магнитного поля в сверхпроводник согласно двухжидкостной модели сверхпроводников, в которой все электроны разделяются на два типа – сверхпроводящие и нормальные. При изменении магнитного поля индуцируется вихревое электрическое поле, которое приводит в движение два типа электронов. Нормальный ток создает свое собственное магнитное поле, которое вносит вклад в распределение суммарного магнитного поля в сверхпроводнике, что и учитывается в интегральном слагаемом полученного уравнения.

Для периодического изменения магнитного поля интегро-дифференциальное уравнение сводится к так называемому модифицированному уравнению Лондонов, в котором получена зависимость глубины проникновения переменного магнитного поля от частоты изменения магнитного поля и концентрации нормальных электронов, т. е. фактически от температуры.

Рассмотрена задача о проникновении переменного магнитного поля в плоскопараллельную сверхпроводящую пластину конечной толщины с помощью модифицированного уравнения Лондонов, рассмотрены различные предельные случаи как по температурам относительной критической, так и частотам. Причем глубина проникновения переменного магнитного поля λ_ω представляет собой комплексную величину, что может приводить к определенной задержке при изменении магнитного поля в сверхпроводнике вследствие возникновения некоторого сдвига фаз. Получено, что при температурах близких к критической и для случая малых частот таких, что параметр $\nu\equiv\omega\tau\ll 1$, напряженность поля может претерпевать существенные изменения в характере распределения поля по сечению сверхпроводящей пластины относительно распределения поля в стационарном случае вследствие возбуждения нормальных токов и определенного сдвига фаз при индуцированном вихревом электрическом поле и соответствующего вклада в суммарное магнитное поле.

Следует отметить, что модифицированное уравнение Лондонов, полученное из представлений классической физики, не описывает каких-либо нестационарных эффектов, связанных с движением сверхпроводящих электронов (или так называемых куперовских пар). В этом смысле данное уравнение не является полным. По этой причине для описания нестационарных процессов, эффектов распаривания куперовских пар, нестационарного поведения волновой функции $\psi\left(\boldsymbol{r}\right)$, являющейся параметром порядка в теории Гинзбурга-Ландау, где $\left|\psi\left(\boldsymbol{r}\right)\right|^2=n_s/2$, необходимо обращаться к нестационарному уравнению Гинзбурга-Ландау с учетом возбуждения нормальных электронов при индуцированном электрическом поле в нестационарном случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Onnes H. K.* / Leiden Comm. 1911. № 122b, 124.
2. *Onnes H. K.* / Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden. 1911. № 119b, 120b, 122b, 124c.
3. *Onnes H. K.* / Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden. 1914. № 139i.
4. *Meissner W., Ochsenfeld R.* / Naturwiss. 1933. № 21. P. 787.
5. *London F., London H.* / Proc. Roy. Soc. 1935. № A149. P. 71.
6. *London F.* / Proc. Roy. Soc. 1935. № A512. P. 24; Phys. Rev. 1948. № 74. P. 562.
7. *London F.* / Physica. 1936. Vol. 3. P. 450.
8. *London F.* Une conception nouvelle de la supraconductibilite. – Paris, 1937.
9. *Шмидт В. В.* Введение в физику сверхпроводников. – М.: МЦНМО, 2000.
10. *Bardeen J.* / Phys. Rev. Let. 1958. Vol. 1. № 11. P. 399–400.
11. *London F.* Superfluids. John Wiley and Sons. Vol. 1 and 2. – New York: John Wiley and Sons., 1954.
12. *Gorter C. J.* Progress in Low-Temperature Physics. – North Holland Publishing Company. Chap. 1. 1955.
13. *Landau L. D.* / J. Phys. U.S.S.R. 1941. Vol. 5. P. 71.
14. *Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R.* / Phys. Rev. 1957. Vol. 106. P. 162; Vol. 108. P. 1175.
15. *Боголюбов Н. Н.* / ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58; Nuovo cim. 1958. Vol. 7. P. 794.
16. *Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В.* Новый метод в теории сверхпроводимости. – М.: Наука, 1958.
17. *Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R.* / Phys. Rev. 1957. Vol. 106. P. 162–164.
18. *Бардин Дж., Купер Л., Шриффер Дж.* Теория сверхпроводимости / под ред. Боголюбова Н. Н. – М.: ИЛ, 1960. С. 103.
19. *Ципенюк Ю. М.* Физические основы сверхпроводимости: учебное пособие для вузов. – М.: Изд-во МФТИ, 2002.
20. *Abrikosov A. A.* Fundamentals of metals. – M.: Nauka, 1987.
21. *Abrikosov A. A.* / Reports of the Academy of Sciences USSR. 1952. Vol. 86. P. 489.
22. *Abrikosov A. A.* / ZhETF. 1957. Vol. 32. P. 1442.
23. *Abrikosov A. A.* / Journal of Physics and Chemistry of Solids. 1957. Vol. 2. Iss. 3. P. 199–208.
24. *Cribier D., Jacrot B., Rao L. M., Farnoux B.* / Phys. Lett. 1964. Vol. 9. P. 106.
25. *Stephen M. J., Bardeen J.* / Phys. Rev. Lett. 1965. Vol. 14. № 4. P. 112–113.
26. *Bardeen J., Stephen M. J.* / Phys. Rev. 1965. Vol. 140. № 4A.

