ОБЩАЯ ФИЗИКА
GENERAL PHYSICS

УДК 538.945 PACS: 74.25.Ha
EDN: SZYKTT

Нестационарное уравнение диффузии проникновения переменного магнитного поля в сверхпроводники в мейснеровском состоянии

К. А. Осипов, А. Н. Варюхин, А. В. Гелиев

Получено нестационарное уравнение диффузии проникновения переменного магнитного поля в сверхпроводники, находящихся в мейснеровском состоянии, в соответствии с двухжидкостной моделью, согласно которой все электроны в сверхпроводнике делятся на два типа – сверхпроводящие и нормальные. Представлена физическая интерпретация выведенного уравнения и отмечены некоторые его особенности. При гармоническом изменении магнитного поля данное уравнение сводится к модифицированному уравнению Лондонов, в котором получено комплексное выражение для глубины проникновения переменного магнитного поля в зависимости от частоты и долей концентраций нормальных и сверхпроводящих электронов (или фактически от температуры). Получены аналитические решения нестационарного уравнения диффузии в сверхпроводниках в некоторых частных случаях – для сверхпроводящего полупространства и плоскопараллельной сверхпроводящей пластины конечной толщины с заданными граничными и начальными условиями.

Ключевые слова: нестационарное уравнение магнитной диффузии в сверхпроводнике; сверхпроводимость; модифицированное уравнение Лондонов; глубина проникновения переменного магнитного поля; двухжидкостная модель; нормальные электроны; сверхпроводящие электроны.

DOI: 10.51368/2307-4469-2024-12-6-491-500

Введение

Сверхпроводники I и II-го родов при напряженностях магнитного поля, меньших некоторой критической величины, находятся в мейснеровском состоянии [1], в котором внешнее магнитное поле вытесняется из объема сверхпроводящего материала за счет циркулирующих молекулярных токов, протекающих преимущественно по поверхности, носителями которых являются сверхпроводящие электроны или так называемые куперовские пары [2–8], которые не испытывают никакого сопротивления при температурах ниже критической $T < T_c$. Распределение напряженности магнитного поля в сверхпроводнике в мейснеровском состоянии описывается уравнением Лондонов [9–13]

$$\Delta \boldsymbol{H} - \frac{1}{\lambda_s^2} \boldsymbol{H} = 0, \qquad (1)$$

где $\lambda_s^2(T) \equiv m_s^* c^2 / 4\pi n_s(T) e^2$ – глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник, m_s^* – эффективная масса сверхпроводя-

Осипов Константин Анатольевич, в.н.с., к.т.н.
E-mail: kaosipov@ciam.ru
Варюхин Антон Николаевич, зам. ген. директора – директор исследовательского центра, к.т.н.
Гелиев Александр Валикоевич, нач. отдела, к.ф.-м.н.
ГНЦ, федеральное автономное учреждение «Центральный институт авиационного моторостроения имени П. И. Баранова».
Россия, 111116, Москва, ул. Авиамоторная, 2.

Статья поступила в редакцию 27.03.2024
После доработки 16.09.2024
Принята к публикации 2.10.2024
Шифр научной специальности: 1.3.13

щих электронов, $n_s(T)$ – концентрация сверхпроводящих электронов как функция температуры, c – скорость света, e – заряд электрона. Уравнение (1) можно получить несколькими способами, например, из уравнений Максвелла и уравнения движения для сверхпроводящих электронов $m_s^* \frac{\partial \boldsymbol{V}_s}{\partial t} = -e\boldsymbol{E}$, привлекая экспериментальные данные о вытеснении магнитного поля из объема сверхпроводника. В стационарных условиях достаточно рассматривать только движение сверхпроводящих электронов, поскольку в данном случае электрическое поле в сверхпроводнике тождественно равно нулю, в противном случае любое конечное значение электрического поля привело бы к бесконечным значениям сверхтока, что невозможно. Нормальный ток после переходного процесса в сверхпроводнике при постоянных условиях затухает за счет слагаемого $-\left(m_n^* / \tau\right)\boldsymbol{V}_n$ в уравнении движения для нормальных электронов, где m_n^* – эффективная масса нормальных электронов, τ – время релаксации электронов в сверхпроводнике, находящегося в нормальном состоянии. Другой способ вывода уравнения (1) заключается в вариации функционала свободной энергии в магнитном поле F_{sH} (или в более общем случае потенциал свободной энергии Гиббса G_{sH}) [14].

Нестационарное уравнение магнитной диффузии в сверхпроводнике в мейснеровском состоянии. Физическая интерпретация полученного уравнения

Как было отмечено ранее, в стационарных условиях можно рассматривать только сверхпроводящий ток, движущийся по инерции, в силу того, что нормальный ток после переходного процесса затухает. В нестационарном случае при ненулевой температуре, когда есть не только сверхпроводящие, но и нормальные электроны, необходимо учитывать движение последних, поскольку нормальный ток также создает дополнительный вклад в суммарное магнитное поле в сверхпроводнике. Воспользуемся двухжидкостной моделью сверхпроводников [15–18], т. е. запишем уравнения движения для сверхпроводящих и нормальных электронов:

$$m_n^* \frac{\partial \boldsymbol{V}_n}{\partial t} = -\frac{m_n^*}{\tau}\boldsymbol{V}_n - e\boldsymbol{E}, \quad m_s^* \frac{\partial \boldsymbol{V}_s}{\partial t} = -e\boldsymbol{E}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{V}_s$, $\boldsymbol{V}_n$, m_s^*, m_n^* – скорости и эффективные массы сверхпроводящих и нормальных электронов, e – заряд электрона, $\boldsymbol{E}$ – индуцированное электрическое поле, ускоряющее два «типа» электронов. Умножив первое уравнение в системе (3) на $(-en_n)$, а второе – на $(-en_s)$, где n_n и n_s – концентрации нормальных и сверхпроводящих электронов, и используя определение плотности нормального и сверхпроводящего токов $\boldsymbol{j}_n = -en_n\boldsymbol{V}_n$, $\boldsymbol{j}_s = -en_s\boldsymbol{V}_s$, в результате получим:

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}_n}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}_n}{\tau} = \alpha_n \frac{\sigma_0}{\tau}\boldsymbol{E}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{j}_s}{\partial t} = \varepsilon_m^2 \alpha_s \frac{\sigma_0}{\tau}\boldsymbol{E}, \tag{4}$$

где введены коэффициент асимметрии эффективных масс $\varepsilon_m^2 = m_n^* / m_s^*$, $\sigma_0 = ne^2\tau / m_n^*$ – удельная проводимость сверхпроводящего материала в нормальном состоянии, $\alpha_n = n_n / n$, $\alpha_s = n_s / n$ – доли концентраций сверхпроводящих и нормальных электронов, n – концентрация всех электронов проводимости. Возьмем ротор от обеих частей первого уравнения системы (4) и вместо ротора электрического поля подставим $-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$, согласно одному из уравнений Максвелла:

$$\tau \frac{\partial \operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n}{\partial t} + \operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n = -\frac{\alpha_n \sigma_0}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{5}$$

Из (5) выразим выражение для плотности нормального тока:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n &= -\tau \frac{\partial \operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n}{\partial t} - \frac{\alpha_n \sigma_0}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-\tau \operatorname{rot} \boldsymbol{j}_n - \frac{\alpha_n \sigma_0}{c}\boldsymbol{H}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Сложив два уравнения в (4) и введя плотность тока $\boldsymbol{j}$ как сумму нормального и сверхпроводящего токов $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_n + \boldsymbol{j}_s$, получим:

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}_n}{\tau} = \left(\alpha_n + \varepsilon_m^2 \alpha_s\right)\frac{\sigma_0}{\tau}\boldsymbol{E}. \tag{7}$$

Взяв ротор от обеих частей уравнения (7) и используя уравнение Максвелла, описывающее закон Фарадея об электромагнитной индукции $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -(1/c)\partial\boldsymbol{H}/\partial t$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\operatorname{rot}\boldsymbol{j} + \left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)\frac{\sigma_0}{\tau}\frac{\boldsymbol{H}}{c}\right\} + \frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n}{\tau} = 0. \quad (8)$$

Вместо ротора плотности нормального тока в (8) подставим ранее полученное выражение (6):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{c\tau}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} + \varepsilon_m^2\alpha_s\sigma_0\frac{\boldsymbol{H}}{c} - \tau\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n\right\} = 0.$$

Отсюда видно, что выражение в фигурных скобках в общем случае может зависеть только от координат, тогда справедливо соотношение

$$\frac{c\tau}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} + \varepsilon_m^2\alpha_s\sigma_0\frac{\boldsymbol{H}}{c} - \tau\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n = f(\boldsymbol{r}),$$

где $f(\boldsymbol{r})$ – произвольная функция координат. Используя тождества из векторного анализа $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{H} - \Delta\boldsymbol{H}$ и соленоидальность магнитного поля, получим:

$$\Delta\boldsymbol{H} - \frac{1}{\lambda_s^2}\boldsymbol{H} = -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n - \frac{4\pi}{c\tau}f(\boldsymbol{r}). \quad (9)$$

Выражение $\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n$ через напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ получим из соотношения (8), подставив туда вместо плотности суммарного тока выражение $\boldsymbol{j} = (c/4\pi)\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{j}_n &= -\left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)\frac{\sigma_0}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} - \\ &-\tau\frac{\partial}{\partial t}\frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \\ &= -\left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)\frac{\sigma_0}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} + \frac{c\tau}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\boldsymbol{H}.\end{aligned} \quad (10)$$

Подставив (10) в (9) и использовав экспериментальный факт о вытеснении магнитного поля из объема сверхпроводника, приравнивая произвольную функцию координат к нулю $f(\boldsymbol{r}) = 0$, получим:

$$\frac{4\pi\sigma_0}{c^2}\left(\alpha_n + \varepsilon_m^2\alpha_s\right)\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} = \Delta\boldsymbol{H} - \frac{1}{\lambda_s^2}\boldsymbol{H} + \tau\frac{\partial\Delta\boldsymbol{H}}{\partial t}.$$

Преобразовав слагаемое $4\pi\sigma_0/c^2 = \tau/\lambda_L^2\varepsilon_m^2$ и используя равенство $\lambda_s^2 = m_s^* c^2/4\pi n_s e^2 = \lambda_L^2/\alpha_s$, где $\lambda_L^2 = m_s^* c^2/4\pi n e^2$ – лондоновская глубина проникновения магнитного поля, в результате получим следующее уравнение:

$$\left(\alpha_s + \frac{\alpha_n}{\varepsilon_m^2}\right)\frac{\tau}{\lambda_L^2}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} = \Delta\boldsymbol{H} - \frac{\alpha_s}{\lambda_L^2}\boldsymbol{H} + \tau\frac{\partial\Delta\boldsymbol{H}}{\partial t}. \quad (11)$$

Видно, что в уравнении (11) присутствуют не только слагаемые с частными производными по времени и координатам, но и слагаемое со смешанными производными $\partial\Delta\boldsymbol{H}/\partial t$. Подчеркнем, что уравнение (11) было получено из классических уравнений Максвелла с привлечением информации из экспериментальных наблюдений о вытеснении магнитного поля из объема сверхпроводника, а также с использованием представлений о двухжидкостной природе, согласно которой электроны в сверхпроводнике условно разделяются на сверхпроводящие, не испытывающие рассеяние энергии за счет объединения в куперовские пары, и нормальные.