PACS: 74.25.Ha

The integro-differential equation and the modified London equation for the penetration of a nonstationary magnetic field into a superconductor in the Meissner state

K. A. Osipov, A. N. Varyukhin and A. V. Geliev

«Central Institute of Aviation Motors named after P. I. Baranov»
2 Aviamotornaya st., Moscow, 111116, Russia
E-mail: kaosipov@ciam.ru

Received 27.03.2024; revised 15.05.2023; accepted 10.09.2024

For the first time, an integro-differential equation has been obtained for the penetration of a magnetic field into a superconductor in the Meissner state for the nonstationary case taking into account the excitation of both superconducting and normal electrons according to a two-fluid model of superconductors. With a sinusoidal change in the magnetic field, this integro-differential equation is reduced to a modified London equation in which a complex expression is obtained for the penetration depth of an alternating magnetic field depending on the frequency of change in the magnetic field and the fractions of concentrations of normal and superconducting electrons (or, in fact, on temperature). The penetration of an alternating magnetic field into a plane-parallel superconducting plate of finite thickness depending on frequency is considered using the modified London equation.

Keywords: superconductivity, integro-differential equation for magnetic field strength, penetration depth of an alternating magnetic field, two-fluid model, normal electrons, superconducting electrons, London equation, modified London equation.

REFERENCES

1. Onnes H. K., Leiden Comm., № 122b, 124 (1911).
2. Onnes H. K., Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden., № 119b, 120b, 122b, 124c (1911).
3. Onnes H. K., Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden., № 139i (1914).
4. Meissner W. and Ochsenfeld R., Naturwiss **21**, 787 (1933).
5. London F. and London H., Proc. Roy. Soc. № A149, 71 (1935).
6. London F., Proc. Roy. Soc., № A512, 24 (1935); Phys. Rev., № 74, 562 (1948).
7. London F., Physica **3**, 450 (1936).
8. London F., Une conception nouvelle de la supraconductibilite. Paris, 1937.
9. Schmidt V. V. Introduction to the physics of superconductors. M., ICNMO, 2000.
10. Bardeen J., Phys. Rev. Let. **1** (11), 399–400 (1958).
11. London F., Superfluids. Vol. 1 and 2. New York, John Wiley and Sons, 1954.
12. Gorter C. J., Progress in Low-Temperature Physics. Chap. 1. North Holland Publishing Company, 1955.
13. Landau L. D., J. Phys. U.S.S.R. **5**, 71 (1941).
14. Bardeen J., Cooper L. N. and Schrieffer J. R., Phys. Rev. **106**, 162; **108**, 1175 (1957).
15. Bogolyubov N. N., ZhETF **34**, 58 (1958); Nuovo cim. **7**, 794 (1958).
16. Bogolyubov N. N., Tolmachev V. V. and Shirkov D. V. A new method in the theory of superconductivity. Moscow, Nauka, 1958.
17. Bardeen J., Cooper L. N. and Schrieffer J. R., Phys. Rev. **106**, 162–164 (1957).
18. Bardin J., Cooper L. and Schrieffer J. In the collection: Theory of superconductivity / Ed. Bogolyubov N. N., Moscow, IL, 1960, p. 103.
19. Tsipenyuk Yu. M. Physical foundations of superconductivity: Textbook: For universities. Moscow, MIPT Publishing House, 2002.
20. Abrikosov A. A. Fundamentals of metals. Moscow, Nauka, 1987.
21. Abrikosov A. A., Reports of the Academy of Sciences USSR **86**, 489 (1952).
22. Abrikosov A. A., ZhETF **32**, 1442 (1957).
23. Abrikosov A. A., Journal of Physics and Chemistry of Solids. **2** (3), 199–208 (1957).
24. Cribier D., Jacrot B., Rao L. M. and Farnoux B., Phys. Lett. **9**, 106 (1964).
25. Stephen M. J. and Bardeen J., Phys. Rev. Lett. **14** (4), 112–113 (1965).
26. Bardeen J. and Stephen M. J., Phys. Rev. **140** (4A) (1965).