Рассмотрев гармонические колебания напряженности магнитного поля в следующем виде $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})e^{i\omega t}$ и использовав, что $\partial\boldsymbol{H}/\partial t = i\omega\boldsymbol{H}$, после преобразований придем к так называемому модифицированному уравнению Лондонов:

$$\Delta\boldsymbol{H} - \frac{1}{\lambda_\omega^2}\boldsymbol{H} = 0, \quad (12)$$

где $\lambda_\omega^2 = \dfrac{\varepsilon_m^2(1+i\omega\tau)}{\varepsilon_m^2\alpha_s(1+i\omega\tau) + i\omega\tau\alpha_n}\lambda_L^2$ – глубина проникновения переменного магнитного поля в зависимости от частоты и долей концентраций сверхпроводящих и нормальных электронов. Видно, что уравнение (12) является комплексным в силу возникновения некоторого сдвига фаз при возбуждении нормальных электронов относительно изменения магнитного поля, что приводит к некоторым интересным особенностям в характере распределения магнитного поля в сверхпроводниках при гармонических колебаниях поля, например, при рассмотрении проникновения переменного внешнего магнитного поля в сверхпроводящее полупространство можно получить, что направление магнитного поля на некотором расстоянии от границы изменяется на противоположное по сравнению с направлением внешнего магнитного поля.

При равенстве эффективных масс нормальных и сверхпроводящих электронов $\varepsilon_m^2 = 1$ и, учтя, что сумма долей концентраций всех электронов равна единице $\alpha_s + \alpha_n = 1$, коэффициент при слагаемом с производной по времени в левой части уравнения (11) упростится:

$$\frac{\tau}{\lambda_L^2}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \Delta \boldsymbol{H} - \frac{\alpha_s}{\lambda_L^2}\boldsymbol{H} + \tau\frac{\partial \Delta \boldsymbol{H}}{\partial t}. \qquad (13)$$

Введем безразмерные оператор Лапласа $\overline{\Delta}$ и время $\overline{t}$ следующим образом:

$$\overline{\Delta} = \lambda_L^2 \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \overline{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2}, \quad \overline{x} = \frac{x}{\lambda_L}, \; \overline{y} = \frac{y}{\lambda_L}, \; \overline{z} = \frac{z}{\lambda_L}, \; \overline{t} = \frac{t}{\tau}. \qquad (14)$$

Используя введенные безразмерные величины, получим следующее нестационарное уравнение для напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$ в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \overline{t}} = \overline{\Delta}\boldsymbol{H} - \alpha_s \boldsymbol{H} + \frac{\partial \overline{\Delta}\boldsymbol{H}}{\partial \overline{t}}. \qquad (15)$$

Приведем уравнение к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{t}}\left(\boldsymbol{H} - \overline{\Delta}\boldsymbol{H}\right) = \overline{\Delta}\boldsymbol{H} - \alpha_s \boldsymbol{H}. \qquad (16)$$

Зададимся вопросом можно ли пренебречь слагаемым с оператором Лапласа $\overline{\Delta}\boldsymbol{H}$ по сравнению с напряженностью магнитного поля $\boldsymbol{H}$ в левой части уравнения (16). Характерное изменение напряженности магнитного поля в сверхпроводниках в одномерном случае (для сверхпроводящего полубесконечного пространства) описывается экспоненциальным выражением $H \sim e^{-x/\lambda_L}$, где на расстояниях бóльших лондоновской глубины проникновения λ_L напряженность поля экспоненциально мала. Тогда для этого случая получим следующую оценку $\Delta H = d^2H/dx^2 \sim d^2e^{-x/\lambda_L}/dx^2 = \left(1/\lambda_L^2\right)e^{-x/\lambda_L} \sim H/\lambda_L^2$, следовательно, слагаемые $\boldsymbol{H}$ и $\overline{\Delta}\boldsymbol{H}$ в (16) одного порядка, и им пренебрегать нельзя в вышеприведенном уравнении. Таким образом, выражение со смешанными производными третьего порядка $\partial\overline{\Delta}\boldsymbol{H}/\partial\overline{t}$ описывает важные физические процессы в сверхпроводниках, связанные с возбуждением нормальных электронов и последующей генерацией соответствующих магнитных полей.

Проведем некоторые аналогии полученных уравнений с другими физическими процессами. Уравнения (11), (13) или (15) по своему виду с некоторыми отличиями, о которых будет сказано ниже, функционально похожи, например, на нестационарное уравнение диффузионного типа $T_t = \alpha^2 T_{xx} - \beta\left(T - T_0\right)$, где слагаемое $\alpha^2 T_{xx}$ описывает диффузию тепла, а источниковое слагаемое $-\beta\left(T - T_0\right)$, пропорциональное разности температур стенки и окружающей среды, описывает поток тепла через боковую поверхность стержня. Положительные значения коэффициента $\beta > 0$ соответствуют оттоку тепла через боковую стенку, а отрицательные $\beta < 0$ – притоку. Уравнение типа $n_t = \alpha^2 n_{xx} - \beta\left(n - n_0\right)$ появляется и в химических задачах, где n – концентрация некоторой субстанции, слагаемое $\alpha^2 n_{xx}$ описывает процессы диффузии, выравнивающие возникающие неоднородности в распределении, а выражение $-\beta\left(n - n_0\right)$ – возникновение ($\beta < 0$) или распад ($\beta > 0$) вещества в химических реакциях. Также подобное уравнение можно встретить и в математических моделях для описания конвективно-диффузионных процессов в мембранном увлажнителе воздуха в системах функционирования твердополимерного топливного элемента на водороде.

Также можно вспомнить уравнение магнитной диффузии в плазме в магнитогидродинамике $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times \left[\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}\right] + \dfrac{c^2}{4\pi\sigma_0}\nabla^2 \boldsymbol{B}$. Коэффициент при диффузионном слагаемом $\nabla^2 \boldsymbol{B}$ можно выразить через лондоновскую глубину проникновения и время релаксации электронов $\frac{c^2}{4\pi\sigma_0}=\frac{mc^2}{4\pi ne^2\tau}=\frac{\lambda_L^2}{\tau}$. Тогда при нулевой скорости $\boldsymbol{V}=0$, получим уравнение магнитной диффузии плазмы $\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=\frac{\lambda_L^2}{\tau}\nabla^2\boldsymbol{B}$. Если воспользоваться безразмерными параметрами (14), то можно записать уравнение диффузии плазмы в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \overline{t}}=\overline{\nabla}^2\boldsymbol{B}. \quad (17)$$

Уравнение (15) отличается от (17) тем, что в нем присутствует в частности дополнительное слагаемое $-\alpha_s\boldsymbol{H}\left(\overline{\boldsymbol{r}},\overline{t}\right)$, характерное для сверхпроводников, описывающее по своей сути уменьшение величины напряженности магнитного поля по мере проникновения поля вглубь сверхпроводящего материала, находящегося в мейснеровском состоянии, по некоторой аналогии с уравнением диффузионного типа для стержня с оттоком тепла через боковую стенку. Чем больше значение коэффициента α_s (аналог коэффициента β) при этом слагаемом, тем магнитное поле проникает в сверхпроводник на меньшую величину. Безусловно природа уменьшения напряженности магнитного поля в объеме сверхпроводника связана с другими физическими процессами, а именно с возникновением поверхностных токов, которые экранируют проникновение магнитного поля в толщу массивного сверхпроводника (эффект Мейснера) [1]. Также в уравнениях (11), (13) и (15) присутствует и другое слагаемое с производными по координатам и времени $\partial\overline{\Delta}\boldsymbol{H}/\partial\overline{t}$, которое связано с возбуждением нормальных токов и соответствующего вклада в распределение суммарного магнитного поля.

Таким образом, по некоторой аналогии с вышеприведенными физическими процессами, которые описываются подобными дифференциальными уравнениями по своему функциональному виду, назовем уравнения (11), (13) и (15) ***нестационарным уравнением магнитной диффузии в сверхпроводниках***.

Следует отметить, некоторую особенность и в некотором смысле неполноту данного уравнения (15), полученного из классических рассмотрений с привлечением некоторой информации о вытеснении магнитного поля из объема сверхпроводника, вытекающей из многочисленных экспериментальных данных [1], а также двухжидкостной модели сверхпроводников [15–18]. При нулевой температуре все электроны в сверхпроводнике являются сверхпроводящими, т.е. доли концентраций двух типов электронов соответственно равны $\alpha_s=1$ и $\alpha_n=0$. Уравнение (15) не описывает каких-либо нестационарных эффектов, связанных с движением сверхпроводящих электронов (или так называемых куперовских пар согласно одному из механизмов возникновения сверхпроводящего состояния [2–8]). В этом смысле данное уравнение (15) не является полным в том смысле, что в нем не отражены нестационарные эффекты при движении сверхпроводящих электронов, что отражает неполноту классических представлений физики. По этой причине для описания нестационарных процессов, эффектов распаривания куперовских пар, нестационарного поведения волновой функции $\psi\left(\boldsymbol{r}\right)$, являющейся параметром порядка в теории Гинзбурга-Ландау, где $\left|\psi\left(\boldsymbol{r}\right)\right|^2=n_s/2$, необходимо обращаться к нестационарному уравнению Гинзбурга-Ландау.

Однако при конечной температуре $T\neq 0$ $[K]$ сверхпроводников нестационарную теорию Гинзбурга-Ландау необходимо дополнять также эффектами от возбуждения нормальных электронов, которые приводятся в движение от индуцированных электрических полей при изменяющихся условиях. Индуцированный нормальный ток будет создавать магнитные поля, которые будут влиять на поведение куперовских пар, и по этой причине должны учитываться при выводе нестационарного уравнения Гинзбурга-Ландау. Однако необходимо также иметь в виду, что теория Гинзбурга-Ландау применима в области температур близких к критической $T\sim T_c$, при которой происходит переход сверхпроводящего состояния в нормальное, поэтому строго говоря, уравнения Гинзбурга-Ландау в области низких температур некорректны.

Ниже будут рассмотрены некоторые свойства полученного нестационарного уравнения магнитной диффузии в сверхпроводниках на некоторых частных задачах.

Проникновение магнитного поля в сверхпроводящее полупространство в нестационарном случае

Рассмотрим нестационарный процесс проникновения внешнего магнитного поля в сверхпроводящее полупространство при заданных начальном и граничном условиях. Магнитное поле параллельно плоскости $x = 0$ и направлено вдоль оси z. Тогда для этого случая уравнение (15) будет эквивалентно следующему:

$$\frac{\partial H_z}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 H_z}{\partial \bar{x}^2} - \alpha_s H_z + \frac{\partial^3 H_z}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{t}}. \qquad (18)$$

Ниже представлены граничное и начальное условия, т. е. будем считать, что в начальный момент времени напряженность магнитного поля в сверхпроводящем полупространстве везде равно нулю:

$$\begin{cases} H_z\left(x, t=0\right) = 0, & 0 \le x < \infty \\ H_z\left(x=0, t\right) = H_0, & 0 \le t < \infty. \end{cases} \qquad (19)$$

Выполним синус-преобразование Фурье $\mathcal{F}_s$ по переменной x, тогда в результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной t. Через $\hat{H}_k\left(\bar{t}\right)$ обозначим следующий интеграл по безразмерной переменной $\bar{x}$ $\mathcal{F}_s\left(H_z\right) = \hat{H}_k\left(\bar{t}\right) =$ $= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty H_z\left(\bar{x}, \bar{t}\right)\sin k\bar{x}\, d\bar{x}$, где k просто параметр. При решении задачи нестационарной магнитной диффузии в сверхпроводящем полупространстве применим синус-преобразование к обеим частям уравнения с частными производными (18):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty H_z \sin k\bar{x}\, d\bar{x} = \\ &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 H_z}{\partial \bar{x}^2}\sin k\bar{x}\, d\bar{x} - \alpha_s \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty H_z \sin k\bar{x}\, d\bar{x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 H_z}{\partial \bar{x}^2}\sin k\bar{x}\, d\bar{x}. \end{aligned} \qquad (20)$$

Очевидно, что $\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty H_z\left(\bar{x}, \bar{t}\right)\sin k\bar{x}\, d\bar{x} =$ $= \frac{d\hat{H}_k}{d\bar{t}}$. Преобразуя второй интеграл со второй производной по координате $\bar{x}$ и проведя интегрирование по частям дважды, в результате получим:

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 H_z\left(\bar{x}, \bar{t}\right)}{\partial \bar{x}^2}\sin k\bar{x}\, d\bar{x} = \frac{2H_0 k}{\pi} - k^2 \hat{H}_k\left(\bar{t}\right), \qquad (21)$$

где были использованы следующие условия на бесконечности $H_z\left(\bar{x}, \bar{t}\right)\Big|_{x=\infty} = 0$, $\left.\frac{\partial H_z\left(\bar{x}, \bar{t}\right)}{\partial \bar{x}}\right|_{x=\infty} = 0$. Преобразуем слагаемое со смешанной производной в (20), используя (21):

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\partial^3 H_z}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{t}}\sin k\bar{x}\, d\bar{x} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 H_z}{\partial \bar{x}^2}\sin k\bar{x}\, d\bar{x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{t}}\left(\frac{2H_0 k}{\pi} - k^2 \hat{H}_k\left(\bar{t}\right)\right) = -k^2\frac{d\hat{H}_k}{d\bar{t}}. \end{aligned} \qquad (22)$$

Подставляя полученные выражения в (20), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $\hat{H}_k$:

$$\frac{d\hat{H}_k}{d\bar{t}} + \frac{\left(\alpha_s + k^2\right)}{\left(1 + k^2\right)}\hat{H}_k = \frac{2H_0 k}{\pi\left(1 + k^2\right)}. \qquad (23)$$

Из (19) получим начальное условие для функции $\hat{H}_k\left(\bar{t} = 0\right) \equiv \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty H_z\left(\bar{x}, \bar{t} = 0\right)\sin k\bar{x}\, d\bar{x} = 0$. Решением (23) будет функция вида $\hat{H}_k\left(\bar{t}\right) = Ae^{-\frac{\left(\alpha_s + k^2\right)}{\left(1 + k^2\right)}\bar{t}} + \frac{2H_0 k}{\pi\left(k^2 + \alpha_s\right)}$, где A – константа интегрирования. Тогда решение уравнения (23), удовлетворяющее нулевому начальному условию будет функция вида:

$$\hat{H}_k\left(\bar{t}\right) = \frac{2H_0 k}{\pi\left(k^2 + \alpha_s\right)}\left(1 - e^{-\frac{\left(\alpha_s + k^2\right)}{\left(1 + k^2\right)}\bar{t}}\right). \qquad (24)$$

Для нахождения напряженности магнитного поля H_z необходимо выполнить обратное синус-преобразование $\mathcal{F}_s^{-1}\left(\hat{H}\right) = H_z\left(\bar{x}, \bar{t}\right) =$ $= \int\limits_0^\infty \hat{H}_k\left(\bar{t}\right)\sin k\bar{x}\, dk$:

$$H_z(\overline{x},\overline{t}) = \int_0^\infty \hat{H}_k(\overline{t}) =$$
$$= \frac{2H_0 k}{\pi(k^2+\alpha_s)}\left(1 - e^{-\frac{(\alpha_s+k^2)}{(1+k^2)}\overline{t}}\right)\sin k\overline{x}\, dk. \quad (25)$$

Первый интеграл в (25) легко вычисляется $\frac{2H_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{k}{k^2+\alpha_s}\sin k\overline{x}\,dk = \frac{2H_0}{\pi}\frac{e^{-\sqrt{\alpha_s}\overline{x}}\pi\overline{x}}{2\overline{x}} = H_0 e^{-\sqrt{\alpha_s}\overline{x}}$, второй интеграл в крайнем случае можно вычислить численно. Тогда решение уравнения (18) с заданными начальным и граничным условиями (19) представляется в следующем функциональном виде:

$$H_z(\overline{x},\overline{t}) = H_0 e^{-\sqrt{\alpha_s}\overline{x}} - \frac{2H_0}{\pi}\times$$
$$\times\int_0^\infty \frac{k}{k^2+\alpha_s} e^{-\frac{(\alpha_s+k^2)}{(1+k^2)}\overline{t}} \sin k\overline{x}\, dk \quad (26)$$

Проникновение магнитного поля в плоскопараллельную сверхпроводящую пластину в нестационарном случае

Рассмотрим проникновение внешнего магнитного поля в плоскопараллельную сверхпроводящую пластину толщиной a. Напряженность магнитного поля также будет описываться уравнением вида (19). Граничные и начальное условия приведены ниже:

$$\begin{cases} H_z(x,t=0)=0, & -a/2<x<a/2 \\ H_z(x=-a/2,t)=H_0, & t>0 \\ H_z(x=a/2,t)=H_0, & t>0. \end{cases} \quad (27)$$

Решением стационарной задачи (19), т. е. $d^2H_z(\overline{x})/d\overline{x}^2 - \alpha_s H_z(\overline{x}) = 0$ очевидно является следующая зависимость $H_z(x) = A_1 e^{-\sqrt{\alpha_s}x/\lambda_L} + A_2 e^{\sqrt{\alpha_s}x/\lambda_L}$, где A_1 и A_2 – константы интегрирования. В силу симметрии задачи константы интегрирования равны и определяются как $A_1 = A_2 = H_0/2\mathrm{ch}\left(\sqrt{\alpha_s}a/2\lambda_L\right)$. Тогда напряженность магнитного поля в стационарном случае в плоскопараллельной пластине определяется как:

$$H_z(x) = H_0\frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\alpha_s}x/\lambda_L\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\alpha_s}a/2\lambda_L\right)}. \quad (28)$$

Теперь перейдем к новой зависимой переменной $\tilde{H}_z(\overline{x},\overline{t})$ такой, что $\tilde{H}_z(\overline{x},\overline{t}) = H_z(\overline{x}) - H_z(\overline{x},\overline{t})$, где $H_z(\overline{x})$ – решение стационарной задачи (28). Подставив в (19), получим, что новая переменная $\tilde{H}_z(\overline{x},\overline{t})$ должна подчиняться аналогичному нестационарному уравнению магнитной диффузии:

$$\frac{\partial\tilde{H}_z}{\partial\overline{t}} = \overline{\Delta}\tilde{H}_z - \alpha_s\tilde{H}_z + \frac{\partial^3\tilde{H}_z}{\partial\overline{x}^2\partial\overline{t}} \quad (29)$$

с соответствующими начальным и нулевыми граничными условиями для новой переменной:

$$\begin{cases} \tilde{H}_z(x,t=0)=H_z(x), \; -a/2<x<a/2 \\ \tilde{H}_z(x=-a/2,t)=0, & t>0 \\ \tilde{H}_z(x=a/2,t)=0, & t>0. \end{cases} \quad (30)$$

Воспользуемся методом разделения переменных: $\tilde{H}_z(\overline{x},\overline{t}) = T(\overline{t})R(\overline{x})$. Подставив в (29), после преобразований получим следующие соотношения:

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{d\overline{t}} = \frac{\overline{\Delta}R/R - \alpha_s}{1-\overline{\Delta}R/R} = \mathrm{const} = -\mu^2. \quad (31)$$

Равенство может выполниться, когда левая и правая части равны некоторой константе, которая должна быть отрицательной $-\mu^2$, в противном случае функция $T(\overline{t})$ будет экспоненциально расходиться с течением времени. Таким образом, $T(\overline{t}) \sim e^{-\mu^2\overline{t}}$. Для функции $R(\overline{x})$ будем иметь следующее уравнение:

$$\frac{d^2R(\overline{x})}{d\overline{x}^2} + \frac{\mu^2-\alpha_s}{1-\mu^2}R(\overline{x}) = 0. \quad (32)$$

Для начала предположим, что $\left(\alpha_s-\mu^2\right)/\left(1-\mu^2\right)\geq 0$, тогда $\dfrac{d^2R}{d\bar{x}^2}-$ $-\dfrac{\alpha_s-\mu^2}{1-\mu^2}R\left(\bar{x}\right)=0$. Решением этого уравнения является функция вида $R\left(\bar{x}\right)=$ $=A_1e^{-\bar{x}\left(\alpha_s-\mu^2\right)/\left(1-\mu^2\right)}+A_2e^{\bar{x}\left(\alpha_s-\mu^2\right)/\left(1-\mu^2\right)}$. Применив граничные условия для функции $R\left(\bar{x}\right)$ ($R\left(x=-a/2\right)=0$, $R\left(x=a/2\right)=0$), получим, что константы интегрирования равны нулю $A_1=A_2=0$. Нас не интересуют тривиальные решения, поэтому должно выполняться следующее неравенство $\left(\mu^2-\alpha_s\right)/\left(1-\mu^2\right)\geq 0$, тогда решением уравнения (32) является

$$R\left(\bar{x}\right)=A_1\cos\sqrt{\frac{\mu^2-\alpha_s}{1-\mu^2}}\bar{x}+A_2\sin\sqrt{\frac{\mu^2-\alpha_s}{1-\mu^2}}\bar{x}.$$

Из граничных условий получим:

$$\begin{cases} R\left(x=-a/2\right)=0=A_1\cos\sqrt{\dfrac{\mu^2-\alpha_s}{1-\mu^2}}\dfrac{a}{2\lambda_L}+\\ +A_2\sin\sqrt{\dfrac{\mu^2-\alpha_s}{1-\mu^2}}\dfrac{a}{2\lambda_L},\\ R\left(x=a/2\right)=0=A_1\cos\sqrt{\dfrac{\mu^2-\alpha_s}{1-\mu^2}}\dfrac{a}{2\lambda_L}-\\ -A_2\sin\sqrt{\dfrac{\mu^2-\alpha_s}{1-\mu^2}}\dfrac{a}{2\lambda_L}.\end{cases}$$

Пусть $A_2=0$ и $A_1\neq 0$, тогда $R\left(\bar{x}\right)=A_1\cos\sqrt{\dfrac{\mu^2-\alpha_s}{1-\mu^2}}\bar{x}$. Для того, чтобы выполнялись нулевые граничные условия $R\left(x=-a/2\right)=0$ и $R\left(x=a/2\right)=0$, необходимо, чтобы $\cos\sqrt{\dfrac{\mu^2-\alpha_s}{1-\mu^2}}\dfrac{a}{2\lambda_L}=0$. Отсюда следует условие на выбор коэффициентов μ^2:

$$\sqrt{\frac{\mu_k^2-\alpha_s}{1-\mu_k^2}}\frac{a}{2\lambda_L}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k=0,1,2,3.... \qquad (33)$$

Отсюда $\mu_k^2=\dfrac{\alpha_s+\delta_k^2}{1+\delta_k^2}$, где введено обозначение $\delta_k^2\equiv\left(\dfrac{\pi\lambda_L}{a}\right)^2\left(1+2k\right)^2$. Из (33) следует, что $\dfrac{\alpha_s+\left(\pi\lambda_L/a\right)^2}{1+\left(\pi\lambda_L/a\right)^2}<\mu_k^2<1$. Также можно убедиться в том, что неравенство $\left(\mu_k^2-\alpha_s\right)/\left(1-\mu_k^2\right)\geq 0$ выполняется при любых k: $\mu_k^2-\alpha_s=\dfrac{\alpha_n\delta_k^2}{1+\delta_k^2}>0$. Зная зависимости для функций $T\left(\bar{t}\right)$ и $R\left(\bar{x}\right)$, получим выражение для $\tilde{H}_z\left(\bar{x},\bar{t}\right)$:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_z\left(\bar{x},\bar{t}\right)&=\sum_{k=0}^{\infty}T_k\left(\bar{t}\right)R_k\left(\bar{x}\right)=\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}A_ke^{-\mu_k^2\bar{t}}\cos\delta_k\bar{x}.\end{aligned} \qquad (34)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов необходимо воспользоваться начальным условием из (30):

$$\begin{aligned}&\tilde{H}_z\left(\bar{x},\bar{t}=0\right)=H_z\left(\bar{x}\right)=\\ &=H_0\frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\alpha_s}\bar{x}\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\alpha_s}a/2\lambda_L\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\cos\delta_k\bar{x}.\end{aligned} \qquad (35)$$

Из ортогональности тригонометрических функций найдем коэффициенты A_k:

$$A_k=\frac{\int\limits_{-a/2\lambda_L}^{a/2\lambda_L}H_z(\bar{x})\cos\left(\delta_k\bar{x}\right)d\bar{x}}{\int\limits_{-a/2\lambda_L}^{a/2\lambda_L}\cos^2\left(\delta_k\bar{x}\right)d\bar{x}}=$$

$$=\frac{H_0}{\mathrm{ch}\sqrt{\alpha_s}a/2\lambda_L}\frac{\int\limits_{-a/2\lambda_L}^{a/2\lambda_L}\mathrm{ch}\left(\sqrt{\alpha_s}\bar{x}\right)\cos\left(\delta_k\bar{x}\right)d\bar{x}}{\int\limits_{-a/2\lambda_L}^{a/2\lambda_L}\cos^2\left(\delta_k\bar{x}\right)d\bar{x}}.$$

В результате получим выражения для коэффициентов $A_k=\left(-1\right)^k\times$ $\times\dfrac{4\left(\pi+2\pi k\right)}{\left(\pi+2\pi k\right)^2+\alpha_sa^2/\lambda_L^2}H_0$, $k=0,1,2,3...$. Таким образом, напряженность магнитного поля в плоскопараллельной пластине толщиной a будет описываться следующей функциональной зависимостью:

$$H_z\left(\bar{x},\bar{t}\right)=H_0\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\alpha_s}\bar{x}}{\operatorname{ch}\sqrt{\alpha_s}a/2\lambda_L}-$$
$$-H_0\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{4\left(\pi+2\pi k\right)}{\left(\pi+2\pi k\right)^2+\left(\sqrt{\alpha_s}a/\lambda_L\right)^2}\times \quad (36)$$
$$\times e^{-\mu_k^2\bar{t}}\cos\delta_k\bar{x},$$

где $\mu_k^2=\dfrac{\alpha_s+\delta_k^2}{1+\delta_k^2}$ и $\delta_k^2\equiv\left(\dfrac{\pi\lambda_L}{a}\right)^2\left(1+2k\right)^2$.

Заключение

При ненулевой температуре при изменении магнитного поля индуцируется вихревое электрическое поле, которое ускоряет как сверхпроводящие, так и нормальные электроны согласно двухжидкостной модели сверхпроводников. По этой причине при переменных условиях необходимо учитывать движение двух типов электронов, поскольку нормальный ток также создает свое собственное магнитное поле, которое вносит изменение в характер распределения магнитного поля в объеме сверхпроводника при нестационарных условиях при ненулевой температуре.

В работе получено уравнение магнитной диффузии в сверхпроводниках в частных производных относительно координат и времени. Уравнение магнитной диффузии описывает нестационарные процессы проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Полученное нестационарное уравнение функционально во многом схоже с уравнениями диффузионного типа, возникающими, например, в задачах теплопроводности. Однако в этом уравнении отмечаются и некоторые отличия, связанные с появлением нового слагаемого со смешанными производными третьего порядка. В частности, рассмотрены нестационарные процессы установления магнитного поля для полубесконечного сверхпроводящего пространства и плоскопараллельной сверхпроводящей пластины конечной толщины, получены аналитические зависимости напряженности магнитного поля от времени и координаты.

Также для переменного магнитного поля, изменяющегося синусоидальным образом, уравнение магнитной диффузии сводится к модифицированному уравнению Лондонов, описывающего распределение магнитного поля в сверхпроводниках при гармонических колебаниях поля, в котором возникает зависимость глубины проникновения магнитного поля от частоты и долей концентраций нормальных и сверхпроводящих электронов, т. е. фактически от температуры.

Однако следует отметить, что уравнение магнитной диффузии в сверхпроводниках, полученное из уравнений Максвелла и уравнений движения сверхпроводящих и нормальных электронов, не описывает нестационарные эффекты, связанные с движением сверхпроводящих электронов. Поэтому данное уравнение не является полным в том смысле, что в нем не отражены нестационарные эффекты при движении куперовских пар. Для описания нестационарных процессов необходимо обращаться к нестационарной теории Гинзбурга-Ландау, дополненной эффектами от возбуждения нормальных электронов, которые приводятся в движение от индуцированных электрических полей при изменяющихся условиях. Индуцированный нормальный ток в свою очередь будет создавать магнитные поля, которые будут влиять на поведение куперовских пар, и по этой причине должны учитываться при выводе нестационарного уравнения Гинзбурга-Ландау.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Meissner W., Ochsenfeld R.* / Naturwiss. 1933. Vol. 21. P. 787.

2. *Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R.* / Phys. Rev. 1957. Vol. 106.

3. *Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R.* / Phys. Rev. 1957. Vol. 108. P. 1175.

4. *Боголюбов Н. Н.* / ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 58.

5. *Bogolyubov N. N.* / Nuovo cim. 1958. Vol. 7. P. 794.

6. *Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В.* Новый метод в теории сверхпроводимости. – М.: Наука, 1958.

7. *Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R.* / Phys. Rev. 1957. Vol. 106. P. 162–164.

8. *Бардин Дж., Купер Л., Шриффер Дж.* В сб.: Теория сверхпроводимости / Под ред. Боголюбова Н. Н. –

М.: ИЛ, 1960.

9. *London F., London H.* / Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. A149. P. 71.

10. *London F.* / Proc. Roy. Soc. 1935. Vol. A512. P. 24.

11. *London F.* / Phys. Rev. 1948. Vol. 74. P. 562.

12. *London F.* / Physica. 1936. Vol. 3. P. 450.

13. *London F.* Une conception nouvelle de la supraconductibilite. – Paris, 1937.

14. *Шмидт В. В.* Введение в физику сверхпроводников. – М.: МЦНМО, 2000.

15. *Bardeen J.* / Phys. Rev. Let. 1958. Vol. 1. № 11. P. 399–400.

16. *London F.* Superfluids. John Wiley and Sons. Vols. 1 and 2. – New York, 1954.

17. *Gorter C. J.* Progress in Low-Temperature Physics. Chap. 1. – North Holland Publishing Company, 1955.

18. *Landau L. D.* / J. Phys. U.S.S.R. 1941. Vol. 5. P. 71.

PACS: 74.25.Ha

Unsteady equation of magnetic diffusion in superconductors in the Meissner state

K. A. Osipov, A. N. Varyukhin and A. V. Geliev

«Central Institute of Aviation Motors named after P. I. Baranov»
2 Aviamotornaya st., Moscow, 111116, Russia

Received 27.03.2024; revised 16.09.2024; accepted 2.10.2024

A nonstationary equation of magnetic diffusion in superconductors in the Meissner state is obtained in accordance with a two-fluid model according to which all electrons in a superconductor are divided into two types – superconducting and normal. A physical interpretation of the derived equation is presented and some of its features are noted. With a harmonic change in the magnetic field, this equation is reduced to a modified London equation, in which a complex expression is obtained for the penetration depth of an alternating magnetic field depending on the frequency and fractions of concentrations of normal and superconducting electrons (or actually on temperature). Analytical solutions of the unsteady equation of magnetic diffusion in superconductors are obtained in some special cases – for a superconducting half-space and a plane-parallel superconducting plate of finite thickness with specified boundary and initial conditions.

Keywords: unsteady magnetic diffusion equation in a superconductor; superconductivity; modified London equation; penetration depth of an alternating magnetic field; two-fluid model; normal electrons; superconducting electrons.

REFERENCES

1. Meissner W. and Ochsenfeld R., Naturwiss. **21**, 787 (1933).

2. Bardeen J., Cooper L. N. and Schrieffer J. R., Phys. Rev. **106**, 162 (1957).

3. Bardeen J., Cooper L. N. and Schrieffer J. R., Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).

4. Bogolyubov N. N., ZhETF **34**, 58 (1958).

5. Bogolyubov N. N., Nuovo cim. **7**, 794 (1958).

6. Bogolyubov N. N., Tolmachev V. V. and Shirkov D. V., A new method in the theory of superconductivity. Moscow, Nauka, 1958.

7. Bardeen J., Cooper L. N. and Schrieffer J. R., Phys. Rev. **106**, 162–164 (1957).

8. Bardin J., Cooper L. and Schrieffer J., In the collection: Theory of superconductivity / Ed. by Bogolyubov N. N. Moscow, IL, 1960.

9. London F. and London H., Proc. Roy. Soc. **A149**, 71 (1935).

10. London F., Proc. Roy. Soc. **A512**, 24 (1935).

11. London F., Proc. Roy. Soc., Phys. Rev. **74**, 562 (1948).

12. London F., Physica **3**, 450 (1936).

13. London F., Une conception nouvelle de la supraconductibilite. Paris, 1937.

14. Schmidt V. V. Introduction to the physics of superconductors. Moscow, ICNMO, 2000.

15. Bardeen J., Phys. Rev. Let. **1** (11), 399–400 (1958).

16. London F., Superfluids. Vols. 1 and 2. New York, John Wiley and Sons, 1954.

17. Gorter C. J., Progress in Low-Temperature Physics. Chap. 1. North Holland Publishing Company, 1955.

18. Landau L. D., J. Phys. U.S.S.R. **5**, 71 (1941).